Ohodnocené orientované grafy

Definice. *Buď $\vec{G}$ graf. Funkce $w : H(\vec{G}) \longrightarrow (0, \infty)$ se nazývá (hranové)* ohodnocení grafu $\vec{G}$*; graf se zadaným ohodnocením se nazývá* ohodnocený graf.

Definice. *Nechť $\vec{G}$ je orientovaný graf s ohodnocením w. Pro každou cestu $\vec{P} \subset \vec{G}$ definujeme w-*délku *$w(\vec{P})$ cesty $\vec{P}$ předpisem*

$$w(\vec{P}) = \sum_{h \in H(\vec{P})} w(h).$$

Nechť $u, v \in U(\vec{G})$. Pak

(i) *vzdáleností uzlů u, v v grafu $\vec{G}$ (značíme $d_{\vec{G}}(u, v)$) rozumíme nejmenší délku orientované cesty z uzlu u do uzlu v v grafu $\vec{G}$,*

(ii) w-vzdáleností uzlů u, v v grafu $\vec{G}$ *(značíme $d^w_{\vec{G}}(u, v)$) rozumíme nejmenší w-délku orientované cesty z uzlu u do uzlu v v grafu $\vec{G}$.*

Neexistuje-li v $\vec{G}$ cesta z u do v, klademe $d_{\vec{G}}(u, v) = d^w_{\vec{G}}(u, v) = \infty$.

Nechť $\vec{G}$ je ohodnocený graf. Uzly grafu $\vec{G}$ očíslujeme $1, \ldots, n$, a pro $1 \leq i, j \leq n$ položíme

$$w_{i,j} = \begin{cases} w((ij)) & \text{jestliže } (i,j) \in H(\vec{G}), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Matice $\mathbf{W}(\vec{G}) = [w_{ij}]_{i,j=1}^n$ se nazývá *vážená matice sousednosti* grafu $\vec{G}$.

Speciálně, neohodnocený graf považujeme za ohodnocený $w_{ij} = 1$.

Matice sousednosti grafu $\vec{G}$:

$\mathbf{A}(\vec{G}) = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$, kde $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } (i,j) \in H(\vec{G}), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$

Matice w-vzdáleností (w-distanční matice) grafu $\vec{G}$:

$\mathbf{D}^w(\vec{G}) = [d_{ij}^w]_{i,j=1}^n$, kde $d_{ij}^w = d_{\vec{G}}^w(i,j)$.

Distanční matice grafu $\vec{G}$:

$\mathbf{D}(\vec{G}) = [d_{ij}]_{i,j=1}^n$, kde $d_{ij} = d_{\vec{G}}(i,j)$.

Výpočet distanční matice $\mathbf{D}(\vec{G})$:

Věta. *Nechť $\vec{G}$ je orientovaný graf a $k \geq 0$. Prvek $a_{ij}^{(k)}$ matice $(\mathbf{A}(\vec{G}))^k$ je roven počtu sledů délky (přesně) k z uzlu i do uzlu j v $\vec{G}$.*

Důsledek. *Prvek d_{ij} matice $\mathbf{D}(\vec{G})$ je roven nejmenší mocnině k, pro kterou je prvek $a_{ij}^{(k)}$ matice $(\mathbf{A}(\vec{G}))^k$ nenulový.*

Výpočet w-distanční matice $\mathbf{D}^w(\vec{G})$:

Nechť $\vec{G}$ je ohodnocený orientovaný graf.
Definujeme matici $\mathbf{C}(\vec{G}) = [c_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ předpisem:

$$c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{jestliže } \ i = j, \\ \infty & \text{jestliže } \ i \neq j \text{ a } (i,j) \notin H(\vec{G}), \\ w_{ij} & \text{jestliže } \ i \neq j \text{ a } (i,j) \in H(\vec{G}). \end{cases}$$

(Matice $\mathbf{C}(\vec{G})$ se někdy nazývá *cenová matice* grafu $\vec{G}$).

Definujeme „nové“ operace:

$a \oplus b = \min\{a, b\}$,

$a \odot b = a + b$,

a k-tou mocninu matice $\mathbf{C}(\vec{G})$ při těchto operacích označíme $\mathbf{D}^{(k)}(\vec{G})$.

Věta. *Buď $\vec{G}$ ohodnocený orientovaný graf a r nejmenší číslo, pro něž platí $\mathbf{D}^{(r)}(\vec{G}) = \mathbf{D}^{(r+1)}(\vec{G})$. Pak $\mathbf{D}^{(r)}(\vec{G}) = \mathbf{D}^w(\vec{G})$.*

Algoritmus 3.1 (Floydův algoritmus)

1. Položíme $\mathbf{D}_0 = \mathbf{C}(\vec{G})$.
2. Pro $k = 1, \ldots, n$ postupně vypočítáváme matice $\mathbf{D}_k = [d_{ij}^k]_{i,j=1}^n$, kde
   $d_{ij}^k = \min\{d_{ij}^{k-1}, d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}\}$.
3. $\mathbf{D}_n = \mathbf{D}^w(\vec{G})$.

Poznámka: d_{ij}^k je minimální w-délka cesty z uzlu i do uzlu j množinou uzlů $\{1, \ldots, k\}$.

Věta 3.1. *Algoritmus 3.1 nalezne w-distanční matici $\mathbf{D}^w(\vec{G})$ grafu $\vec{G}$ v čase $O(n^3)$.*

Dijkstrův algoritmus (minimální cesta z uzlu u do uzlu v)

1. Uzlu u přiřaď trvalou hodnotu $\mathrm{th}(u) = 0$, ostatním uzlům dočasnou hodnotu $\mathrm{dh}(u) = \infty$.
2. Je-li x poslední uzel, jemuž byla přiřazena trvalá hodnota $\mathrm{th}(x)$, pak všem uzlům y, pro něž $(x, y) \in H(\vec{G})$ a které ještě nemají trvalou hodnotu, přiřaď novou dočasnou hodnotu $\mathrm{dh}(y) := \min\{\mathrm{dh}(y), \mathrm{th}(x) + w(x, y)\}$.
3. Pro uzel z s nejmenší dočasnou hodnotou polož $\mathrm{th}(z) := \mathrm{dh}(z)$.
4. Má uzel v trvalou hodnotu?
   - NE: vrať se na 2.,
   - ANO: $\mathrm{th}(v)$ je w-délka minimální cesty z u do v.

Poznámka: hrany (x, y), na nichž $w(x, y) = \mathrm{th}(y) - \mathrm{th}(x)$, určují minimální cestu z u do v.

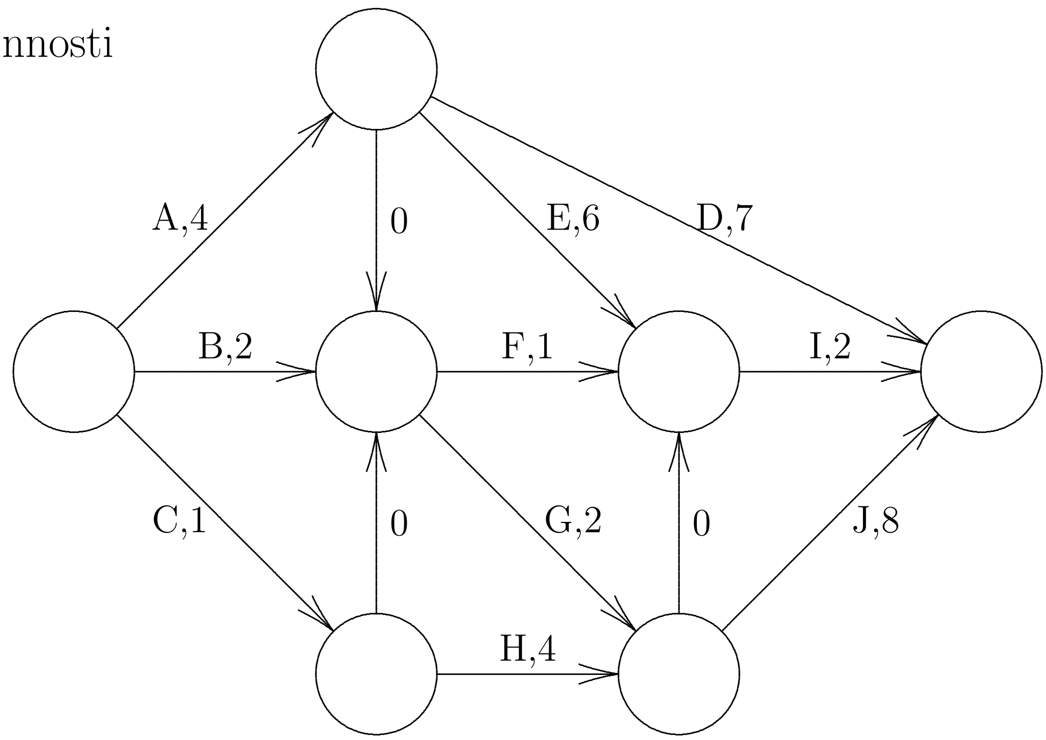
Definice. *Buď $\vec{G}$ acyklický ohodnocený orientovaný graf a $u, v \in U(\vec{G})$. Orientovaná cesta z u do v maximální w-délky se nazývá* kritická cesta *(z u do v v $\vec{G}$).*

Příklad.

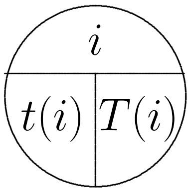
Činnost	Doba trvání	Bezprostředně podmiňující činnosti
A	4	–
B	2	–
C	1	–
D	7	A
E	6	A
F	1	A,B,C
G	2	A,B,C
H	4	C
I	2	E,F,G,H
J	8	G,H

Uzly – stavy

Hrany – činnosti



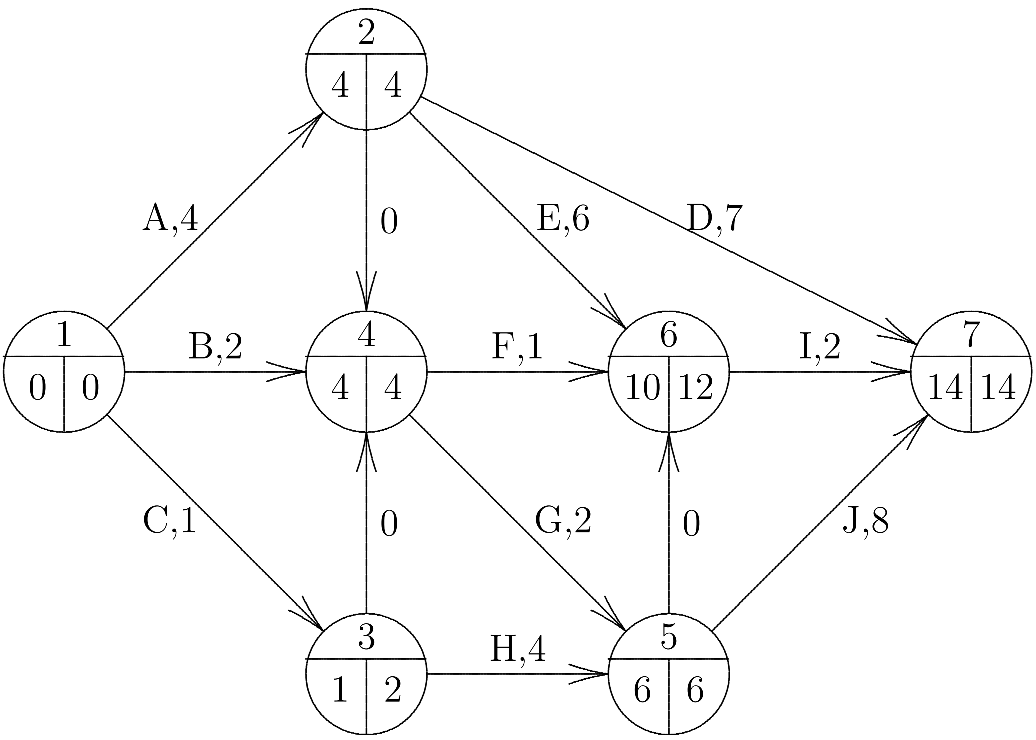
Uzly:



i: očíslování uzlů grafu podle věty o acyklických grafech (zároveň ověření acykličnosti)

$t(i)$: *minimální časové ohodnocení* – minimální doba, za kterou lze dosáhnout stavu i

$T(i)$: *maximální časové ohodnocení* – čas, kdy je nutno stav i opustit, aby nedošlo ke zpoždění projektu



Kritická cesta: 1, 2, 4, 5, 7

Kritické činnosti: A, G, J

Algoritmus (kritická cesta z u do v v $\vec{G}$)

1. Očísluj uzly grafu $\vec{G}$ podle věty o acyklických grafech.

2. Konstrukce minimálního časového ohodnocení $t(i)$:
   a) uzlu 1 (tj. u) přiřaď $t(1) = 0$,
   b) pro $i = 2, \ldots, n$ uzlu i přiřaď
   $t(i) = \max\{t(j) + w((j, i)) \mid (j, i) \in H(\vec{G})\}$,
   c) $t(n)$ je w-délka kritické cesty.

3. Konstrukce maximálního časového ohodnocení $T(i)$:
   a) uzlu n (tj. v) přiřaď $T(n) = t(n)$,
   b) pro $i = n - 1, \ldots, 1$ uzlu i přiřaď
   $T(i) = \min\{T(j) - w((i, j)) \mid (i, j) \in H(\vec{G})\}$.

4. Kritická cesta prochází těmi uzly i, pro něž $T(i) = t(i)$, a hranami (i, j), pro něž $w((i, j)) = t(j) - t(i)$.

2. Toky v sítích

Definice 2.1. Síť *je orientovaný graf* $\vec{G}$ *s ohodnocením hran* $r : H(\vec{G}) \longrightarrow (0, \infty)$ *a ohodnocením uzlů* $a : U(\vec{G}) \longrightarrow R$.

Značení: uzly $\vec{G}$ očíslujeme $1, \ldots, n$,
pro $i \in U(\vec{G})$ budeme $a(i)$ krátce značit a_i,
pro $(i,j) \in H(\vec{G})$ budeme $r((i,j))$ krátce značit r_{ij},
$i, j = 1, \ldots, n$.

Definice 2.2. *Buď* $\vec{G}$ *síť s ohodnocením uzlů* a_i *a s ohodnocením hran* r_{ij}. Tok *v síti* $\vec{G}$ *je nezáporné hranové ohodnocení* $x : H(\vec{G}) \longrightarrow \langle 0, \infty)$, *splňující následující podmínky:*

1. *pro každý uzel* $i \in U(\vec{G})$ *platí*

$$\sum_{j;(i,j)\in H(\vec{G})} x_{ij} \; - \sum_{j;(j,i)\in H(\vec{G})} x_{ji} = a_i \ ,$$

2. *pro každou hranu* $(i,j) \in H(\vec{G})$ *platí*

$$0 \le x_{ij} \le r_{ij} \ .$$

a_i: *intenzita* uzlu $i \in U(\vec{G})$
r_{ij}: *propustnost* hrany $(i,j) \in H(\vec{G})$

Uzel $i \in U(\vec{G})$ se nazývá

zdroj, je-li $a_i > 0$,

stok, je-li $a_i < 0$,

neutrální uzel, je-li $a_i = 0$.

Definice 2.4. *Nechť $\vec{G}$ je síť, $A \subset U(\vec{G})$ je množina uzlů, a položme $\bar{A} = U(\vec{G}) \setminus A$. Množina hran*

$$(A, \bar{A}) = \{(x, y) \mid x \in A, y \in \bar{A}\}$$

se nazývá řez *sítě $\vec{G}$.*

Označení.

Je-li $f : U(\vec{G}) \longrightarrow R$ funkce na $U(\vec{G})$, označíme $f(A) = \sum\limits_{i \in A} f_i$,
je-li $g : H(\vec{G}) \longrightarrow R$ funkce na $H(\vec{G})$, označíme $g(A, \bar{A}) = \sum\limits_{(i,j) \in (A, \bar{A})} g_{ij}$.

Tvrzení 2.1. *Nechť $\vec{G}$ je síť, x je tok v $\vec{G}$ a nechť $A \subset U(\vec{G})$ je množina uzlů $\vec{G}$. Pak platí*

$$a(A) = x(A, \bar{A}) - x(\bar{A}, A).$$

Věta 2.1. *V síti $\vec{G}$ existuje tok právě když $a(U(\vec{G})) = 0$ a pro každou množinu uzlů $A \subset U(\vec{G})$ je $a(A) \leq r(A, \bar{A})$.*