Definice. *Nechť G je graf, $u, v \in U(G)$.* Vzdáleností uzlů u, v v grafu G *(značíme $d_G(u, v)$) rozumíme nejmenší délku cesty z uzlu u do uzlu v v grafu G. Neexistuje-li v G cesta z u do v, klademe $d_G(u, v) = \infty$.*

Věta. *Nechť G je graf, $x, y, z \in U(G)$. Pak platí:*

(*i*) *$d_G(x, y)$ je celé číslo nebo ∞.*

(*ii*) $d_G(x, y) \geq 0$ a $d_G(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(*iii*) $d_G(x, y) = d_G(y, x)$,

(*iv*) $d_G(x, y) + d_G(y, z) \geq d_G(x, z)$,

(*v*) *je-li $d_G(x, z) > 1$, pak existuje uzel $y \in U(G)$ tak, že $x \neq y \neq z$ a $d_G(x, y) + d_G(y, z) = d_G(x, z)$.*

Definice. *Nechť G je graf s ohodnocením w. Pro každou cestu $P \subset G$ definujeme w-*délku *$w(P)$ cesty P předpisem*

$$w(P) = \sum_{h \in H(P)} w(h).$$

*Nechť $u, v \in U(G)$. Pak w-*vzdáleností uzlů u, v v grafu G *(značíme $d_G^w(u, v)$) rozumíme nejmenší w-délku cesty z uzlu u do uzlu v v grafu G. Neexistuje-li v G cesta z u do v, klademe $d_G(u, v) = \infty$.*

Pro $u, v \in U(G)$:

cesta z u do v v G nejmenší délky: *nejkratší cesta*

cesta z u do v v G nejmenší w-délky: *minimální cesta*

Funkce d_G^w má také vlastnosti metriky:

Věta. *Nechť G je graf s ohodnocením w a nechť $x, y, z \in U(G)$. Pak platí:*

(*i*) $d_G^w(x,y) \geq 0$ *a* $d_G^w(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(*ii*) $d_G^w(x,y) = d_G^w(y,x)$,

(*iii*) $d_G^w(x,y) + d_G^w(y,z) \geq d_G^w(x,z)$,

(*iv*) *je-li* $d_G(x,z) > 1$, *pak existuje uzel* $y \in U(G)$ *tak, že* $x \neq y \neq z$ *a* $d_G^w(x,y) + d_G^w(y,z) = d_G^w(x,z)$.

Příklad.

Graf G – železniční síť ČD

$\rho(x,y)$ – cena jízdenky z x do y (obyčejné jízdné 2. třída)

CENÍK OBYČEJNÉHO JÍZDNÉHO ČD

Vzdálenost (km)	Obyčejné jízdné 2. třída (Kč)
001 - 006	10,-
007 - 010	16,-
011 - 015	22,-
016 - 020	28,-

Plzeň hl. n. – Nezvěstice	16 km	28,- Kč
Plzeň hl. n. – Starý Plzenec	10 km	16,- Kč
Starý Plzenec – Nezvěstice	6 km	10,- Kč

Funkce $\rho(x,y)$ není metrika.

Příklad: převozník, koza, vlk, zelí.

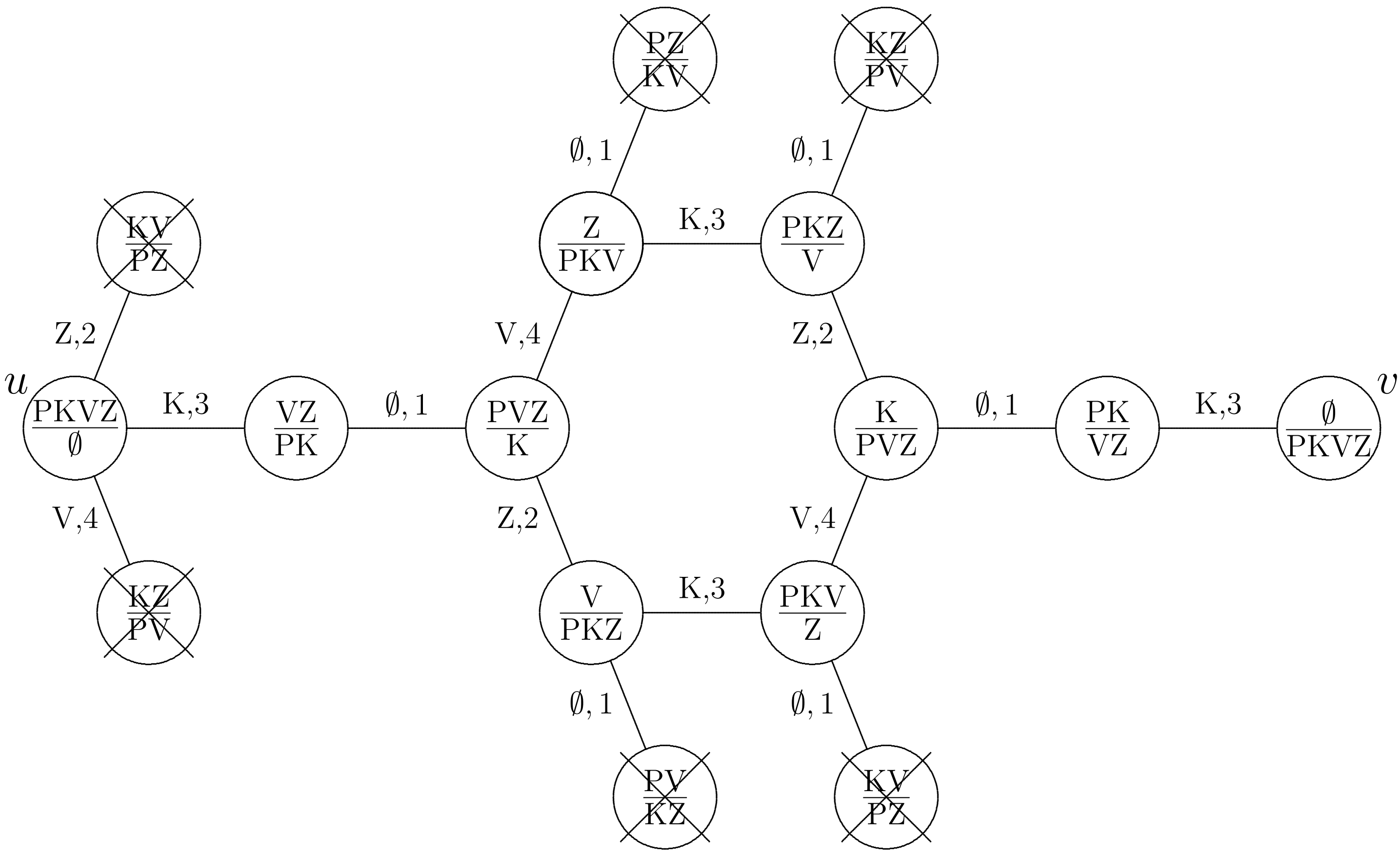
Převozník sám	1 hod.
Převozník se zelím	2 hod.
Převozník s kozou	3 hod.
Převozník s vlkem	4 hod.

Otázky:

(i) Lze převoz uskutečnit?

(ii) Jestliže ano, v jakém minimálním čase?

(iii) Kolik má úloha minimálních řešení?



Odpovědi:

(i) ANO.

(ii) 17 hodin.

(iii) 2 řešení.

Nechť G je ohodnocený graf. Uzly grafu G očíslujeme $1, \ldots, n$, a pro $1 \leq i, j \leq n$ položíme

$$d_{ij}^w = d_G^w(i, j).$$

Matice $\mathbf{D}^w(G) = [d_{ij}^w]_{i,j=1}^n$ se nazývá *matice w-vzdáleností (w-distanční matice)* grafu G.

Speciálně, neohodnocený graf považujeme za ohodnocený $w_{ij} = 1$.

Distanční matice: $\mathbf{D}(G) = [d_{ij}]_{i,j=1}^n$, kde $d_{ij} = d_G(i, j)$.

Definice. *Buď G graf, $m = |H(G)|$. Řekneme, že G je* eulerovský, *jestliže v G existuje uzavřený tah délky m.*

Věta. *Graf G je eulerovský právě když G je souvislý a všechny jeho uzly jsou sudého stupně.*

EUL
Vstup: graf G
Úkol: je graf G eulerovský?
Výstup: ANO / NE

Důsledek. *Úloha EUL je řešitelná v polynomiálním čase.*

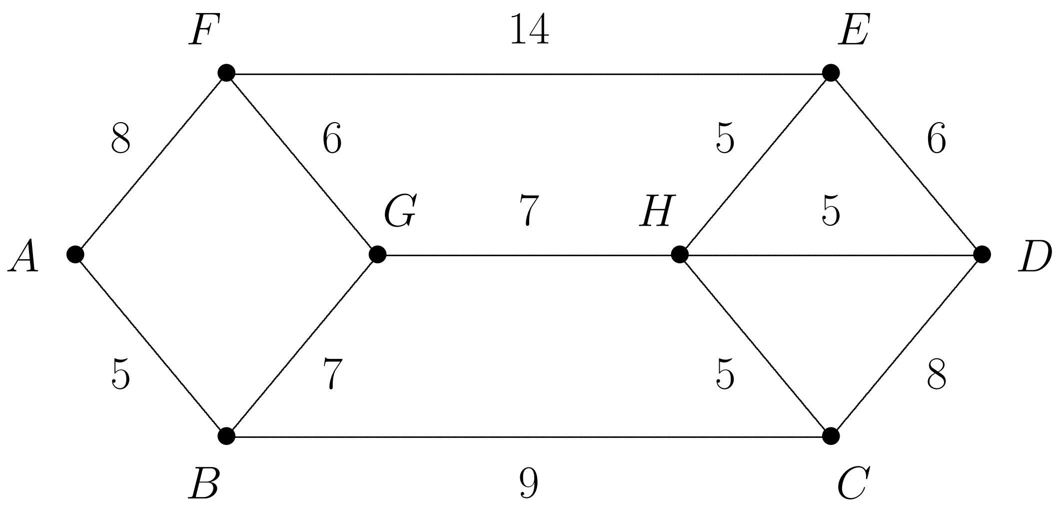
Definice. *Buď G graf, $n = |U(G)|$. Řekneme, že G je* hamiltonovský, *jestliže v G existuje kružnice délky n.*

Věta (Dirac). *Nechť G je graf s $n = |U(G)| \geq 3$ a*

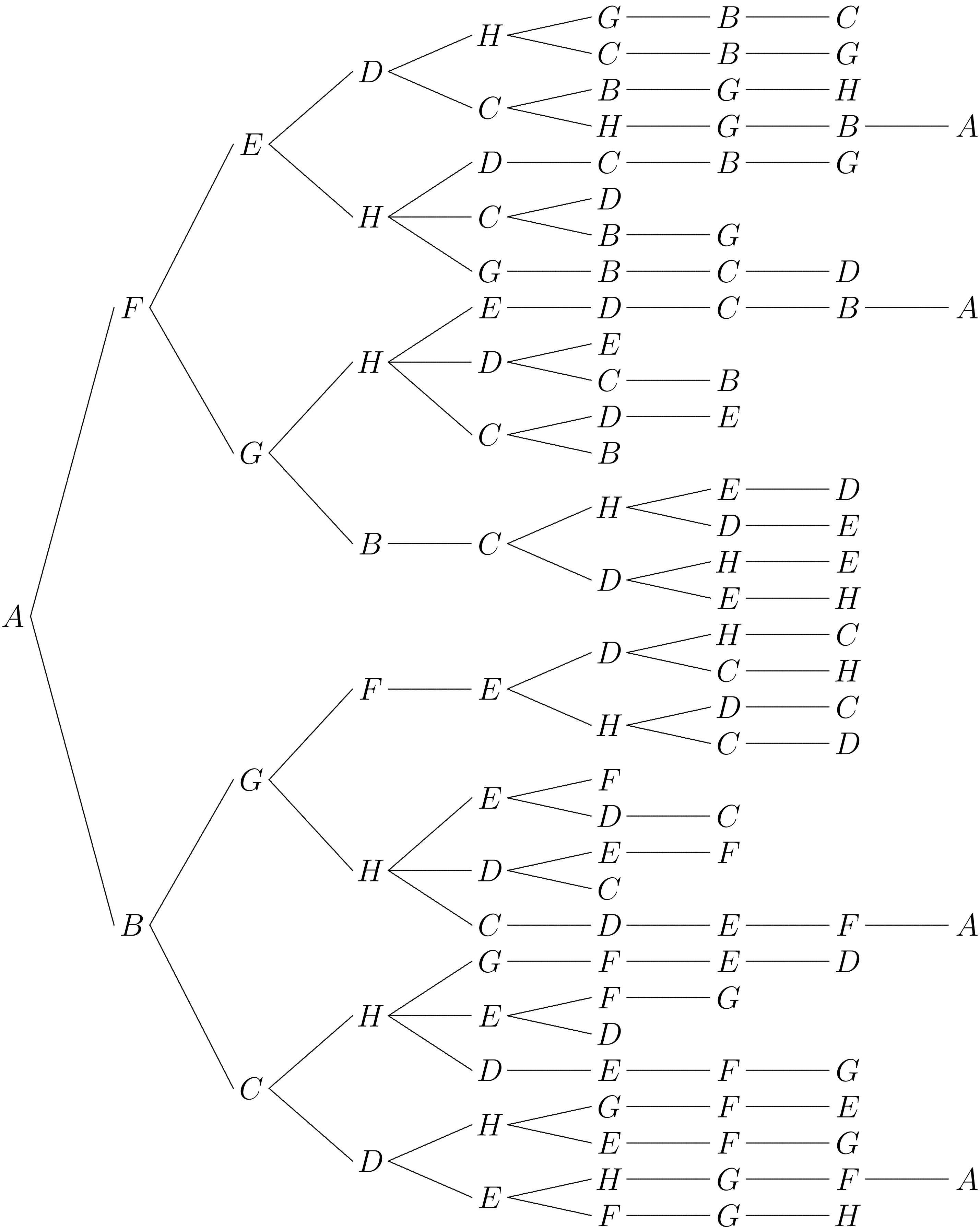
$$\delta(G) \geq \frac{n}{2}.$$

Pak je G hamiltonovský.

TSP (Problém obchodního cestujícího)
Vstup: ohodnocený graf G
Úkol: najít v G hamiltonovskou kružnici C s minimální hodnotou $\sum_{h \in H(C)} w(h)$.
Výstup: kružnice C



Rozhodovací strom



Čas potřebný ke zpracování vstupních dat velikosti n, jestliže je nutno provést $f(n)$ operací a provedení jedné operace trvá jednu mikrosekundu.

velikost vstupních dat n	počet operací $f(n)$				
	n^2	n^3	n^4	2^n	$n!$
20	0,4 ms	8 ms	0,2 s	1 s	77 000 let
40	1,6 ms	64 ms	2,6 s	12 dní	—
60	3,6 ms	0,2 s	13 s	36 600 let	—
80	6,4 ms	0,5 s	41 s	$3,6 \cdot 10^9$ let	—
100	10 ms	1 s	100 s	—	—
200	40 ms	8 s	27 min	—	—
500	0,25 s	125 s	17 hod	—	—
1000	1 s	17 min	12 dní	—	—

Předpokládáme, že jsme schopni daným algoritmem s časovou náročností $f(n)$ zpracovat v daném časovém limitu vstupní data velikosti $n = 100$ a ptáme se, jak se zvětší velikost úloh, které jsme schopni zpracovat ve stejném časovém limitu, jestliže zvýšíme rychlost výpočtu $10\times$, $100\times$, $1000\times$.

zrychlení výpočtu	počet operací $f(n)$				
	n^2	n^3	n^4	2^n	$n!$
$1\times$	100	100	100	100	100
$10\times$	316	215	177	103	100
$100\times$	1000	464	316	106	100
$1000\times$	3162	1000	562	109	101

Orientované grafy

Orientovaný úplný graf: $\vec{K}_n = (\langle 1, n\rangle, \langle 1, n\rangle \times \langle 1, n\rangle)$

Orientovaná cesta délky $n \geq 0$: $\vec{P}_n = (\langle 0, n\rangle, \{(i, i+1) |\ i \in \langle 0, n-1\rangle\})$

Cyklus délky $n \geq 1$: $\vec{C}_n = (\langle 1, n\rangle, \{(i, i+1) |\ i \in \langle 1, n-1\rangle\} \cup \{(n, 1)\})$ pro $n \geq 2$; pro $n = 1$ dodefinujeme $\vec{C}_1 = (\{1\}, \{(1, 1)\})$.

Definice. *Nechť* $\vec{G}$ *je orientovaný graf,* $u \in U(\vec{G})$.

Výstupní (polo)stupeň uzlu u v grafu $\vec{G}$ je číslo

$$d^-_{\vec{G}}(u) = |\{(u, x) |\ x \in U(\vec{G})\} \cap H(\vec{G})|.$$

Vstupní (polo)stupeň uzlu u v grafu $\vec{G}$ je číslo

$$d^+_{\vec{G}}(u) = |\{(x, u) |\ x \in U(\vec{G})\} \cap H(\vec{G})|.$$

Věta. *Pro každý orientovaný graf* $\vec{G}$ *platí*

$$\sum_{u \in U(\vec{G})} d^-_{\vec{G}}(u) = \sum_{u \in U(\vec{G})} d^+_{\vec{G}}(u) = |H(\vec{G})|.$$

Definice.

1. *Buď $\vec{G}$ graf, $u, v \in U(\vec{G})$, a nechť $f : \vec{P}_k \longrightarrow \vec{G}$ je homomorfismus takový, že $f(0) = u$ a $f(k) = v$. Pak se graf $f(\vec{P}_k)$ nazývá* orientovaný sled délky k z uzlu u do uzlu v v grafu $\vec{G}$.
2. *Je-li navíc f hranový monomorfismus, pak se $f(\vec{P}_k)$ nazývá* orientovaný tah *(délky k z u do v v $\vec{G}$).*
3. *Je-li navíc f uzlový monomorfismus, pak se $f(\vec{P}_k)$ nazývá* orientovaná cesta *(délky k z u do v v $\vec{G}$).*

Definice.

1. *Nechť $\vec{G}$ je graf a $f : \vec{C}_k \longrightarrow \vec{G}$ je homomorfismus. Pak se graf $f(\vec{C}_k)$ nazývá* uzavřený orientovaný sled délky k v grafu $\vec{G}$.
2. *Je-li navíc f hranový monomorfismus, pak se $f(\vec{C}_k)$ nazývá* uzavřený orientovaný tah *(délky k v $\vec{G}$).*
3. *Je-li navíc f uzlový monomorfismus, pak se $f(\vec{C}_k)$ nazývá* cyklus *(délky k v $\vec{G}$).*

Definice. *Řekneme, že orientovaný graf $\vec{G}$ je (slabě)* souvislý, *jestliže jeho symetrizace je souvislý neorientovaný graf.*

Definice. *Řekneme, že orientovaný graf $\vec{G}$ je* silně souvislý, *jestliže pro každou dvojici uzlů $u, v \in U(\vec{G})$ existuje v $\vec{G}$ orientovaný sled z u do v.*

Větička. *Graf $\vec{G}$ je silně souvislý právě když pro každé $u, v \in U(\vec{G})$ existuje v $\vec{G}$ orientovaná cesta z u do v.*

Věta. *Souvislý orientovaný graf $\vec{G}$ s alespoň 2 uzly je silně souvislý právě když každá jeho hrana leží v alespoň jednom cyklu.*

Definice. *Buď $\vec{G}' \subset \vec{G}$. Řekneme, že graf $\vec{G}'$ je* kvazikomponenta *(silná komponenta) grafu $\vec{G}$, jestliže*

1. $\vec{G}'$ je silně souvislý graf,

2. je-li $\vec{G}' \subset \vec{G}'' \subset \vec{G}$ a $\vec{G}''$ je silně souvislý, pak $\vec{G}' = \vec{G}''$.

(Tedy: kvazikomponenty grafu $\vec{G}$ jsou jeho maximální silně souvislé podgrafy.)

Definice. *Buď $\vec{G}$ graf. Řekneme, že $\vec{G}$ je* acyklický, *jestliže $\vec{G}$ neobsahuje jako podgraf žádný cyklus.*

Věta. *Je-li $\vec{G}$ acyklický a $\vec{G}' \subset \vec{G}$, pak $\vec{G}'$ je acyklický.*

Definice. *Uzel $u \in U(\vec{G}')$ se nazývá*

(i) *vstupní uzel grafu $\vec{G}'$, jestliže $d^+_{\vec{G}}(u) = 0$,*

(ii) *výstupní uzel grafu $\vec{G}'$, jestliže $d^-_{\vec{G}}(u) = 0$.*

Větička. *Každý acyklický graf má vstupní a výstupní uzel.*

Věta. *Buď $\vec{G}$ orientovaný graf a $n = |U(\vec{G})|$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\vec{G}$ je acyklický,

(ii) každý neprázdný podgraf grafu $\vec{G}$ má výstupní uzel,

(iii) každý neprázdný podgraf grafu $\vec{G}$ má vstupní uzel,

(iv) existuje takové očíslování uzlů grafu $\vec{G}$ čísly $1, \ldots, n$, že

$$(i, j) \in H(\vec{G}) \Rightarrow i < j.$$

ACYC

Vstup: graf $\vec{G}$

Úkol: je graf G acyklický?

Výstup: ANO / NE

Důsledek. *Úloha ACYC je řešitelná v polynomiálním čase.*

Definice. *Buď $\vec{G}$ orientovaný graf, $\vec{G}_1, \ldots, \vec{G}_k$ jeho kvazikomponenty. Orientovaný graf $\vec{G}_C$ s*

$$U(\vec{G}_C) = \{\vec{G}_1, \ldots, \vec{G}_k\}$$

a

$$H(\vec{G}_C) = \{(\vec{G}_i, \vec{G}_j) |\ i \neq j \text{ a existují } x \in U(\vec{G}_i) \text{ a } y \in U(\vec{G}_j) \text{ tak, že } (x, y) \in H(\vec{G})\}$$

se nazývá kondenzace *grafu $\vec{G}$.*

Věta. *Buď $\vec{G}$ orientovaný graf. Platí:*

(i) $\vec{G}_C$ je acyklický graf,

(ii) $\vec{G}$ je silně souvislý právě když $\vec{G}_C$ je graf s jediným uzlem,

(iii) $\vec{G}$ je acyklický graf právě když $\vec{G} = \vec{G}_C$.