5. Prohledávání grafů a algoritmy k-souvislosti

Označme:

N množinu uzlů, které ještě nebyly probrány,

M množinu hran, které ještě nebyly probrány,

D množinu uzlů, kterých již bylo dosaženo, ale ze kterých ještě mohou vést neprobrané hrany.

Algoritmus 5.1 (Prohledávání grafu).

1. $N := U(G)$, $M := H(G)$, $D := \emptyset$. (inicializace)

2. Je-li $N = \emptyset$, výpočet končí. (test ukončení)

3. Zvol $v \in N$ a polož $N := N \setminus \{v\}$, $D := \{v\}$.
(volba prvního uzlu v komponentě)

4. Zvol libovolně $w \in D$. (volba počátečního uzlu hrany)

5. Hledej hranu v M obsahující w: (test použitelnosti w)

- *neexistuje: $D := D \setminus \{w\}$, a*
  - *je-li $D = \emptyset$, jdi na* **2**,
  - *je-li $D \neq \emptyset$, jdi na* **4**.
- *existuje: jdi na* **6**.

6. Zvol $h = \{w, z\} \in M$, "projdi" ji, (tj. proveď na ní určený úkol), a polož

$M := M \setminus \{h\}$;

je-li $z \in N$, pak $N := N \setminus \{z\}$, $D := D \cup \{z\}$,

jdi na **4**.

Věta 5.1. *Algoritmus 5.1 prohledá graf G v čase $O(n+m)$, kde n je počet uzlů a m počet hran grafu G.*

Tvrzení 5.1. *Komponenty grafu lze nalézt v čase $O(m+n)$.*

Nalezení artikulací grafu (Tarjan 1972)

1. Uzly očíslujeme pořadím, ve kterém byly zařazeny do stromu prohledávání, a tato čísla označíme $p(x)$.
2. Pro každý uzel x souběžně postupně vypočítáváme *dolní číslo* $r(x)$ podle následujících pravidel:
   a) při objevení nového uzlu položíme $r(x) = p(x)$,
   b) při nalezení chordy xy položíme $r(x) = \min\{p(y), r(x)\}$,
   c) při zpětném kroku z x do y položíme $r(y) = \min\{r(y), r(x)\}$.

$r(x)$ je nejmenší pořadové číslo uzlu, do něhož se lze z uzlu x dostat orientovanou cestou, skládající se z hran stromu a případně (na konci) z právě jedné chordy.

Uzel x s $p(x) > 1$ je artikulací, právě když existuje jeho následník y ve stromu prohledávání takový, že platí $r(y) \geq p(x)$.

Generování hamiltonovských cest a cyklů

Obecné schema backtrackingu budeme modifikovat následujícími pravidly.

1) Nebereme v úvahu chordy,
2) při $|D| = n$ testujeme existenci hrany do počátečního uzlu; výsledkem je cesta (hrana neexistuje) nebo cyklus (hrana existuje),
3) při zpětném kroku se v každém uzlu u ptáme, zda existuje následník s vyšším číslem, do nějž jsme z u ještě nešli, jakmile jej ale nalezneme, tak při následném dopředném pohybu prozkoumáváme opět všechny uzly grafu, které nejsou v množině D.

Věta 5.2 (Dirac). *Nechť G je graf na $n \geq 3$ uzlech. Je-li*

$$\delta(G) \geq \frac{n}{2},$$

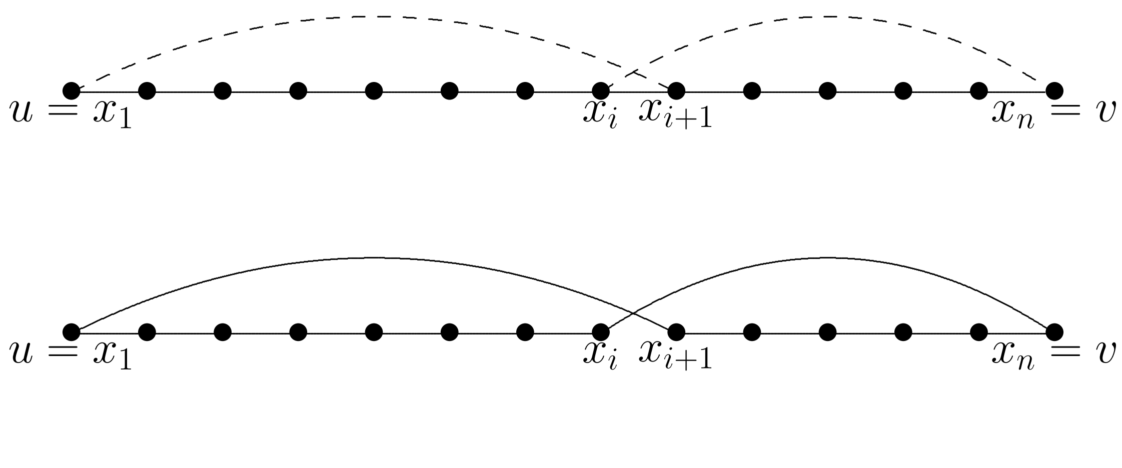
pak je G hamiltonovský.

Věta 5.3 (Ore). *Nechť G je graf na $n \geq 3$ uzlech. Jestliže pro všechny dvojice nesousedních uzlů x, y grafu G platí*

$$d(x) + d(y) \geq n,$$

pak je graf G hamiltonovský.

Lemma 5.1 (Ore). *Nechť u, v jsou dva nesousední uzly grafu G takové, že $d(u) + d(v) \geq n$. Pak G je hamiltonovský, právě když graf $G + \{u, v\}$ (vzniklý přidáním hrany $\{u, v\}$ do G) je hamiltonovský.*



Definice 5.1 (Bondy, Chvátal). Uzávěrem grafu G *nazveme graf* $\mathrm{cl}(G)$, *který vznikne z grafu* G *postupným rekurentním přidáváním všech hran* $\{u, v\}$, *splňujících podmínku Oreho lemmatu.*

Tvrzení 5.2. *Pro každý graf* G *je jeho uzávěr* $\mathrm{cl}(G)$ *určen jednoznačně.*

Věta 5.4 (Bondy, Chvátal). *Nechť* G *je graf s alespoň třemi uzly. Je-li* $\mathrm{cl}(G)$ *úplný graf, potom je graf* G *hamiltonovský.*