## 3. Grafy a matice

**Definice 3.2.** *Čtvercová matice* $\mathbf{A}$ *se nazývá* rozložitelná, *lze-li ji napsat ve tvaru*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix},$$

*kde* $\mathbf{A}_{11}$ *a* $\mathbf{A}_{22}$ *jsou čtvercové matice řádu alespoň 1 a* $\mathbf{0}$ *je nulová matice, anebo lze-li ji do tohoto tvaru převést permutací řádků a stejnou permutací sloupců.*

Ekvivalentně: $\mathbf{A}$ je rozložitelná, jestliže existuje permutační matice $\mathbf{P}$ tak, že

$$\mathbf{PAP}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}.$$

**Věta 3.2.** *Buď $\vec{G}$ ohodnocený orientovaný graf. Platí:*

*a) Je-li $\vec{G}$ silně souvislý, pak je matice $\mathbf{W}(\vec{G})$ nerozložitelná.*

*b) Jsou-li $\vec{G}_1, \dots, \vec{G}_k$ kvazikomponenty grafu $\vec{G}$, očíslované tak, že v kondenzaci $\vec{G}_C$ jsou pouze hrany $(\vec{G}_k, \vec{G}_\ell)$ pro $k < \ell$ a očíslujeme-li uzly grafu $\vec{G}$ souhlasně s očíslováním kvazikomponent, tj. tak, že je-li $i \in \vec{G}_k$ a $j \in \vec{G}_\ell$ pro $k < \ell$, pak $i < j$, pak matice $\mathbf{W}(\vec{G})$ má tvar*

$$\mathbf{W}(\vec{G}) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{12} & \mathbf{W}_{13} & \dots & \mathbf{W}_{1k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_{22} & \mathbf{W}_{23} & \dots & \mathbf{W}_{2k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{W}_{33} & \dots & \mathbf{W}_{3k} \\ & & \dots & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{W}_{kk} \end{bmatrix},$$

*kde $\mathbf{W}_{ii} = \mathbf{W}(\vec{G})_i$, $i = 1, \dots, k$, a tyto matice jsou již nerozložitelné.*

**Důsledek 3.1.** *Čtvercová matice $\mathbf{A}$ je nerozložitelná právě když její diagram $\vec{G}(\mathbf{A})$ je silně souvislý.*

**Definice 3.3.** *Řekneme, že čtvercová matice* $\mathbf{A}$ *je* slabě rozložitelná, *jestliže existují permutační matice* $\mathbf{P}$ *a* $\mathbf{Q}$ *tak, že*

$$\mathbf{PAQ} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix},$$

*kde* $\mathbf{A}_{11}$ *a* $\mathbf{A}_{22}$ *jsou čtvercové matice řádu alespoň 1 a* $\mathbf{0}$ *je nulová matice.*

*Čtvercová matice, která není slabě rozložitelná, se nazývá* úplně nerozložitelná.

**Definice 3.4.** Bigraf *je orientovaný graf* $\vec{G}$, *jehož množinu uzlů lze rozložit na disjunktní neprázdné podmnožiny* $U_1$, $U_2$ *tak, že pro každou hranu* $(u, v) \in H(\vec{G})$ *je* $u \in U_1$ *a* $v \in U_2$.

**Definice 3.5.** *Buď* $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ *čtvercová matice řádu* $n$*; označme* $U_1$ *množinu řádkových indexů a* $U_2$ *množinu sloupcových indexů matice* $\mathbf{A}$. Bigraf matice $\mathbf{A}$ *je orientovaný graf* $\vec{B}(\mathbf{A})$ *s množinou uzlů*

$$U = U_1 \cup U_2$$

*a množinou hran*

$$H = \{(i, j)|\ i \in U_1, j \in U_2, a_{ij} \neq 0\}.$$

**Definice 3.6.** *Buď* $\vec{G}$ *bigraf s množinou uzlů* $U(\vec{G}) = U_1 \cup U_2$*. Množina* $V \subset U_1$*,* $\emptyset \neq V \neq U_1$*, se nazývá* stabilní množina v $\vec{G}$*, jestliže pro množinu uzlů*

$$W = \{j \in U_2 | \ \exists i \in V \ \textit{tak, že}\ (i,j) \in H(\vec{G})\}$$

*platí*

$$|W| \leq |V|.$$

**Věta 3.3.** *Čtvercová matice* $\mathbf{A}$ *je slabě rozložitelná právě když v jejím bigrafu* $\vec{B}(\mathbf{A})$ *existuje stabilní množina.*

**Definice 3.7.** *Řekneme, že bigraf* $\vec{G}$ *je* lineární*, jestliže pro každý uzel* $u \in U_1$ *je* $d^-_{\vec{G}}(u) = 1$ *a pro každý uzel* $v \in U_2$ *je* $d^+_{\vec{G}}(v) = 1$.

**Definice 3.8.** *Je-li* $\vec{G}$ *bigraf a* $\vec{G}_1 \subset \vec{G}$ *jeho lineární podbigraf, pak říkáme, že* $\vec{G}_1$ *je* párování *v* $\vec{G}$.

*Je-li* $\vec{G}_1 \subset \vec{G}$ *párování v* $\vec{G}$ *takové, že* $U(\vec{G}_1) = U(\vec{G})$ *(tj.* $\vec{G}_1$ *je faktorem bigrafu* $\vec{G}$*), pak říkáme, že* $\vec{G}_1$ *je* perfektní párování *v* $\vec{G}$.

**Věta 3.4.**

1. *Je-li* $\mathbf{A}$ *regulární matice, pak její bigraf* $\vec{B}(\mathbf{A})$ *má perfektní párování.*
2. *Jestliže bigraf* $\vec{G}$ *má perfektní párování, pak existuje regulární matice* $\mathbf{A}$ *taková, že* $\vec{B}(\mathbf{A}) = \vec{G}$.

**Definice.** Strukturální matice řádu $n \geq 1$ *je čtvercová matice řádu* $n$, *u níž je dána pouze struktura nulových a nenulových prvků, ale nejsou určeny jejich konkrétní hodnoty.*

(Poněkud přesněji: na strukturální matici lze pohlížet jako na funkci hodnot jejích nenulových prvků.)

Pro každou strukturální matici $\mathbf{A}$ nastává právě jedna z následujících možností:

($i$) polynom $\det(\mathbf{A})$ je nenulový, a při náhodné volbě nenulových prvků matice $\mathbf{A}$ je matice $\mathbf{A}$ regulární s pravděpodobností 1,

($ii$) polynom $\det(\mathbf{A})$ je nulový a matice $\mathbf{A}$ je singulární při každé volbě jejích nenulových prvků.

V prvním případě říkáme, že strukturální matice $\mathbf{A}$ je *genericky regulární*, ve druhém případě je $\mathbf{A}$ *genericky singulární*.

**Věta 3.5.** *Nechť* $\mathbf{A}$ *je čtvercová strukturální matice. Pak platí:*

$$\mathbf{A} \text{ je genericky regulární} \iff \vec{B}(\mathbf{A}) \text{ má perfektní párování.}$$

**Definice.** *Nechť* $\mathbf{A}$ *je strukturální matice. Největší přirozené číslo* $k$*, pro které v matici* $\mathbf{A}$ *existuje genericky regulární podmatice řádu* $k$*, se nazývá* generická hodnost *matice* $\mathbf{A}$ *a značí se gh(*$\mathbf{A}$*).*

**Definice.** *Počet hran největšího párování v bigrafu* $\vec{B}$ *se nazývá* párovací číslo *bigrafu* $\vec{B}$ *a značí se* $\nu(\vec{B})$*.*

**Věta 3.6.** *Nechť* $\mathbf{A}$ *je strukturální matice. Pak*

$$\mathrm{gh}(\mathbf{A}) = \nu(\vec{B}(\mathbf{A})).$$

Největší párování v bigrafu je možno najít v polynomiálním čase převodem na úlohu maximálního toku: bigrafu $\vec{B}$ s $U(\vec{B}) = U_1 \cup U_2$ přiřadíme síť $\vec{G}$ tak, že k $\vec{B}$ přidáme

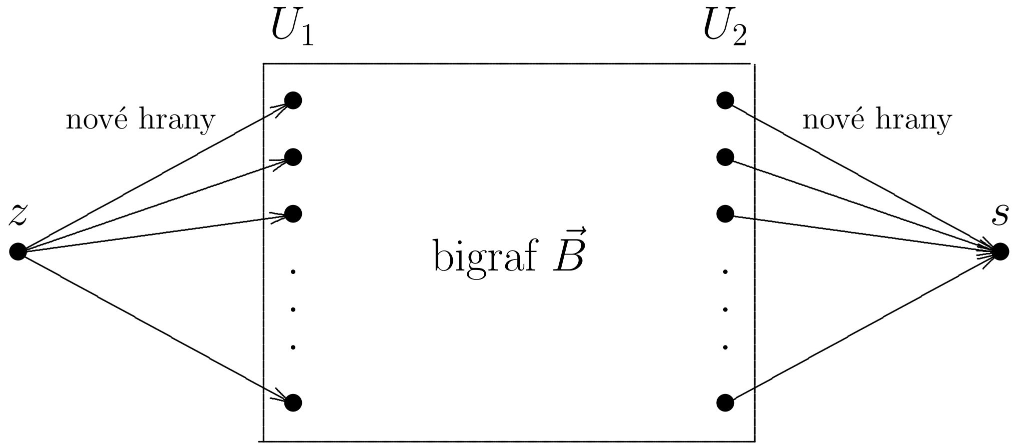
– nový uzel $z$ (zdroj),

– nový uzel $s$ (stok),

– hrany $(z, u)$ pro všechny uzly $u \in U_1$,

– hrany $(v, s)$ pro všechny uzly $v \in U_2$.

Propustnosti všech hran jsou rovny jedné.




Najdeme-li v $\vec{G}$ (celočíselný) maximální tok, pak hrany bigrafu $\vec{B}$ s nenulovým tokem určují největší párování v $\vec{B}$.