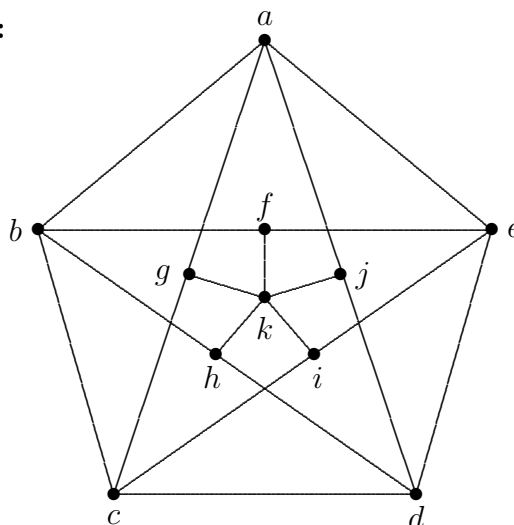


Barevnost 3

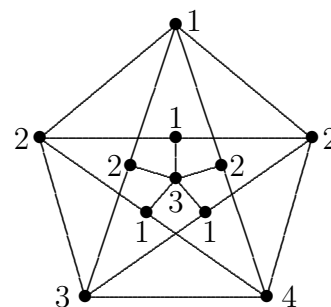
Určte chromatické číslo následujícího grafu:



Řešení.

Graf G má lichou kružnici, tudíž $\chi(G) \geq 3$. Snadno najdeme 4-obarvení (viz obrázek). Dokážeme, že neexistuje 3-obarvení.

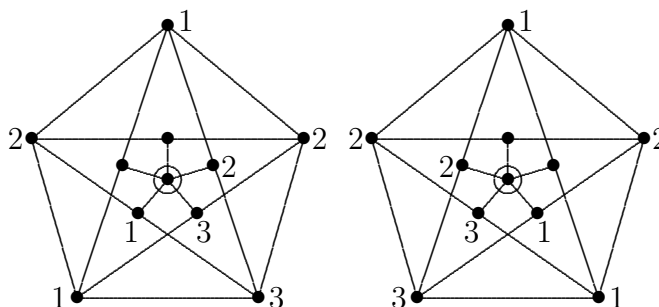
Bez újmy na obecnosti položme $\chi(a) = 1$ a $\chi(b) = 2$. Z $\chi(a) = 1$ plyne, že $\chi(e) = 2$ nebo $\chi(e) = 3$.



Případ 1: $\chi(e) = 2$. Pak $\{\chi(c), \chi(d)\} = \{1, 3\}$.

(i) Je-li $\chi(c) = 1$ a $\chi(d) = 3$, pak $\chi(h) = 1$, $\chi(i) = 3$ a $\chi(j) = 2$. Uzel k pak nelze obarvit žádnou z barev 1, 2, 3, což je spor.

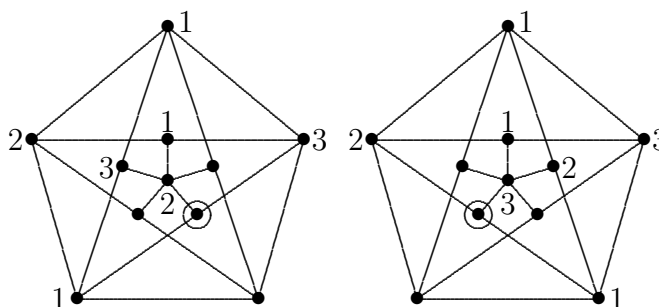
(ii) Případ $\chi(c) = 3$ a $\chi(d) = 1$ je symetrický.



Případ 2: $\chi(e) = 3$. Pak $\chi(f) = 1$, a $\chi(k) = 2$ nebo $\chi(k) = 3$.

(i) Je-li $\chi(k) = 2$, pak $\chi(g) = 3$, odkud $\chi(c) = 1$, a uzel i nelze obarvit žádnou z barev 1, 2, 3.

(ii) Je-li $\chi(k) = 3$, pak $\chi(j) = 2$, odkud $\chi(d) = 1$, a uzel h nelze obarvit žádnou z barev 1, 2, 3.



Graf G tedy není 3-obarvitelný a $\chi(G) = 4$.