6. Nezávislost, dominance, klikovost a jádro grafu

6.1. Neorientované grafy

Definice 6.1. *Množina $A \subset U(G)$ se nazývá* nezávislá množina *grafu G, jestliže žádné dva uzly množiny A nejsou spojeny hranou.*

Definice 6.2. Nezávislost grafu *G (značíme $\alpha(G)$) je největší počet prvků nezávislé množiny grafu G.*

Definice 6.3. *Množina $B \subset U(G)$ se nazývá (uzlové)* pokrytí *grafu G, jestliže pro každou hranu $\{x, y\} \in H(G)$ je $x \in B$ nebo $y \in B$.*

Definice 6.4. Pokrývací číslo *grafu G (značíme $\beta(G)$) je počet prvků nejmenšího pokrytí grafu G.*

Věta 6.1. *Množina $A \subset U(G)$ je nezávislá právě když $B = U(G) \setminus A$ je pokrytí G.*

Důsledek 6.1. *Pro každý graf G platí*

$$\alpha(G) + \beta(G) = |U(G)|.$$

Věta 6.2 (Chvátal, Erdős). *Nechť G je k-souvislý graf ($k \geq 2$) s $\alpha(G) \leq k$. Pak je G hamiltonovský.*

Věta 6.3 (Dirac). *Nechť G je k-souvislý graf ($k \geq 2$). Pak pro každou množinu $M \subset U(G)$, $|M| \leq k$, existuje v grafu G kružnice C taková, že $M \subset U(C)$.*

Definice 6.5. *Podgraf $K \subset G$ se nazývá* klika *grafu G, jestliže*

a) K je úplný podgraf

b) jestliže $K \subset K' \subset G$ a K' je úplný podgraf, pak $K = K'$.

Definice 6.6. Klikovost grafu *(značíme $\omega(G)$) je největší počet uzlů kliky grafu G.*

Definice 6.7. *Nechť G je graf. Potom graf*

$$\bar{G} = \left(U(G), \binom{U(G)}{2} \setminus H(G)\right)$$

se nazývá doplněk *grafu G.*

Věta 6.4. *Nechť G je graf. Pak*

$$\alpha(G) = \omega(\bar{G}).$$

Definice 6.8. *Množina $B \subset U(G)$ se nazývá* dominantní množina *grafu G, jestliže pro každý uzel $x \notin B$ existuje uzel $y \in B$ takový, že $\{x, y\} \in H(G)$.*

Definice 6.9. *Počet prvků nejmenší dominantní množiny grafu G se nazývá* číslo dominance *grafu G a značí se $\gamma(G)$.*

Věta 6.5. *Nechť $A \subset U(G)$ je nezávislá množina grafu G. Pak A je maximální nezávislá množina právě když A je dominantní.*

Věta 6.5. *Každá maximální nezávislá množina je minimální dominantní množina grafu G.*

Důsledek 6.2. *Pro každý graf G platí $\gamma(G) \leq \alpha(G)$.*

Definice 6.10. *Množina uzlů $C \subset U(G)$, která je současně nezávislá i dominantní, se nazývá* jádro *grafu G.*

Věta 6.7. *Každý neorientovaný graf má jádro.*

Poznámka. *Úloha zjistit, zda v daném grafu existuje nezávislá množina předepsané velikosti, je NP-úplný problém.*

Algoritmus (maximální nezávislá množina v grafu).

1. $X := \emptyset, \quad Y := U(G)$.
2. *Dokud je* $Y \neq \emptyset$, *prováděj operaci (3):*
3. *Zvol* $x \in Y$,
   polož $X := X \cup \{x\}$,
   z Y *vynech* x *a všechny uzly s ním sousední.*

6.2. Jádro orientovaného grafu

Definice 6.11. *Buď $\vec{G}$ orientovaný graf. Říkáme, že množina $A \subset U(\vec{G})$ je* nezávislá, *jestliže žádné dva její uzly nejsou spojeny hranou.*

Definice 6.12. *Buď $\vec{G}$ orientovaný graf, $C \subset U(\vec{G})$. Množina C se nazývá* jádro *grafu $\vec{G}$, jestliže*

(i) C je nezávislá množina,

(ii) pro každý $x \in U(\vec{G}) \setminus C$ existuje $y \in U(C)$ tak, že $(x, y) \in H(\vec{G})$.

Věta 6.8. *Každý acyklický graf má jádro.*

Věta 6.9. *Každý orientovaný graf bez cyklů liché délky má jádro.*