KMA/TGD1

Teorie grafů, diskrétní optimalizace a výpočetní složitost 1

Zdeněk Ryjáček, KMA

UC 229

ryjacek@kma.zcu.cz

http://www.kma.zcu.cz/Ryjacek

15.45 – 18.15, s přestávkou 15 minut

Předpokládané znalosti: v rozsahu KMA/DMA Diskrétní matematika.

Skripta DMA:

- R. Čada, T. Kaiser, Z. Ryjáček: Diskrétní matematika. Skripta ZČU Plzeň, 2004.
- J. Holenda, Z. Ryjáček: Lineární algebra II - Úvod do diskrétní matematiky. Skripta ZČU Plzeň, 1995.

Literatura

- Základní: http://www.kma.zcu.cz/TGD1

  $\longrightarrow$ Nejsou to skripta, jen pomocný text k přednášce $\longleftarrow$
- Další literatura:
  - L. Kučera: Kombinatorické algoritmy. SNTL, Praha 1989.
  - J. Demel: Grafy a jejich aplikace. Academia, 2002.
  - J. Plesník: Grafové algoritmy. Veda, Bratislava, 1983.
  - Další jen v angličtině

Forma výuky

- Folie z přednášek budou průběžně na www stránce předmětu http://www.kma.zcu.cz/TGD1
- Cvičení
  - RNDr. Jakub Teska, PhD, teska@kma.zcu.cz
  - RNDr. Jan Ekstein, PhD, ekstein@kma.zcu.cz
- K samostatnému procvičování a „hraní“ jsou k disposici výukové programy (applety), odkaz ze stránky předmětu.

Zkouška

- Písemná - 3 příklady
- Ústní - 2 otázky

Dotazy?

Definice. Graf *je uspořádaná dvojice $G = (U, H)$, kde U je konečná neprázdná množina a $H \subset \binom{U}{2} \cup U^2$.*

Graf $G = (U, H)$ se nazývá
– neorientovaný graf, jestliže $H \subset \binom{U}{2}$,
– orientovaný graf, jestliže $H \subset U^2$.

Definice. *Buďte G a G' grafy. Zobrazení $f : U(G) \longrightarrow U(G')$ se nazývá* homomorfismus grafu G do grafu G', *jestliže*

$(x, y) \in H(G) \Rightarrow (f(x), f(y)) \in H(G')$, *a*

$\{x, y\} \in H(G) \Rightarrow \{f(x), f(y)\} \in H(G')$.

Značíme $f : G \longrightarrow G'$.

Definice. *Buďte G a G' grafy a $f : U(G) \longrightarrow U(G')$ zobrazení. Pak zobrazení $f^* : H(G) \longrightarrow H(G')$, definované vztahy*

$f^*(\{u, v\}) = \{f(u), f(v)\}$, *a*

$f^*((u, v)) = (f(u), f(v))$,

se nazývá zobrazení indukované zobrazením f.

Tedy: $f : U(G) \longrightarrow U(G')$ je homomorfismus právě když
$h \in H(G) \Rightarrow f^*(h) \in H(G')$.

Definice. *Buďte* G*,* G' *grafy,* $f : G \longrightarrow G'$ *homomorfismus. Pak řekneme, že* f *je*

uzlový monomorfismus, *je-li* f *prosté,*

uzlový epimorfismus, *je-li* f *na,*

hranový monomorfismus, *je-li* f^* *prosté,*

hranový epimorfismus, *je-li* f^* *na,*

monomorfismus, *je-li* f *i* f^* *prosté,*

epimorfismus, *je-li* f *i* f^* *na,*

isomorfismus, *je-li* f *i* f^* *prosté a na.*

Poznámky.

1. Ekvivalentně, $f : U(G) \longrightarrow U(G')$ je isomorfismus, jestliže f je prosté a na (bijekce), a platí

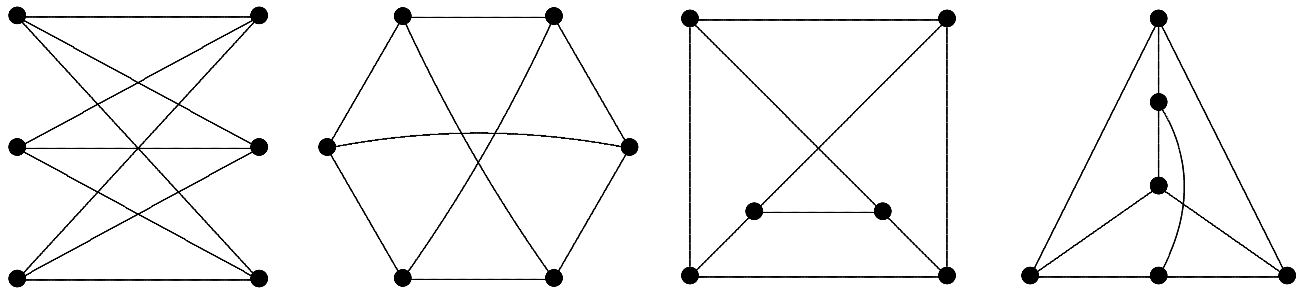
   $(x, y) \in H(G) \Longleftrightarrow (f(x), f(y)) \in H(G')$, a

   $\{x, y\} \in H(G) \Longleftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in H(G')$.

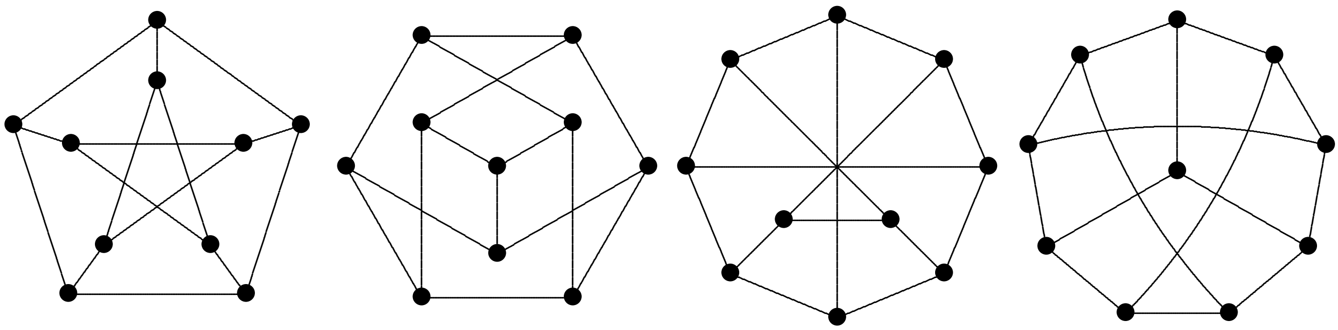
2. Značíme $G \simeq G'$.

3. Relace $\simeq$ je ekvivalence.

1. Které z těchto grafů jsou isomorfní?



2. Které z těchto grafů jsou isomorfní? (d. cv.)



Neorientované grafy

Úplný graf: $K_n = \left(\langle 1, n \rangle, \binom{\langle 1, n \rangle}{2} \right)$

Cesta délky $n \geq 0$: $P_n = (\langle 0, n \rangle, \{\{i, i+1\} \mid i \in \langle 0, n-1 \rangle\})$

Kružnice délky $n \geq 3$: $C_n = (\langle 1, n \rangle, \{\{i, i+1\} \mid i \in \langle 1, n-1 \rangle\} \cup \{\{1, n\}\})$

Úplný sudý (bipartitní) graf: $K_{U,U'} = (U \cup U', \{\{x, y\} \mid x \in U, y \in U'\})$
$(U \cap U' = \emptyset)$

Speciálně, $K_{p,q} = K_{\langle 1,p \rangle, \langle p+1, p+q \rangle}$.

Definice. Stupeň *uzlu u v grafu G je počet hran grafu G, které obsahují uzel u.*

Stupeň uzlu u v grafu G značíme $d_G(u)$.

Věta. *Pro každý graf G platí* $\sum_{u \in U(G)} d_G(u) = 2|H(G)|$.

Definice. *Nechť* $|U(G)| = n$. *Očíslujeme uzly grafu* G *tak, že* $d_G(x_1) \geq d_G(x_2) \geq \ldots \geq d_G(x_n)$. *Pak konečná nerostoucí posloupnost* $d_G(x_1), d_G(x_2), \ldots, d_G(x_n)$ *se nazývá* soubor stupňů *grafu* G.

Věta. *Nechť* $s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_n$, $n \geq 2$, *je posloupnost přirozených čísel. Pak je posloupnost* $s_1, s_2, \ldots, s_n$ *grafová, právě když je grafová posloupnost*

$$\underbrace{s_2 - 1, s_3 - 1, \ldots, s_{s_1+1} - 1,}_{s_1} s_{s_1+2}, \ldots, s_n.$$

Definice. *Buďte G_1, G grafy. Řekneme, že*

G_1 *je* podgrafem *grafu G, jestliže $U(G_1) \subset U(G)$ a $H(G_1) \subset H(G)$,*

G_1 *je* faktorem *grafu G, jestliže $U(G_1) = U(G)$ a $H(G_1) \subset H(G)$.*

Buď $X \subset U(G)$. Pak graf

$$G_1 = \left(X, H(G) \cap \tbinom{X}{2}\right)$$

se nazývá podgraf grafu G indukovaný na množině X.

Je-li G_1 podgrafem grafu G, značíme $G_1 \subset G$.

Definice. *Nechť $f : G_1 \longrightarrow G$ je homomorfismus. Pak podgraf $f(G_1) \subset G$, definovaný předpisem*

$$f(G_1) = (f(U(G_1)), f^*(H(G_1)))$$

se nazývá obraz grafu G_1 při homomorfismu f *(„homomorfní obraz“).*

Definice.

1. *Buď G graf, $u, v \in U(G)$, a nechť $f : P_k \longrightarrow G$ je homomorfismus takový, že $f(0) = u$ a $f(k) = v$. Pak se graf $f(P_k)$ nazývá* sled délky k z uzlu u do uzlu v v grafu G.
2. *Je-li navíc f hranový monomorfismus, pak se $f(P_k)$ nazývá* tah *(délky k z u do v v G).*
3. *Je-li navíc f uzlový monomorfismus, pak se $f(P_k)$ nazývá* cesta *(délky k z u do v v G).*

Definice. *Řekneme, že graf G je* souvislý, *jestliže pro každé $u, v \in U(G)$ existuje v G sled z u do v.*

Větička. *Graf G je souvislý, právě když pro každé $u, v \in U(G)$ existuje v G cesta z u do v.*

Definice. *Buď $G' \subset G$. Řekneme, že graf G' je* komponenta *grafu G, jestliže*

1. *G' je souvislý graf,*
2. *je-li $G' \subset G'' \subset G$ a G'' je souvislý, pak $G' = G''$.*

(Tedy: komponenty grafu G jsou jeho maximální souvislé podgrafy.)

Označení.

Minimální stupeň grafu: $\delta(G) = \min\{d_G(U)|\ u \in U(G)\}$

Maximální stupeň grafu: $\Delta(G) = \max\{d_G(U)|\ u \in U(G)\}$

Neřekneme-li jinak, pak vždy značíme $|U(G)| = n$ a $|H(G)| = m$.

Větička. *Je-li $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, pak je G souvislý.*

Tvrzení. *(Vlastnosti souvislých grafů)*
Nechť G je souvislý graf. Pak

1. *existuje uzel $u \in U(G)$ tak, že graf $G - u$ je souvislý,*
2. *$m \geq n - 1$.*

Definice.

1. *Buď* $f : C_k \longrightarrow G$ *homomorfismus. Pak se graf* $f(C_k)$ *nazývá* uzavřený sled v grafu G.
2. *Je-li navíc* f *hranový monomorfismus, pak se* $f(C_k)$ *nazývá* uzavřený tah v G.
3. *Je-li navíc* f *uzlový monomorfismus, pak se* $f(C_k)$ *nazývá* kružnice v G.

Číslo k *se nazývá* délka *(uzavřeného sledu, uzavřeného tahu, kružnice).*

Definice. *Souvislý graf, který neobsahuje jako podgraf žádnou kružnici, se nazývá* strom.

Věta. *Následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

1. *G je strom.*
2. *Pro každé $u, v \in U(G)$ existuje v G právě jedna cesta z u do v.*
3. *G je souvislý a $m = n - 1$.*
4. *G je souvislý a nemá žádný souvislý vlastní faktor.*

Definice. *Buď G souvislý graf. Graf $T \subset G$ se nazývá* kostra *grafu G, jestliže*

1. *T je strom,*
2. *T je faktor grafu G.*

Větička. *V každém souvislém grafu existuje alespoň jedna kostra.*

Ohodnocené grafy

Definice. *Buď* G *graf. Funkce* $w : H(G) \longrightarrow (0,\infty)$ *se nazývá (hranové)* ohodnocení grafu G*; graf se zadaným ohodnocením se nazývá* ohodnocený graf.

Nechť G je ohodnocený graf. Uzly grafu G očíslujeme $1,\ldots,n$, a pro $1 \leq i,j \leq n$ položíme

$$w_{ij} = \begin{cases} w(\{i,j\}) & \text{jestliže } \{i,j\} \in H(G), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Matice $\mathbf{W}(G) = [w_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ se nazývá *vážená matice sousednosti* grafu G.

Speciálně, neohodnocený graf považujeme za ohodnocený $w_{ij} = 1$.

Matice sousednosti: $\mathbf{A}(G) = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$, kde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } \{i,j\} \in H(G), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Matice incidence (uzlo-hranová) $\mathbf{I}(G)$: očíslujeme uzly $u_1,\ldots,u_n$ a hrany $h_1,\ldots,h_m$ a položíme $\mathbf{I}(G) = [b_{ij}]_{i,j=1}^{n,m}$, kde

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } u_i \in h_j\ , \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Věta. $\mathbf{I}(G)(\mathbf{I}(G))^T = \mathbf{A}(G) + \mathbf{S}(G)$

(kde $\mathbf{S}(G) = \mathit{diag}(d_G(u_1),\ldots,d_G(u_n))$*).*

Minimální kostra grafu

Věta. *Buď G souvislý ohodnocený graf a K jeho souvislý faktor, pro který číslo $\sum\limits_{\{i,j\}\in H(K)} w_{ij}$ nabývá minimální hodnotu. Pak K je kostra grafu G.*

Algoritmus 1.

1. *Polož $G_0 = G$, $i := 0$.*
2. *Existuje v G_i kružnice C_i?*

   - *Ano: v C_i najdi hranu h_i s maximálním ohodnocením,*
     polož $G_{i+1} = (U(G_i), H(G_i) \setminus \{h_i\})$,
     $i := i + 1$ a opakuj 2.
   - *Ne: G_i je hledaná minimální kostra.*

Algoritmus 2.

1. *Zvol $u \in U(G)$ a polož $G_0 = (\{u\}, \emptyset)$, $i := 0$.*
2. *Je G_i faktor grafu G?*

   - *Ne: mezi všemi hranami $\{x, y\}$, pro něž $x \in U(G_i)$ a $y \notin U(G_i)$*
     najdi tu, která má nejmenší ohodnocení,
     polož $G_{i+1} = (U(G_i) \cup \{y\}, H(G_i) \cup \{\{x, y\}\})$,
     $i := i + 1$ a opakuj 2.
   - *Ano: G_i je hledaná minimální kostra.*