4. Míry souvislosti grafu

Definice 4.1. *Hrana* $\{x, y\} \in H(G)$ *se nazývá* most *grafu* G*, jestliže v grafu* G *neexistuje žádná kružnice, která ji obsahuje.*

Tvrzení 4.1. *Je-li graf* G *souvislý a hrana* $\{x, y\}$ *jeho most, pak graf* $G - \{x, y\}$*, vzniklý odstraněním hrany* $\{x, y\}$ *z* G*, je nesouvislý.*

Věta 4.1. *Má-li souvislý graf* G *most, pak má alespoň dva uzly lichého stupně.*

Definice 4.2. *Uzel* $x \in U(G)$ *je* artikulace *grafu* G*, jestliže existují hrany* $\{x, y_1\}$ *a* $\{x, y_2\}$*, které nepatří současně téže kružnici grafu* G*.*

Definice 4.3. *Buď* G *graf,* $G' \subset G$ *jeho souvislý podgraf. Řekneme, že* G' *je* blok *grafu* G*, jestliže:*

a) G' *nemá artikulaci,*

b) *jestliže* G'' *je souvislý graf bez artikulace takový, že* $G' \subset G'' \subset G$*, pak* $G'' = G'$*.*

Tvrzení 4.2. *Buď G souvislý graf. Pak G nemá artikulaci právě když pro každé dvě jeho hrany existuje kružnice, na níž obě leží.*

Důsledek 4.1. *Pro každé dvě hrany bloku, který není mostem, existuje kružnice, na níž obě leží.*

Věta 4.2. *Buďte G_1, G_2 dva bloky grafu G. Pak buďto $G_1 = G_2$, nebo G_1 a G_2 nemají žádnou společnou hranu.*

Definice 4.4. *Buď G souvislý graf, $B_1, \ldots, B_r$ všechny jeho bloky a $x_1, \ldots, x_s$ všechny jeho artikulace. Graf $B(G)$, definovaný předpisem*

$$U(B(G)) = \{x_1, \ldots, x_s, B_1, \ldots, B_r\},$$

$$H(B(G)) = \{\{a, b\} \mid \exists i, j \text{ tak, že } a = x_i,\, b = B_j \text{ a } x_i \in U(B_j)\},$$

se nazývá blokový graf *grafu G.*

Věta 4.3. *Pro každý souvislý graf G je blokový graf $B(G)$ stromem.*

Definice 4.5. *Buď G souvislý graf a $x, y \in U(G)$ jeho uzly, $x \neq y$. Množina $B \subset H(G)$ taková, že*

1) každá cesta z x do y obsahuje alespoň jednu hranu množiny B,

2) žádná vlastní podmnožina množiny B nemá vlastnost 1),

se nazývá hranový řez *grafu G mezi uzly x a y.*

Definice 4.6. *Nejmenší počet prvků hranového řezu mezi uzly x a y se nazývá* hranový stupeň souvislosti *grafu G mezi uzly x a y a značí se $h_G(x, y)$.*

Definice 4.7. *Buď G souvislý graf a x, $y \in U(G)$ jeho uzly, $x \neq y$. Neprázdná množina $A \subset U(G)$ taková, že*

1) každá cesta z x do y obsahuje alespoň jeden uzel z množiny A,

2) žádná vlastní podmnožina množiny A nemá vlastnost 1),

se nazývá uzlový řez *grafu G mezi uzly x a y.*

Definice 4.8. *Nejmenší počet prvků uzlového řezu, oddělujícího uzly x a y, se nazývá* uzlový stupeň souvislosti *grafu G mezi uzly x a y a značí se $u_G(x, y)$. Neexistuje-li uzlový řez mezi x a y, tj. jsou-li uzly x a y sousední, klademe $u_G(x, y) = |U(G)| - 1$.*

Definice 4.9.

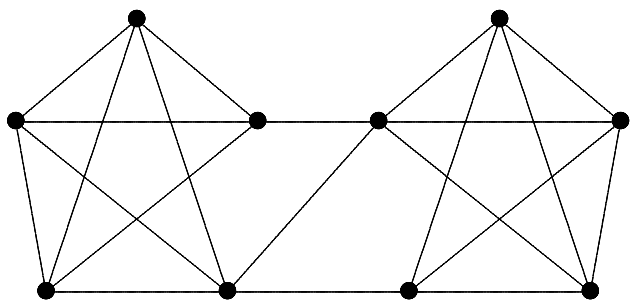
(*i*) *Nejmenší z čísel* $u_G(x, y)$ *nazveme* uzlový stupeň souvislosti *grafu* G *a budeme je značit* $u(G)$.

(*ii*) *Nejmenší z čísel* $h_G(x, y)$ *nazveme* hranový stupeň souvislosti *grafu* G *a budeme je značit* $h(G)$.

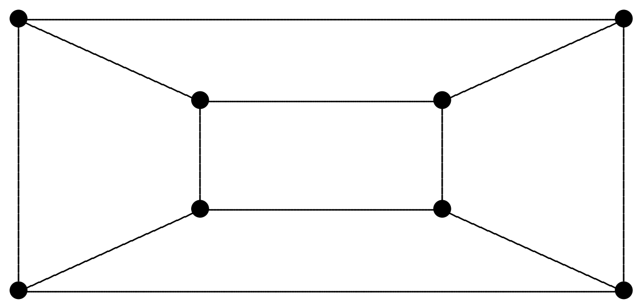
Řekneme, že graf G *je* uzlově (resp. hranově) k-souvislý, *jestliže je* $u(G) \geq k$ *(resp.* $h(G) \geq k$*).*

Věta 4.4. *Pro každý graf* G *platí*

$$u(G) \leq h(G) \leq \delta(G).$$



$u(G) = 2,\ h(G) = 3,\ \delta(G) = 4$



$u(G) = h(G) = \delta(G) = 3$

Věta 4.5. *V každém grafu* G *s alespoň 2 uzly platí*

$$h(G) \leq \frac{2|H(G)|}{|U(G)|}.$$

Věta 4.6 (Ford, Fulkerson). *Graf G je hranově k-souvislý mezi uzly a a b, $a \neq b$, právě když v něm existuje k hranově disjunktních cest, vedoucích z a do b.*

Věta 4.7 (Menger). *Graf G je uzlově k-souvislý mezi nesousedními uzly a a b, právě když v něm existuje k uzlově disjunktních cest, vedoucích z a do b.*

Konstrukce sítě $\vec{G}$:

$U(\vec{G}) = \{(x,i) |\ x \in U(G),\ i = 1,2\}$,

$H(\vec{G}) = \{((x,1),(x,2)) \mid x \in U(G)\} \cup \{((x,2),(y,1)) \mid \{x,y\} \in H(G)\}$.

Propustnosti hran:

u hran typu $((x,1),(x,2))$ položíme propustnost rovnu jedné,

u hran druhého typu (tj. $((x,2),(y,1))$) bude propustnost nekonečná.

Zdrojem je uzel $(a,2)$, stokem je uzel $(b,1)$.