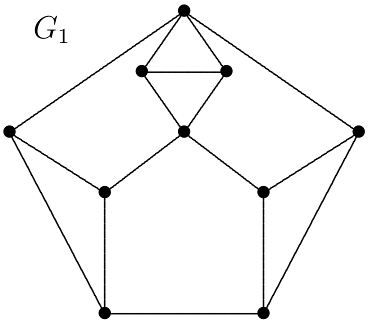
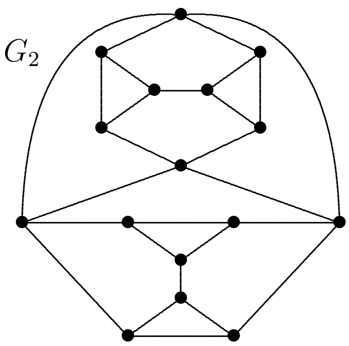
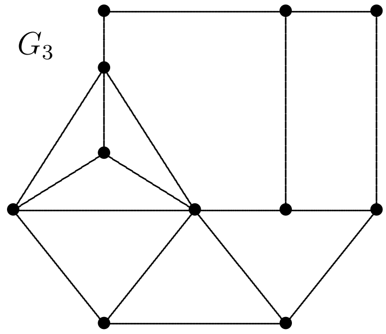
Barevnost 2

Určte chromatické číslo následujících grafů.

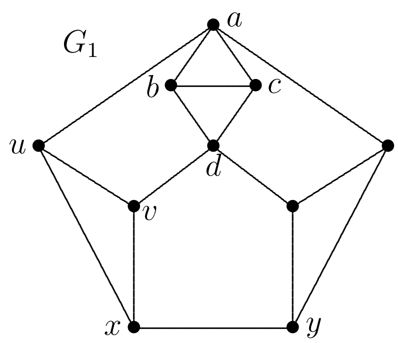




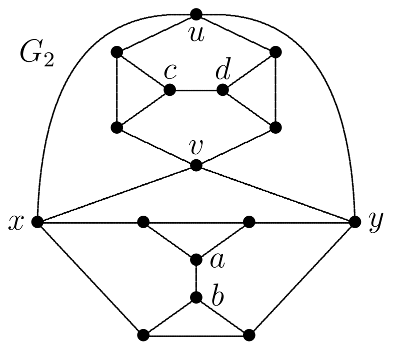


Řešení.

Zřejmě platí $3 \leq \chi(G_1) \leq 4$ ($\chi(G_1) \geq 3$ protože G_1 má lichou kružnici a $\chi(G_1) \leq 4$ protože G_1 je rovinný). Dokažte, že G_1 není 3-obarvitelný a tudíž $\chi(G_1) = 4$.
Návod: Při barvení 3 barvami mají a, b, c různé barvy, odkud $\chi(a) = \chi(d)$. Obdobně a, u a v mají různé barvy, tedy $\chi(a) = \chi(d) = \chi(x)$. Symetricky $\chi(a) = \chi(d) = \chi(y)$. Tedy $\chi(x) = \chi(y)$, což je spor na hraně xy.



Opět $3 \leq \chi(G_2) \leq 4$. Hledáme 3-obarvení. Kdyby x a y měly stejnou barvu (dejme tomu 1), tak by i $\chi(a) = \chi(b) = 1$, což je spor na hraně ab. Tedy $\chi(x) \neq \chi(y)$. Pak ale u, v mají stejnou barvu a dostáváme obdobný spor na hraně cd.
Graf G_2 tedy není 3-obarvitelný a $\chi(G_2) = 4$.



Máme $\chi(G_3) \leq 4$ protože G_3 je rovinný, a $\chi(G_3) \geq \omega(G_3) = 4$ protože G_3 obsahuje kliku velikosti 4. Tedy $\chi(G_3) = 4$.