Síť s jedním zdrojem a jedním stokem

Síť $\vec{G}$ s jedním zdrojem z a jedním stokem s, nechť x je tok v $\vec{G}$.
Zdroj z má intenzitu $a \geq 0 \Rightarrow$ stok má intenzitu $-a$.
Číslo a se nazývá *velikost toku* x a značí se $|x|$.

Definice 2.5. *Tok x je* maximální tok v $\vec{G}$, *jestliže pro každý tok x' v $\vec{G}$ platí*

$$|x'| \leq |x|.$$

Definice 2.6. *Nechť $\vec{G}$ je síť s jedním zdrojem z a jedním stokem s, a nechť $(A, \bar{A})$ je řez sítě $\vec{G}$.*

Číslo $r(A, \bar{A})$ se nazývá *propustnost řezu* $(A, \bar{A})$.
Řekneme, že řez $(A, \bar{A})$ je *minimální řez sítě* $\vec{G}$, jestliže pro každý řez $(A', \bar{A}')$ sítě $\vec{G}$ platí

$$r(A, \bar{A}) \leq r(A', \bar{A}').$$

Jsou-li $u, v \in U(\vec{G})$ dva uzly $\vec{G}$, pak řekneme, že řez $(A, \bar{A})$ *odděluje uzly* u, v, jestliže $u \in A$ a $v \in \bar{A}$.

Tvrzení 2.2. *Nechť $\vec{G}$ je síť s jedním zdrojem z a jedním stokem s, nechť $(A, \bar{A})$ je řez sítě $\vec{G}$, oddělující z a s, a nechť x je tok v $\vec{G}$. Pak platí:*

(i) $|x| = x(A, \bar{A}) - x(\bar{A}, A)$,

(ii) $|x| \leq r(A, \bar{A})$.

Definice 2.7. *Nechť* $u, w \in U(\vec{G})$. Polocesta *z* u *do* w *je posloupnost* $u = v_0, h_1, v_1, h_2, \ldots, h_k, v_k = w$, *kde* v_i *jsou navzájem různé uzly,* h_i *jsou hrany a pro každé* $i = 1, \ldots, k$ *platí buď* $h_i = v_{i-1}v_i$ *(pak jde o* souhlasnou *hranu dané polocesty) nebo* $h_i = v_i v_{i-1}$ (nesouhlasná *hrana).*

Nechť x *je tok v síti* $\vec{G}$. Rezerva *polocesty* P *je nezáporné číslo*

$$\Theta(P) = \min\{\Theta_s(P), \Theta_n(P)\},$$

kde

$$\Theta_s(P) = \min\{r_{ij} - x_{ij} |\ (i,j) \text{ je souhlasná hrana } P\}$$

a

$$\Theta_n(P) = \min\{x_{ij} |\ (i,j) \text{ je nesouhlasná hrana } P\}.$$

Polocesta P *je* rezervní, *jestliže* $\Theta(P) > 0$.

Speciálně, triviální polocestu (s jediným uzlem) považujeme také za rezervní.

Tvrzení 2.3. *Nechť* $\vec{G}$ *je síť s jedním zdrojem* z *a jedním stokem* s, *a nechť* x *je tok v* $\vec{G}$. *Existuje-li v* $\vec{G}$ *rezervní polocesta ze* z *do* s *vzhledem k* x, *pak tok* x *není maximální.*

Věta 2.2 (Ford, Fulkerson). *Buď* $\vec{G}$ *síť s jedním zdrojem* z *a jedním stokem* s. *Velikost maximálního toku v* $\vec{G}$ *je rovna propustnosti minimálního řezu, oddělujícího* z *a* s.

Algoritmus 2.1 (Ford–Fulkersonův algoritmus)

1. Jako výchozí tok x zvolme nulový tok: $x_{ij} := 0$ pro každou hranu $(i, j) \in H(\vec{G})$.

2. Jestliže v grafu $\vec{G}$ existuje nějaká rezervní polocesta P ze z do s, upravme podél ní tok x:

$$x_{ij} := \begin{cases} x_{ij} + \Theta & \text{pokud } (i,j) \text{ je souhlasná hrana polocesty } P, \\ x_{ij} - \Theta & \text{pokud } (i,j) \text{ je nesouhlasná hrana polocesty } P, \\ x_{ij} & \text{pokud } (i,j) \text{ neleží na } P, \end{cases}$$

   a pokračujme bodem (2).

3. V případě, že rezervní polocesta ze z do s neexistuje, je tok x maximální.

Tvrzení 2.4. *Jsou-li v síti $\vec{G}$ propustnosti všech hran celá čísla, pak Ford–Fulkersonův algoritmus skončí po konečném počtu kroků.*

Edmonds–Karpův algoritmus.

Myšlenka: zvolíme vždy nejkratší rezervní polocestu ze z do s.

Jedna z iterací kroku (2): máme nějaký tok x a hledáme nejkratší rezervní polocestu ze z do s.

(a) T je strom na jediném uzlu z,
seznam uzlů L obsahuje jedinou položku z,
zdroj je *označený*,
všechny ostatní uzly sítě $\vec{G}$ jsou *neoznačené*.

(b) Je-li $L \neq \emptyset$, pak nechť v je první uzel seznamu L.

- Je-li $v = s$, algoritmus končí. Jednoznačně určená polocesta spojující z a s ve stromu T je hledaná nejkratší polocesta. Upravíme podél této polocesty tok x jako ve Ford–Fulkersonově algoritmu.
- Jinak označíme všechny neoznačené sousedy w uzlu v, pro něž (v, w) je nenasycená hrana nebo (w, v) je nenulová hrana, ve stromu T je připojíme hranami k v, a přidáme je na konec seznamu L. Vyřadíme uzel v ze seznamu L a pokračujeme bodem (b).

(c) Je-li $L = \emptyset$, pak rezervní polocesta ze z do s neexistuje a tok x je maximální.