POSBÍRANÉ PŘÍKLADY Z PRAVDĚPODOBNOSTI A STATISTIKY

v. 2004-09-03

Michal Friesl

Katedra matematiky
Fakulta aplikovaných věd
Západočeská univerzita v Plzni

Posbírané příklady z pravděpodobnosti a statistiky
verze 2004-09-03

Michal Friesl
http://home.zcu.cz/~friesl/
friesl@kma.zcu.cz

Tento materiál je umístěn na internetové adrese
http://home.zcu.cz/~friesl/Archiv/PosbPsa.pdf

Úvod

Tento materiál vznikl z příkladů, které jsem někdy použil při své výuce pravděpodobnosti a statistiky.

Část Příklady, členěná podle témat, obsahuje skoro 330 příkladů s výsledky a několika vzorci z teorie. Výsledky, mezivýsledky, náznaky postupu řešení, apod. jsou pak pro jednotlivé příklady uvedeny v části nazvané Řešení.

Název *Posbírané příklady* má vyjadřovat, že se jedná o příklady posbírané z různých zdrojů (z nichž ty hlavní jsou vyjmenovány jako literatura). Neměl by však navozovat představu sbírky příkladů a už vůbec ne sbírky řešených příkladů. Celý materiál je třeba chápat jako poznámky, jako záchytné body, které je nutno doplňovat dalšími podrobnostmi, komentáři, atd. Komu takový materiál nevyhovuje, nechť se do prohlížení vůbec nepouští, ostatní, doufám, naleznou alespoň něco z toho, co očekávají.

Verze 2004-09-03

Dokument vznikl v roce 2001 a stále je ve fázi vzniku, v roce 2004 přibylo několik příkladů a ubylo několik chyb. Další nalezené chyby, připomínky, náměty, či komentáře uvítám na emailové adrese friesl@kma.zcu.cz.

3. září 2004 *Michal Friesl*

A. Příklady

Příklady

1. Kombinatorika

Pojmy a jejich význam

Z teorie. ***Faktoriál***

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1, \quad n = 1, 2, \dots,$$
$$0! = 1.$$

Kombinační číslo. Pro $a \in \mathbf{R}$

$$\binom{a}{k} = \frac{a \cdot (a-1) \cdot \dots \cdot (a-k+1)}{k!}, \quad k = 1, 2, \dots,$$
$$\binom{a}{0} = 1.$$

Také $n! = \Gamma(n+1)$.

Pro celá $0 \leqq k \leqq n$ platí:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k},$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Při výpočtech je však dobré co nejvíce krátit:

$$\binom{100}{2} = \frac{100!}{2!98!} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \ldots 1}{(2 \cdot 1) \cdot (98 \cdot 97 \ldots 1)} = \frac{100 \cdot 99}{2} = 4\,950.$$

Variace k prvků z n je uspořádaná k-tice, v níž se žádný prvek neopakuje. Kolik jich je?

Na první místo můžeme dát n prvků, na druhé jen $n-1$, …, na k-té zbude $n-k+1$ prvků. Celkem tedy

$$V_k(n) = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Platí (umístíme 1. prvek)

$$V_k(n) = nV_{k-1}(n-1),$$

nebo (ty bez prvku $n+1$ a zařazení prvku $n+1$ na jedno z k míst)

$$V_k(n+1) = V_k(n) + kV_{k-1}(n).$$

Permutacemi n prvků rozumíme jejich různá uspořádání. Kolik jich je (kolika způsoby lze seřadit n-prvkovou množinu)?

Na první místo můžeme dát n prvků, na druhé pak jen $n-1, \ldots$, na n-té zbude jediný prvek. Celkem tedy

$$P(n) = n(n-1)\ldots 1 = n!$$

k členná ***kombinace*** z n prvkové množiny je její podmnožina o k prvcích. Kolik jich je?

Vezměme k-členné variace z n prvků. Vždy $k!$ variací obsahuje tytéž prvky, jen v jiném pořadí — reprezentují touž podmnožinu.

Tudíž k-prvkových podmnožin je $k!$-krát méně než variací

$$C_k(n) = \frac{V_k(n)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{k!} = \binom{n}{k}.$$

Snadno teď dokážeme vztahy kombinačních čísel.

1) k prvkových podmnožin je tolik, co $n-k$ prvkových (množina a její doplněk).

2) $k+1$ prvkové podmnožiny $n+1$ prvkové množiny buďto obsahují prvek 1 (k němu tedy k prvků z n) anebo ho neobsahují ($k+1$ prvků z n).

Variace s opakováním je uspořádaná k-tice z n prvků, v níž se prvky mohou opakovat. Kolik jich je?

Na první místo můžeme dát n prvků, na druhé opět n, ..., na k-té také n, celkem tedy

$$V'_k(n) = \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k \text{ krát}} = n^k.$$

Kolik má n-prvková množina podmnožin?

U každého prvku zaznamenáme, je-li, nebo není- li v podmnožině, máme tak uspořádanou k-tici z prvků 1,0, těch je

$$V_n^*(2) = 2^n.$$

Tedy bez binomické věty

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Permutace s opakováním je uspořádaná $k = k_1 + \cdots + k_n$-tice z n prvků, v níž se prvek i vyskytuje k_i-krát. Kolik jich je?

Přestaneme-li v $k!$ permutacích k prvků rozlišovat mezi k_i prvky, dostaneme $k_i!$-krát méně možností, tedy

$$P'_{k_1,\ldots,k_n} = \frac{k!}{k_1! \cdots k_n!}$$

Kombinace s opakováním je k-členná (neuspořádaná) skupinu z n prvků, které se v ní mohou opakovat. Kolik jich je?

Vybíráme k-člennou skupinu z předmětů n druhů. Reprezentujme ji (tj. kolik předmětů kterého druhu) posloupností teček a čárek: tečky značí předmět a čárka znamená, že následující tečky znázorňují předměty dalšího druhu. Posloupnost tedy začíná tečkou, pokud jsme vybrali aspoň jeden předmět 1. druhu, anebo čárkou, pokud žádný předmět 1. druhu vybrán nebyl. Podobně posloupnost končí tečkou, pokud jsme vybrali aspoň jeden předmět posledního, tj. n-tého druhu, anebo čárkou, pokud žádný předmět n-tého druhu vybrán nebyl.

Posloupnost tak obsahuje k teček (předmětů) a $n-1$ čárek (oddělujících jednotlivé druhy) a je určena např. polohami čárek, tj. vybráním $n-1$ míst z $k+(n-1)$ možných

$$C'_k(n) = C_{n-1}(n+k-1) = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Známe tak počet nezáporných celočíselných řešení rovnice

$$x_1 + \cdots + x_n = k$$

(máme dostat k jedniček jako součet jedniček n druhů).

1.1. Přehled výběru k-tic z n prvků.

	bez opakování	s opakováním
Variace (záleží na pořadí)	$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$	$V'_k(n) = n^k$
Permutace (záleží na pořadí)	$P(n) = n!$	$P'_{k_1,\dots,k_n} = \frac{k!}{k_1!\cdot\dots\cdot k_n!}$
Kombinace (nezáleží na pořadí)	$C_k(n) = \binom{n}{k}$	$C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k}$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.Teo)

Variace

1.1. Kolika způsoby může být mezi osm finalistů rozdělena zlatá, stříbrná a bronzová medaile?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.1)

K ŘEŠENÍ

1.2. Sestavujeme vlajku ze 3 vodorovných pruhů. K dispozici jsou bílý, červený, modrý, zelený a žlutý pruh látky. Kolik vlajek lze sestavit, kolik jich má modrý pruh, kolik nemá červený pruh uprostřed?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.2)

K ŘEŠENÍ

1.3. Určete počet všech nejvýše pěticiferných čísel, v nichž se žádná číslice neopakuje.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.3)

K ŘEŠENÍ

1.4. Ve výboru je 6 mužů a 4 ženy. Kolik je způsobů, jak zvolit předsedu, místopředsedu, jednatele a hospodáře? Co když předseda a místopředseda mají být opačného pohlaví?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.4)

K ŘEŠENÍ

1.5. Ve vlaku je kupé se 4 místy v každém směru jízdy. Z 8 cestujících 3 chtějí sedět ve směru jízdy, 2 proti, ostatním je to jedno. Kolika způsoby si mohou sednout, aby byli všichni spokojeni?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.5)

K ŘEŠENÍ

1.6. Kolika způsoby lze sestavit šestihodinový rozvrh na jeden den pro třídu, v níž se vyučuje 12 předmětům (každému nejvýše 1 hodinu denně)?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.6)

K ŘEŠENÍ

1.7. Určete počet všech nejvýše čtyřciferných čísel s různými číslicemi, která jsou sestavena z číslic 0, 2, 4, 6, 8.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.7)

K ŘEŠENÍ

Permutace

1.8. 8 přátel si v restauraci sedá ke „svému" stolu o 8 místech. Kolika způsoby se mohou posadit? Co když je stůl kulatý a za jedno rozesazení považujeme ta, kdy má každý stejného levého i pravého souseda?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.8)

K ŘEŠENÍ

1.9. S připomínkami k zákonu chce vystoupit 6 poslanců A, B, C, D, E, F. Určete počet všech pořadí jejich vystoupení. V kolika případech vystupuje A až po E, v kolik ihned po E?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.9)

K ŘEŠENÍ

1.10. Kolika způsoby si může při nástupu n táborníků stoupnout do řady, v níž A a B nestojí vedle sebe?

K ŘEŠENÍ

Verze 2004-09-03

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.10)

1.11. V pětimístné lavici sedí 5 studentů. Kolika způsoby si mohou sednout? Co když žák „A“ chce sedět na kraji? Co když „A“ a „B“ chtějí sedět vedle sebe?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.11)

K ŘEŠENÍ

1.12. Kolikrát lze přemístit slova ve verši „Sám svobody kdo hoden, svobodu zná vážiti každou“, nemají-li se promíchat slova věty hlavní a vedlejší?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.12)

K ŘEŠENÍ

1.13. Kolika způsoby může nastoupit m chlapců a n dívek do zástupu tak, aby a) nejdříve stály dívky a pak chlapci, b) mezi žádnými dvěma chlapci nestála dívka?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.13)

K ŘEŠENÍ

Kombinace

1.14. Test se skládá ze 2 dějepisných, 2 zeměpisných a 1 literární otázky. Připraveno je 30 dějepisných, 25 zeměpisných a 20 literárních otázek. Kolik variant testu lze vytvořit?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.14)

K ŘEŠENÍ

1.15. Na večírku je n lidí. Přiťukne-li si skleničkou každý s každým, kolik ťuknutí by mohlo být slyšet?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.15)

K ŘEŠENÍ

1.16. Kolika způsoby lze na šachovnici $8{\times}8$ vybrat a) trojici políček, b) neležících v témže sloupci, c) neležících v témže sloupci ani řadě?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.16)

K ŘEŠENÍ

1.17. Petr má 7 knih, o které se zajímá Ivana. Ivana má 10 knih, o které se zajímá Petr. Kolika způsoby si Petr může vyměnit své 2 knihy za dvě Ivaniny?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.17)

K ŘEŠENÍ

1.18. Kolika způsoby může m chlapců a n dívek vytvořit taneční pár?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.18)

K ŘEŠENÍ

1.19. Kolik je úhlopříček v konvexním n-úhelníku?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.19)

K ŘEŠENÍ

Variace s opakováním

1.20. Kolik SPZ existuje, jsou-li tvořeny 3 pismeny a 4 čísly (pismen je 28)?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.20)

K ŘEŠENÍ

1.21. Skupina 3 chlapců a 2 dívek hledá práci v 7 podnicích, přičemž ve 3 podnicích berou jen muže, ve 2 jen ženy a ve zbylých 2 každého. Kolika způsoby se skupina může do jednotlivých podniků rozejít?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.21)

K ŘEŠENÍ

1.22. Kolik je značek Morseovy abecedy (1–4 místné posloupnosti teček a čárek)?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.22)

1.23. Musí mít aspoň dva obyvatelé městečka o 1500 obyvatelích stejné iniciály (jméno a příjmení začínají jedním ze 32 písmen)?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.23)

1.24. Určete počet šesticiferných přirozených čísel, jejichž ciferný součet je sudý.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.24)

Permutace s opakováním

1.25. Kolik různých „slov“ lze vytvořit přeházením písmen ve slově „kombinatorika“?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.25)

1.26. Kolika způsoby lze přemístit písmena ve slově „abrakadabra“?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.26)

K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ

1.27. Kolika způsoby lze umístit všechny bílé šachové figurky a) do dvou pevně zvolených řad šachovnice, b) do libovolných dvou?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.27)

K ŘEŠENÍ

1.28. Kolika způsoby můžeme ze 7 kuliček (4 modrých, po 1 bílé, červené, zelené) vybrat a položit do řady 5?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.28)

K ŘEŠENÍ

Kombinace s opakováním

1.29. Kolika způsoby lze vybrat 4 karty ze sady 32, zajímají-li nás pouze a) barvy, b) hodnoty?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.29)

K ŘEŠENÍ

1.30. Klenotník má 3 rubíny, 2 smaragdy a 5 safírů. Kolika způsoby může sestavit prsten se 3 kameny?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.30)

K ŘEŠENÍ

1.31. Kolika způsoby lze vytáhnout 5 kuliček ze sáčku, který obsahuje a) 5 červených, 4 modré a 4 zelené, b) aspoň 5 od každé ze 3 barev?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.31)

1.32. Kolika způsoby lze z nabídky 4 druhů rybiček zakoupit 6 ryb, kupujeme-li je od každého druhu po párech?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.32)

1.33. Kolik je kvádrů s velikostmi hran rovnými přirozeným číslům ≤ 10? Kolik z nich jsou krychle?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.33)

1.34. Kolik je trojúhelníků s velikostmi stran z množiny $\{n+1, n+2, \dots, 2n\}$? Kolik jich je rovnoramenných a kolik rovnostranných?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.34)

Další

K ŘEŠENÍ
K ŘEŠENÍ
K ŘEŠENÍ
K ŘEŠENÍ

1.35. Kolik je pěticiferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu je každá z číslic 0, 1, 3, 4, 7? Kolik z nich je dělitelných šesti?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.35)

1.36. Kolik je nejvýše pěticiferných přirozených (tj. kladných celých) čísel?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.36)

1.37. Kolika způsoby se na startu může seřadit 8 automobilů do dvou řad po 4 autech? Co když nám jde jen o rozdělení do dvou řad?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.37)

1.38. Napíšeme pod sebe všechny permutace čísel 1, 2, 3, 4, 5. Jaký je součet 120 čísel v každém z 5 sloupců?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.38)

1.39. Na maturitním večírku je 15 hochů a 12 dívek. Kolika způsoby lze vybrat 4 taneční páry?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.39)

K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ

1.40. Kolika způsoby lze přemístit písmena ve slově „Mississippi"? Kolik takových slov nezačíná na „M"?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.40)

1.41. Kolika způsoby lze nakoupit 250g kávy, mají-li v samoobsluze 4 druhy po 50g? Co když od dvou druhů mají pouze po 4 balíčcích?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.41)

1.42. Kolika způsoby lze zaplatit a)6 Kč, b) $2n$ Kč pomocí padesátníků a jednokorun?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.42)

1.43. Kolika způsoby si mohou 3 osoby rozdělit 8 jablek?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.43)

1.44. Kolika způsoby lze všechny figurky šachové hry rozmístit na 64 políček šachovnice?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.44)

K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ

1.45. Kolika nulami končí číslo 258! ?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.45)

2. Klasická definice pravděpodobnosti

Z DEFINICE

Z teorie. ***Klasická definice pravděpodobnosti***: Nechť $\Omega \neq \emptyset$ je konečná množina *stejně pravděpodobných* výsledků pokusu. Potom **pravděpodobností** jevu $A \subset \Omega$ nazýváme číslo

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{počet případů příznivých jevu } A}{\text{počet všech případů}}.$$

Podobně poměr příznivých a všech případů můžeme vyjádřit podílem velikosti příznivé plochy a celkové plochy při geometrickém znázornění (***geometrická pravděpodobnost***).
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.Teo)

2.1. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne sudé číslo?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.1)

Verze 2004-09-03

K ŘEŠENÍ

2.2. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu 2 kostkami bude součet 8?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.2)

K ŘEŠENÍ

2.3. Dřevěnou, červeně natřenou krychli o straně 4 cm rozřežeme na jednotkové krychličky. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná krychlička a) má právě 2 červené stěny, b) nemá žádnou červenou stěnu?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.3)

K ŘEŠENÍ

2.4. Vojenskou kolonu tvoří 2 terénní vozy UAZ, 3 auta Praga V3S a 4 tatry 138. Jaká je pravděpodobnost, že při náhodném seřazení kolony pojedou stejná vozidla za sebou?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.4)

K ŘEŠENÍ

2.5. Máme 16 lahví minerálek: 10 Šaratic a 6 Mlýnských pramenů. Náhodně vybereme 3 lahve. Jaká je pravděpodobnost, že jsme vybrali 2 Šaratice a 1 Mlýnský pramen?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.5)

K ŘEŠENÍ

2.6. Ve třídě 20 chlapců a 12 dívek jsou losem určeni 2 mluvčí. Jaká je pravděpodobnost, že obě pohlaví budou zastoupena?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.6)

2.7. 40 studentů má být rozděleno na 4 stejně početné skupiny. Jaká je pravděpodobnost, že A a B budou ve stejné skupině?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.7)

2.8. V semifinále, do něhož postoupila družstva a, b, c, d, budou soupeři určeni losem. Jaká je pravděpodobnost, že se utkají a s b a c s d?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.8)

2.9. 8 družstev bude rozlosováno do dvou skupin po 4. Jaká je pravděpodobnost, že 2 nejsilnější družstva se ocitnou v téže skupině?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.9)

2.10. Jaká je pravděpodobnost, že slovem náhodně sestaveným z písmen A, A, A, E, I, K, M, M, T, T bude MATEMATIKA?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.10)

K ŘEŠENÍ
K ŘEŠENÍ
K ŘEŠENÍ
K ŘEŠENÍ
K ŘEŠENÍ

Verze 2004-09-03

2.11. Dva lidé si dali schůzku mezi 17 a 18 hod. Jaká je pravděpodobnost setkání, přicházejí-li nezávisle a náhodně během domluvené doby a čekají-li na druhého 15 minut?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.11)

2.12. Na úsečce délky ℓ náhodně zvolíme 2 body. Jaká je pravděpodobnost, že ze vzniklých 3 částí lze sestavit trojúhelník?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.12)

Vlastnosti

Z teorie. $\mathrm{P}(\emptyset) = 0, \quad \mathrm{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathrm{P}(A), \quad \mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B).$

Tudíž (*pouze*) pro A, B disjunktní je $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.
Zvlášť vztah pro pravděpodobnost doplňku lze často vhodně použít.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.Teo)

2.13. Jev A nastane, je-li dané číslo dělitelné 2, jev B, je-li dělitelné 3. Popište jev $C = A \cap B$ a dále jevy $A^c \cap C$, $A \cup C^c$ a $A^c \cup B^c$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.13)

K ŘEŠENÍ

2.14. Jaká je pravděpodobnost, že z n lidí některý dva slaví narozeniny ve stejný den ($n < 365$)?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.14)

K ŘEŠENÍ

2.15. Jaká je pravděpodobnost, že mezi 3 kartami, náhodně vytaženými z balíčku 32 karet, bude eso?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.15)

K ŘEŠENÍ

2.16. Jaká je pravděpodobnost, že 3 náhodně vybraná pole na šachovnici 8×8 nebudou ležet v témž sloupci?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.16)

K ŘEŠENÍ

2.17. Pomocí pravděpodobností jednotlivých jevů a jejich průniků vyjádřete $P(A \cup B \cup C)$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.17)

K ŘEŠENÍ

2.18. Z 10 studentů je losována tříčlenná komise. Jaká je pravděpodobnost, že A **nebo** B budou mezi vylosovanými?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.18)

K ŘEŠENÍ

2.19. V ruletě může padnout $1, \dots, 36$, nebo 0. Hráč vsadil na lichá čísla, na první tucet, a na „poslední číslici 2". S jakou pravděpodobností vyhraje aspoň jednu z těchto 3 sázek?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.19)

K ŘEŠENÍ

2.20. Hodíme 3 kostkami. S jakou pravděpodobností aspoň na jedné z nich padne šestka? S jakou pravděpodobností padnou jen sudá nebo jen lichá čísla nebo dosáhneme součtu 4? S jakou pravděpodobností padnou jen sudá nebo jen lichá čísla nebo dosáhneme součtu 6?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.20)

K ŘEŠENÍ

Nezávislost jevů

Z teorie.

Definice: Jevy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou ***nezávislé***, jestliže $\forall_{\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}\subset\{1,2,\ldots,n\}}$

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \cdots \cdot P(A_{i_k}).$$

Nezávislost *není* totéž co neslučitelnost (disjunktnost)!
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.Teo)

2.21. $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,5$, $P(A \cap B) = 0,2$. Jsou jevy A a B nezávislé? Jsou neslučitelné?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.21)

K ŘEŠENÍ

2.22. Dvakrát hodíme mincí. Označme jevy A_1, že v 1. hodu padne líc, A_2, že ve 2. hodu líc a A_3, že v obou hodech padne totéž. Jsou jevy A_1, A_2, A_3 nezávislé?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.22)

K ŘEŠENÍ

2.23. $\Omega = \{1, 2, \ldots, 12\}$. Jsou jevy $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 12\}$, $B = \{1, 5, 6, 9, 10, \ldots$ $C = \{1, 2, 3, 5\}$ nezávislé?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.23)

K ŘEŠENÍ

2.24. Z balíčku 32 mariášových karet náhodně vytáhneme jednu kartu. Jev A spočívá ve vytažení žaludové karty, jev B ve vytažení esa. Určete pravděpodobnosti jevů A,B a jestli jsou nezávislé.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.24)

K ŘEŠENÍ

2.25. V účtech je chyba. Jaká je pravděpodobnost, že aspoň jeden z nezávislých kontrolorů, nacházejících chybu s pravděpodobností 0,90 a 0,95, ji najde?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.25)

K ŘEŠENÍ

2.26. S jakou pravděpodobností fungují zařízení sestavená z nezávisle se chovajících součástek typu A (které pracují s pravděpodobností 0,9) a B (které pracují s pravděpodobností 0,8), jestliže jsou součástky zapojené a) AsB, b) (AsB)p(AsB), tj. zálohování celého zařízení, c) (ApA)s(BpB), tj. zálohování jednotlivých součástek, d) přidáme-li v b) můstek (spojující body mezi A a B na jednotlivých větvích) se součástkou C fungující s pravděpodobností p, e) může-li proud procházet C jen jedním směrem?

K ŘEŠENÍ

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.26)

2.27. Mohou být neslučitelné (disjunktní) jevy A a B nezávislé?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.27)

2.28. Hodíme dvakrát mincí, na níž padá rub (líc) s pravděpodobností $\frac{1}{2} + \varepsilon\ (\frac{1}{2} - \varepsilon)$, $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Jaká je pravděpodobnost, že oba hody dají týž výsledek?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.28)

Nezávislá opakování pokusu

Z teorie. Opakujeme-li nezávisle na sobě pokusy, jejichž výsledkem je buď „zdar" s pravděpodobností $p \in (0,1)$, anebo „nezdar" s pravděpodobností $q = 1 - p$ (***Bernoulliovo schéma***), potom

$$\mathrm{P}[\text{právě } k \text{ zdarů v } n \text{ pokusech}] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Je $\binom{n}{k}$ posloupností, v nichž je k zdarů a $n-k$ nezdarů, každá se vyskytne s pravděpodobností $p^k q^{n-k}$ (jednotlivé (ne-)zdary jsou nezávislé).
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.Teo)

2.29. Jaká je pravděpodobnost, že rodina se 4 dětmi má aspoň 3 chlapce?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.29)

K ŘEŠENÍ

2.30. Test obsahuje 10 otázek, každá se 4 možnými odpověďmi. Jaká je pravděpodobnost, že student odpoví správně aspoň na 5 otázek, jestliže odpovědi volí zcela náhodně?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.30)

K ŘEŠENÍ

2.31. U nemocného člověka odhalí test onemocnění s pravděpodobností 0,99. Podrobí-li se testu 30 nemocných, jaká je pravděpodobnost, že nám žádné onemocnění neunikne?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.31)

K ŘEŠENÍ

2.32. Firma dodává výrobky v sadách po 10 kusech. Je-li v sadě více než 1 vadný výrobek, sada se neúčtuje. Jestliže asi 2% výrobků jsou vadná, kolik asi procent sad nebude firma moci účtovat?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.32)

K ŘEŠENÍ

2.33. Pravděpodobnost zásahu terče při jednom výstřelu je 0,3. Kolikrát je třeba střelbu opakovat, aby pravděpodobnost (aspoň jednoho) zásahu byla aspoň 0,9?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.33)

K ŘEŠENÍ

Další

2.34. Pravděpodobnost, že v každém (žádném) ze dvou následujících dnů dojde (nedojde) k poruše, je 0,5 (0,3). Předpokládejme , že jevy porucha–bez poruchy a naopak mají stejnou pravděpodobnost. Jaká je pravděpodobnost, že během dne dojde k poruše?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.34)

K ŘEŠENÍ

2.35. Pravděpodobnost, že dvojčata budou chlapci (dívky) je 0,34 (0,30). Jaká je pravděpodobnost narození chlapce (dvojčata nejsou nezávislým opakováním narození dítěte!)?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.35)

K ŘEŠENÍ

2.36. Každý z n střelců si náhodně vybere jeden z $m \geqq n$ cílů. Jaká je pravděpodobnost, že budou střílet na různé cíle?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.36)

K ŘEŠENÍ

2.37. Odběratel přijme 50 kusovou dodávku, jestliže mezi 10 namátkou vybranými kusy není žádný vadný. Jaká je pravděpodobnost, že dodávka bude přijata, obsahuje-li a) 5, b) 10 vadných kusů?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.37)

K ŘEŠENÍ

2.38. Jaká je pravděpodobnost, že ve sportce vyhrajeme 5. pořadí (uhodneme 3 čísla z 6 losovaných)?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.38)

K ŘEŠENÍ

2.39. Student ovládá 45 otázek z 50. Jaká je pravděpodobnost, že 2 otázky, které obdrží u zkoušky, budou obě z těch, které ovládá?
(2004-09-03:1ad111ppx1cyaq.2.39)

K ŘEŠENÍ

2.40. Studenti u zkoušky losují 3 z 20 otázek. Jaká je pravděpodobnost, že dva studenti a) si vytáhnou tytéž 3 otázky, b) nedostanou ani jednu stejnou?
(2004-09-03:1ad111ppx1cyaq.2.40)

K ŘEŠENÍ

2.41. Ve třídě o 30 žácích jich 5 nemá domácí cvičení. Jaká je pravděpodobnost, že bude aspoň 1 odhalen, budou-li vyvoláni 4 žáci?
(2004-09-03:1ad111ppx1cyaq.2.41)

K ŘEŠENÍ

2.42. V osudí je 200 losů, z nichž 10 vyhrává. Jaká je pravděpodobnost, že získáme aspoň jednu výhru, koupíme-li a) 10, b) 20 losů?
(2004-09-03:1ad111ppx1cyaq.2.42)

K ŘEŠENÍ

2.43. Ze 30 žáků ve třídě jich je 70% připraveno. Budou zkoušeni 3 žáci. Jaká je pravděpodobnost, že aspoň 2 z nich budou připraveni?
(2004-09-03:1ad111ppx1cyaq.2.43)

K ŘEŠENÍ

2.44. Je pravděpodobnější hodit při 4 hodech jednou kostkou aspoň jednou 6, nebo při 24 hodech dvěma kostkami aspoň jednou 6,6?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.44)

K ŘEŠENÍ

2.45. r míčků spadne náhodně do n krabiček. Jaká je pravděpodobnost, že v i-té krabičce nebude žádný míček? Jaká je pravděpodobnost, že v i-té ani v j-té krabičce nebude žádný míček ($i \neq j$)?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.45)

K ŘEŠENÍ

2.46. n žen a n mužů si náhodně sedá ke kulatému stolu o $2n$ místech. Jaká je pravděpodobnost, že se muži a ženy pravidelně střídají?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.46)

K ŘEŠENÍ

2.47. Předpokládejme ještě, že jeden z mužů má mezi ženami k přítelkyň. Jaká je pravděpodobnost, že vpravo i vlevo od něj budou sedět jeho přítelkyně (když muži se stále budou střídat se ženami a když se střídat nemusí)?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.47)

K ŘEŠENÍ

2.48. V osudí je a černých a b bílých koulí. Jaká je pravděpodobnost, že bílou kouli vytáhneme poprvé až v k-tém tahu, $k = 1, \ldots, a+1$ (vytažené koule nevracíme)? K ŘEŠENÍ
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.48)

2.49. Na základě předchozího příkladu spočtěte, jaká je pravděpodobnost, že při zkoušení klíčů ze svazku o n klíčích přijde na řadu ten, který se do zámku hodí, jako k-tý. K ŘEŠENÍ
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.49)

2.50. Na vysoké škole propadá v 1. ročníku 15% studentů z matematiky, 10% z fyziky a 5% z obou předmětů. Jsou propadání z matematiky a z fyziky nezávislé? K ŘEŠENÍ
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.50)

2.51. V jedné tombole vyhrává každý pátý los, ve druhé každý desátý. Koupíme-li si po jednom losu od každé, jaká je pravděpodobnost, že aspoň jeden náš los vyhraje? K ŘEŠENÍ
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.51)

2.52. U výrobku se rozlišují dva druhy závad. Víme, že výrobek bude mít vyhovující rozměr s pravděpodobností 0,96 a vyhovující hmotnost s pravděpodobností 0,93, a dále, že některou ze závad má s pravděpodobností 0,09. Jsou závada v rozměru a v hmotnosti nezávislé? Jaká je pravděpodobnost, že výrobek nebude mít obě závady současně?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.52)

K ŘEŠENÍ

2.53. Výrobek má s pravděpodobností 0,10 (0,06, 0,03) vzhledovou (funkční, obě) vadu. Jsou vzhledová a funkční vada nezávislé?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.53)

K ŘEŠENÍ

2.54. V obvodu zapojeném $As(B_1 p B_2)$ nastávají poruchy u jednotlivých členů nezávisle, s pravděpodobnostmi 0,03, 0,2, 0,2. Jaká je pravděpodobnost přerušení obvodu?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.54)

K ŘEŠENÍ

2.55. Bloky A_1, A_2, A_3 fungují nezávisle na sobě s pravděpodobnostmi 0,95, 0,90, 0,85. Jaká je pravděpodobnost, že zařízení A_1p(A_2sA_3) funguje?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.55)

K ŘEŠENÍ

2.56. Zařízení se skládá z 10 stejných, nezávisle se chovajících prvků, fungujících aspoň 100 hodin s pravděpodobností 0,9. Jaká je pravděpodobnost, že zařízení funguje aspoň 100 hodin, stačí-li, aby fungovalo aspoň 8 prvků?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.56)

K ŘEŠENÍ

2.57. V kanceláři pracují 3 sekretářky přicházející do práce pozdě s pravděpodobnostmi 0,1, 0,2, 0,3. Jaká je pravděpodobnost, že a) aspoň jedna přijde včas, b) aspoň jedna se opozdí?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.57)

K ŘEŠENÍ

2.58. Kolik hodů mincí je třeba provést, aby pravděpodobnost, že padne aspoň jednou líc byla větší než a) 0,999, b) 0,99?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.58)

K ŘEŠENÍ

2.59. Jak velké musí být n, má-li pravděpodobnost, že šestka padne nejpozději v n-tém hodu, přesáhnout 1/2?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.59)

K ŘEŠENÍ

Náročnější

2.60. Házíme mincí a sledujeme, jestli padne dvakrát po sobě stejná strana. Jaká je pravděpodobnost, že se tak stalo už během 4 hodů?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.60)

K ŘEŠENÍ

2.61. Z 28 kostek domina (na každé kostce jsou dvě políčka s počtem teček v rozmezí $0, \ldots, 6$) náhodně dvě vytáhneme. S jakou pravděpodobností půjdou k sobě přiložit?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.61)

K ŘEŠENÍ

2.62. Postupně vyndaváme koule z urny se 3 bílými, 5 černými a 4 červenými koulemi. Jaká je pravděpodobnost, že červenou vytáhneme dříve než bílou?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.62)

K ŘEŠENÍ

2.63. Jsou dány dvě různé rovnoběžné přímky a, b. Na a je n různých bodů $A_1, \ldots, A_n$, na b m různých bodů $B_1, \ldots, B_m$. Jaká je pravděpodobnost, že 3 náhodně vybrané body tvoří trojúhelník?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.63)

K ŘEŠENÍ

2.64. Náhodně vybíráme 3 vrcholy z konvexního n-úhelníku. Jaká je pravděpodobnost, že takto vzniklý trojúhelník nemá s n-úhelníkem společnou stranu?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.64)

K ŘEŠENÍ

2.65. Po číselné ose se posuneme o jedničku vpravo, nebo vlevo, podle toho, zda nám na minci padne rub, nebo líc. Začínáme v 0. Jaká je pravděpodobnost, že po $2n$ krocích budeme v 0?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.65)

K ŘEŠENÍ

2.66. V 3-rozměrném prostoru se posunujeme o jedničku ve směru nebo proti směru jedné z os. Každý směr má pravděpodobnost 1/6. Začínáme v 0. Jaká je pravděpodobnost, že po $2n$ krocích budeme v 0?

K ŘEŠENÍ

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.66)

2.67. Nechť je n lidí. V čase 1 jeden z nich náhodně vybranému člověku předá zprávu. Vždy v dalším čase ten, kdo zprávu dostal ji předá někomu jinému, náhodně vybranému. Jaká je pravděpodobnost, že někdy v čase $1, \dots, r$ se zpráva dostane k někomu, kdo už ji zná? Jaká je pravděpodobnost, že někdy v čase $1, \dots, r$ se zpráva dostane k tomu, kdo ji původně vypustil?

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.67)

K ŘEŠENÍ

2.68. (Banachova úloha) Kuřák má v obou kapsách košile krabičku s n sirkami. Krabičku, ze které si vezme sirku si vybírá náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že v okamžiku, kdy poprvé narazí na prázdnou krabičku, je v té druhé právě k sirek?

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.68)

K ŘEŠENÍ

2.69. 40% žáků neumí. Z 200 žáků bylo vybráno 20 a zjistilo se, že prvních 5 umí. Jaká je pravděpodobnost, že také šestý vybraný bude umět?

K ŘEŠENÍ

Verze 2004-09-03

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.69)

2.70. Čísla $1, \ldots, n$ promícháme. Jaká je pravděpodobnost, že aspoň jedno číslo bude na svém místě? Najděte její limitu při $n \to \infty$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.70)

3. Podmíněná pravděpodobnost

Z DEFINICE

Z teorie. ***Podmíněná pravděpodobnost*** jevu A podmíněná jevem B:

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}, \quad \text{je-li } \mathrm{P}(B) > 0.$$

Platí: Podmíněná pravděpodobnost $\mathrm{P}_B(A) = \mathrm{P}(A \mid B)$ se chová jako pravděpodobnost.

Pro *nezávislé* jevy $A, B \neq \emptyset$ platí

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A)$$

(neboť

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)} = \mathrm{P}(A)).$$

Platí: Je-li $\mathrm{P}(B) > 0$, potom

$$\mathrm{P}[A \mid B] = \mathrm{P}(A) \iff A, B \text{ nezávislé.}$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.Teo)

3.1. Dvakrát hodíme kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že součet přesáhne 10, víme-li, že padla (aspoň jedna) šestka?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.1)

K ŘEŠENÍ

3.2. V populaci je 5% diabetiků; 2% populace jsou diabetici kuřáci. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně zvolený diabetik je kuřák?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.2)

K ŘEŠENÍ

3.3. V první zásuvce jsou 2 zlaté mince, ve druhé 1 zlatá a 1 stříbrná, ve třetí 2 stříbrné. Zvolíme náhodně zásuvku a vytáhneme minci. Jaká je pravděpodobnost, že v zásuvce zbude zlatá mince, jestliže jsme vytáhli stříbrnou?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.3)

K ŘEŠENÍ

3.4. Bez vracení taháme z urny s a černými a b bílými koulemi. Jaká je pravděpodobnost, že ve druhém tahu vytáhneme černou kouli, jestliže v prvním tahu jsme vytáhli kouli bílou?
(`2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.4`)

K ŘEŠENÍ

3.5. Předpokládejme, že při volbách na n míst má každý z N kandidátů stejnou šanci být zvolen. V_j nechť označuje, že kandidát „j“ byl zvolen. Jsou jevy $V_1, V_2, \dots V_N$ nezávislé? Jaká je $\mathrm{P}[V_k \mid V_j]$?
(`2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.5`)

K ŘEŠENÍ

3.6. V dostihu zvítězí kůň A (B) s pravděpodobností 0,5 (0,3). Kůň A ztratil na startu příliš a je jisté, že nezvítězí. Jaká je nyní pravděpodobnost, že zvítězí B?
(`2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.6`)

K ŘEŠENÍ

3.7. Šance závodníků A, B, C na vítězství jsou 0,4, 0,3, 0,2. Jestliže A odstoupil, jaká je nyní pravděpodobnost vítězství B a C?
(`2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.7`)

K ŘEŠENÍ

3.8. Za předpokladu $\mathrm{P}(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \neq 0$ zjednodušte výraz $\mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(A_2 \,|\, A_1) \cdot \mathrm{P}(A_3 \,|\, A_2 \cap A_1) \cdot \dots \cdot \mathrm{P}(A_n \,|\, A_{n-1} \cap \dots \cap A_1)$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.8)

K ŘEŠENÍ

Věta o celkové pravděpodobnosti

Z teorie. Pro *úplný disjunktní systém* $B_1, B_2, \dots$, $P(B_i) > 0\ \forall i$, $P(\bigcup_i B_i) = 1$ platí

$$\mathrm{P}(A) = \sum_i \mathrm{P}(A \,|\, B_i)\, \mathrm{P}(B_i).$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.Teo)

3.9. V první urně je 6 bílých a 2 černé koule, ve druhé jsou 4 bílé a 2 černé koule. Náhodně zvolíme urnu a vytáhneme jednu kouli. Jaká je pravděpodobnost, že bude bílá?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.9)

K ŘEŠENÍ

3.10. Elektronka s pravděpodobnostmi 0,4, 0,3, 0,3 náleží k jedné ze tří možných partií. Pravděpodobnosti, že elektronka odpracuje stanovený počet hodin, jsou u jednotlivých partií 0,8, 0,9, 0,8. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná elektronka odpracuje stanovený počet hodin?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.10)

K ŘEŠENÍ

3.11. Automat A vyrobí za směnu dvakrát více výrobků než automat B. Pravděpodobnost vzniku zmetku je u automatu A 0,02, u B 0,05. Po skončení směny se výrobky ukládají do jedné bedny. Jaká je pravděpodobnost, že výrobek náhodně vybraný z této bedny není zmetek?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.11)

K ŘEŠENÍ

3.12. K výstupní kontrole přicházejí výrobky, z nichž je 13 % zmetků. Výstupní kontrola propustí 1 % zmetků a vyřadí 2 % dobrých výrobků. Kolik procent výrobků kontrola vyřadí?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.12)

K ŘEŠENÍ

3.13. V osudí je b bílých a c černých koulí. Táhneme dvakrát bez vracení. Jaká je pravděpodobnost, že a) v prvním, b) ve druhém tahu bude tažena bílá koule?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.13)

K ŘEŠENÍ

3.14. Závod produkuje 5% zmetků se závadou A. Mezi nimi je 6%, které mají i závadu B. Mezi výrobky bez vady A je 2% výrobků se závadou B. Jaký je podíl závad B mezi všemi výrobky?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.14)

K ŘEŠENÍ

3.15. Mezi 20 střelci jsou 4 výborní, 10 dobrých a 6 průměrných s pravděpodobnostmi zásahu 0,9, 0,7 a 0,5. Jaká je pravděpodobnost, že dva náhodně vybraní střelci oba zasáhnou cíl?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.15)

K ŘEŠENÍ

Bayesova věta

Z teorie. Pro *úplný disjunktní systém* $B_1, B_2, \dots$, $P(B_i) > 0\ \forall i$, $P(\bigcup_i B_i) = 1$ platí

$$\mathrm{P}(B_k \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \mid B_k)\,\mathrm{P}(B_k)}{\sum_i \mathrm{P}(A \mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i)}$$

(dosazením dle definice podmíněné pravděpodobnosti).
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.Teo)

3.16. Jeden ze 3 střelců s pravděpodobnostmi zásahu 0,3, 0,5, 0,8 vystřelil a zasáhl. Jaká je pravděpodobnost, že střílel druhý střelec?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.16)

K ŘEŠENÍ

3.17. Tři střelci s pravděpodobnostmi zásahu 0,6, 0,5, 0,4 vystřelili (každý jednou) na cíl. Zjistilo se, že 2 zasáhli. Jaká je pravděpodobnost, že to byl 2. a 3.?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.17)

K ŘEŠENÍ

3.18. Mezi 20 střelci je 5 výborných, 9 dobrých a 6 průměrných. s pravděpodobností zásahu 0,9, 0,8 a 0,7. Náhodně vybraný střelec ze 2 ran trefil jednou. Jaká je pravděpodobnost, že šlo o výborného (dobrého, průměrného) střelce?
(2004-09-03.1ad11ppx1cyaq.3.18)

K ŘEŠENÍ

3.19. Detekční přístroj vadu materiálu odhalí s pravděpodobností 0,95, s pravděpodobností 0,01 označí bezvadný materiál jako vadný. Pravděpodobnost výskytu vady je 0,005. Přístroj ukazuje vadu. S jakou pravděpodobností je zkoušený materiál skutečně vadný?
(2004-09-03.1ad11ppx1cyaq.3.19)

K ŘEŠENÍ

3.20. Víme-li, že pravděpodobnost odhalení AIDS při testu je 0,999, že pravděpodobnost správného otestování zdravého jedince je 0,99 a že AIDS se vyskytuje u 0,006 lidí, jaká je pravděpodobnost, že člověk, u kterého byl test pozitivní, AIDS skutečně má?
(2004-09-03.1ad11ppx1cyaq.3.20)

K ŘEŠENÍ

3.21. Manžel nepřišel včas ze zaměstnání. Manželka ze zkušenosti ví, že s pravděpodobností 0,3 (resp. 0,6, 0,1) pracuje přesčas (resp. odpočívá v hospodě, zdržel se z jiné příčiny). Pravděpodobnosti, že manžel bude ve 20 hod. doma jsou, podle toho, kde se zdržel, 0,9, 0,2, 0,9. Manžel nakonec ve 20 hod. doma byl. Jaká je pravděpodobnost, že pracoval přesčas (resp. byl v hospodě, byl jinde)?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.21)

K ŘEŠENÍ

3.22. Mezi 6 puškami jsou pouze 2 zastřílené. Pravděpodobnost zásahu je u zastřílené 0,9, u nezastřílené 0,2. Náhodně vybranou puškou se podařilo cíl zasáhnout. Jaká je pravděpodobnost, že šlo o zastřílenou (nezastřílenou)?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.22)

K ŘEŠENÍ

3.23. Je vyslána zprávu složená z nul a jedniček. Vlivem rušení může dojít k chybě: pravděpodobnost přijetí 0 (resp. 1), byla-li skutečně vyslána, je 0,97 (resp. 0,8). Ve vyslané zprávě je 45% nul. Jaká je

pravděpodobnost, že přijatá 1 byla skutečně vyslána? Jaká je pravděpodobnost špatného příjmu?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.23)

K ŘEŠENÍ

3.24. Nevytáhne-li se letadlu podvozek, kontrolka se rozbliká s pravděpodobností 0,999, s pravděpodobností 0,005 však signalizuje závadu, i když vše proběhlo v pořádku. K selhání podvozku dochází s pravděpodobností 0,003. Jaká je pravděpodobnost, že blikající kontrolka představuje planý poplach?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.24)

K ŘEŠENÍ

Další

3.25. Pánové Dobrý a Zlý mají splácet úvěr. Pravděpodobnost, že Dobrý (resp. Zlý) svůj úvěr splatí, je 0,9 (resp. 0,1). Pravděpodobnost, že aspoň jeden úvěr bude splacen, je 0,95. Jaká je pravděpodobnost, že Zlý úvěr nesplatí, jestliže Dobrý už ho splatil? Je chování zmíněných pánů nezávislé?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.25)

K ŘEŠENÍ

3.26. Dílna v průměru vyrábí 95% bezvadných výrobků. 30% produkce pochází od pracovníka B, který odevzdává jen 90% bezvadných výrobků. Je-li výrobek z této dílny vadný, s jakou pravděpodobností pochází od B?
(2004-09-03.1a11ppx1cyaq.3.26)

K ŘEŠENÍ

3.27. Jen 60% výrobků je kvalitních. Proto se každý jednoduše testuje. Ví se, že podíl výrobků, které jsou nekvalitní a zároveň testováním projdou, je 0,1 a že testovací zařízení neukazuje závadu u 70% testovaných výrobků. Jaká je podmíněná pravděpodobnost, že výrobek, u něhož se při testu neprojevila závada, je skutečně kvalitní?
(2004-09-03.1a11ppx1cyaq.3.27)

K ŘEŠENÍ

3.28. Při narození dvojčat je pravděpodobnost stejného pohlaví dvakrát větší než opačného. Je-li první dvojče chlapec, jaká je pravděpodobnost, že i druhé bude chlapec? (Celkově pravděpodobnost narození chlapce je 0,51).
(2004-09-03.1a11ppx1cyaq.3.28)

K ŘEŠENÍ

3.29. Tři lovci, každý s pravděpodobností zásahu 0,4, současně vystřelili na vlka. S jakou pravděpodobností bude vlk zabit, je-li známo, že při 1 (2, 3) zásahu zemře s pravděpodobností 0,2 (0,5, 0,8)?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.29)

K ŘEŠENÍ

3.30. Na letadlo bylo čtyřikrát nezávisle na sobě vystřeleno s pravděpodobností zásahu 0,1. Jaká je pravděpodobnost, že letadlo bude vyřazeno, stačí-li k tomu 3 zásahy; při 2 se tak stane s pravděpodobností 0,8 a při 1 zásahu 0,6?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.30)

K ŘEŠENÍ

3.31. Na cíl míří 3 nezávislé výstřely s pravděpodobnostmi zásahu 0,1, 0,2, 0,3. Ke zničení cíle stačí 2 zásahy, při jednom dojde ke zničení s pravděpodobností 0,6. Jaká je pravděpodobnost zničení cíle?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.31)

K ŘEŠENÍ

3.32. Dívce dochází v náhodném pořadí n různě dobrých nabídek k sňatku. Dívka prvních $s-1$ nápadníků odmítne a vezme si prvního

takového, který bude lepší než těch prvních $s-1$. Jaká je pravděpodobnost, že si vybere nejlepšího? Jaká je pravděpodobnost, že se neprovdá?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.32)

K ŘEŠENÍ

3.33. $p_B = 5/6$ lidí pojištěných proti úrazu u pojišťovny jsou „běžní" lidé s pravděpodobností úrazu během roku $u_B = 0,06$. Zbylých $p_S = 1/6$ tvoří sportovci, u nichž je pravděpodobnost úrazu $u_S = 0,6$. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný pojištěnec bude mít během roku úraz, a jaká, že mezi takovými si vybereme nešťastníka, který bude mít úraz i v příštím roce? (U každého pojištěnce předpokládáme nezávislost výskytu úrazu v jednotlivých letech.)
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.33)

K ŘEŠENÍ

3.34. Omezme se na rodiny s dětmi. Předpokládejme, že v rodině s k dětmi je pravděpodobnost výskytu libovolné posloupnosti kluků a holek 2^{-k} (tj. narození kluka nebo holky nastává nezávisle s pravděpodobností 1/2) a že pravděpodobnosti výskytu 1, 2, 3 a 4 dětí

jsou 0,2, 0,6, 0,15 a 0,05. Máme-li informaci, že v rodině nemají holku, jaká je pravděpodobnost, že mají jen jedno dítě (kluka)?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.34)

4. Diskrétní náhodné veličiny

Z definice

Z teorie. ***Rozdělení*** Q náhodné veličiny $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B})$ je míra na $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$:

$$Q(B) = \mathrm{P}(X_{-1}(B)) = \mathrm{P}[X \in B], \quad B \in \mathcal{B}.$$

Distribuční funkce F rozdělení Q (náhodné veličiny X):

$$F(x) = Q((-\infty, x]) = \mathrm{P}[X \leqq x], \quad x \in \mathbf{R}$$

(zprava spojitá).

Střední hodnota náhodné veličiny X (jejího rozdělení):

$$\mathrm{E}\,X = \int_\Omega X(\omega)\,\mathrm{d}\,\mathrm{P}(\omega) = \int_{\mathbf{R}} x\,\mathrm{d}Q(x).$$

Rozptyl náhodné veličiny X (jejího rozdělení):

$\operatorname{var} X = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}\, X)^2 = \mathrm{E}\, X^2 - (\mathrm{E}\, X)^2.$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.Teo)

4.1. Při hodu mincí označme $\Omega = \{\mathrm{L}, \mathrm{R}\}$, tudíž $\mathrm{P}(\omega) = 1/2\ \forall_{\omega\in\Omega}$. Funkce X, Y nechť zobrazují množinu Ω do $\mathbf{R}$ takto:

$X(\mathrm{L}) = 1, \quad X(\mathrm{R}) = 0, \quad Y(\mathrm{L}) = 0, \quad Y(\mathrm{R}) = 1.$

Co můžeme říct o rozděleních náhodných veličin X a Y? Nakreslete distribuční funkci, určete střední hodnoty a rozptyly.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.1)

4.2. Vyjádřete 3. centrální moment pomocí necentrálních momentů.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.2)

4.3. Určete střední hodnotu a rozptyl veličiny s alternativním rozdělením s parametrem p.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.3)

4.4. Dva střelci (s pravděpodobnostmi zásahu p_1 a p_2) se střídají ve střelbě, dokud někdo nezasáhne. Určete rozdělení počtu výstřelů.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.4)

K ŘEŠENÍ

4.5. Lovec má 5 patron a pravděpodobnost zásahu 0,4. Střílí, dokud netrefí (a dokud má čím). Určete rozdělení, střední hodnotu a rozptyl počtu výstřelů.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.5)

K ŘEŠENÍ

4.6. Pro náhodnou veličinu X značme $p_k = \mathrm{P}[X = k] = p_k$, je $p_1 = 1/3$, $p_2 = 1/4$, $p_4 = 1/6$, $p_5 = 1/4$. Spočtěte její střední hodnotu, rozptyl a nakreslete graf distribuční funkce.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.6)

K ŘEŠENÍ

4.7. Pro náhodnou veličinu X je $\mathrm{P}[X = k] = p_k$, $p_{-2} = 1/4$, $p_{-1} = 1/6$, $p_0 = 1/6$, $p_1 = 1/6$, $p_2 = 1/4$. Spočtěte jeho střední hodnotu, rozptyl, šikmost, špičatost a nakreslete graf distribuční funkce.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.7)

K ŘEŠENÍ

4.8. Náhodně vybereme jedno z čísel $1, 2, \ldots, 10$. Náhodná veličina X nechť udává zbytek po vydělení tohoto čísla čtyřmi. Určete střední hodnotu a rozptyl X. Jsou jevy $[X = 2]$ a $[X \leq 3]$ nezávislé? Jaká je pravděpodobnost, že X je liché číslo?
(2004-09-03.1ad111ppx1cvaj.4.8)

K ŘEŠENÍ

4.9. Dvakrát nezávisle na sobě hodíme kostkou upravenou tak, že na 2 stranách má jedničku, na dalších 2 dvojku a na posledních 2 trojku. Náhodná veličina X nechť udává součet hodů. Určete střední hodnotu a rozptyl X. Určete $\mathrm{P}[X$ je sudé číslo$]$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cvaj.4.9)

K ŘEŠENÍ

4.10. Dvakrát nezávisle na sobě hodíme kostkou upravenou tak, že na 2 stranách má jedničku, na dalších 2 dvojku a na posledních 2 trojku. Náhodná veličina X nechť udává zbytek po vydělení součtu hodů třemi. Určete střední hodnotu a rozptyl X. Jsou jevy $[X = 0]$, $[X = 1]$ a $[X = 2]$ nezávislé?
(2004-09-03.1ad111ppx1cvaj.4.10)

K ŘEŠENÍ

4.11. Hráč vsadí na jedno z čísel 1, . . . , 6. Bankéř hodí 3 kostkami. Neobjeví-li se vsazené číslo, hráč prohrává sázku; objeví-li se, dostává ji zpět a k tomu ještě stejnou částku za každý výskyt jeho čísla. Jaký je střední zisk bankéře?

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.11)

K ŘEŠENÍ

4.12. Představují $P[X = k] = \frac{1}{k(k+1)}$, $k \in \mathbf{N}$, rozdělení pravděpodobnosti? Jak je to v tom případě s $\mathrm{E}\,X$?

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.12)

K ŘEŠENÍ

Binomické rozdělení

4.13. Při pokusu nastává úspěch s pravděpodobností p. Náhodná veličina X nechť udává počet úspěchů po n nezávislých opakováních takového pokusu. Určete její distribuční funkci, střední hodnotu, rozptyl. Jaké má rozdělení?

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.13)

K ŘEŠENÍ

4.14. Pětkrát hodíme mincí. Pomocí distribuční funkce některého rozdělení vyjádřete pravděpodobnost, že aspoň dvakrát padl líc.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyak4.14)

K ŘEŠENÍ

4.15. n-krát hodíme kostkou. Pomocí distribuční funkce některého rozdělení vyjádřete pravděpodobnost, že šestka padne aspoň jednou.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyak4.15)

K ŘEŠENÍ

4.16. Hodíme čtyřikrát mincí. Náhodná veličina X nechť udává, kolikrát padl líc. Určete její střední hodnotu a rozptyl. Jsou jevy $[X \leq 4]$, $[X \geq 0]$ nezávislé?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyak4.16)

K ŘEŠENÍ

4.17. Pravděpodobnost narození chlapce je 0,515. Určete takový počet dětí, aby pravděpodobnost, že mezi nimi bude aspoň jeden chlapec, byla větší než 0,99.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyak4.17)

K ŘEŠENÍ

4.18. Kolika kostkami je třeba házet, aby průměrný počet dvojek na 1 hod byl 6?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.18)

K ŘEŠENÍ

Hypergeometrické rozdělení

4.19. V rybníku je N kaprů. A jich vylovíme, označíme a pustíme zpátky. Po čase vylovíme n kaprů. Náhodná veličina X nechť označuje počet označených mezi nimi. Jaké má X rozdělení?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.19)

K ŘEŠENÍ

4.20. Z urny se 3 bílými a 5 černými koulemi jsou vytaženy 3 koule. Najděte rozdělení a střední hodnotu počtu černých koulí mezi vytaženými.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.20)

K ŘEŠENÍ

4.21. Mezi 50 výrobky v bedně je 6 zmetků. Je vybráno 5 výrobků. Najděte rozdělení a střední hodnotu počtu zmetků mezi vybranými.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.21)

K ŘEŠENÍ

4.22. V klobouku jsou 3 černé a 4 bílé koule. Pomocí distribuční funkce některého rozdělení vyjádřete pravděpodobnost, že při vytažení 3 koulí budou aspoň 2 černé.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.22)

K ŘEŠENÍ

Geometrické rozdělení

4.23. Házíme kostkou. X nechť označuje, kolik hodů předcházelo hození šestky. Jaké má X rozdělení?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.23)

K ŘEŠENÍ

4.24. Dva hráči střídavě házejí kostkou. Vyhrává ten, kdo první hodí šestku. Jaká je pravděpodobnost, že vyhraje ten, který začínal?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.24)

K ŘEŠENÍ

Poissonovo rozdělení

4.25. Určete střední hodnotu a rozptyl veličiny s Poissonovým rozdělením s parametrem λ.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.25)

K ŘEŠENÍ

4.26. Průměrný telefonní hovor trvá 1,5 min. Dochází-li průměrně k 600 hovorům za hodinu, jaká je pravděpodobnost, že se bude současně konat více než 30 hovorů?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.26)

K ŘEŠENÍ

4.27. Průměrný telefonní hovor trvá 1,5 min. Má-li ústředna 10 linek a dochází-li průměrně k 120 hovorům za hodinu, jaká je pravděpodobnost ztráty volání?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.27)

K ŘEŠENÍ

4.28. Průměrný telefonní hovor trvá 1,5 min. Kolik linek musí ústředna mít, dochází-li průměrně k 240 hovorům za hodinu a pravděpodobnost ztráty volání nemá překročit a) 0,01, b) 0,001?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.28)

K ŘEŠENÍ

4.29. V aparatuře dochází k výměnám 10 lamp za rok. Jaká je pravděpodobnost, že během 1000 hodin provozu dojde k vyřazení aparatury v důsledku poruchy lamp?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.29)

K ŘEŠENÍ

4.30. V práci zařízení dochází náhodně k výpadkům. Průměrně jsou 2 výpadky za 24 hodin. Za předpokladu, že možnost výpadku je v každém okamžiku stejná, jaká je pravděpodobnost, že a) v rámci 24 hodin k aspoň 1 výpadku dojde, b) za týden nebudou více než 3 výpadky?

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.30)

K ŘEŠENÍ

Aproximace

Z teorie. Lze používat ***aproximace rozdělení***

- hypergeometrického rozdělení $\mathrm{HG}(N, A, n)$ binomickým $\mathrm{Bi}(n, A/N)$, když $n/N < 0.1$, $A/N < 0.1$,
- binomického $\mathrm{Bi}(n, p)$ Poissonovým $\mathrm{Po}(np)$, když $n > 30$ a $p < 0.1$.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.Teo)

4.31. Mezi 15 000 výrobky je 300 zmetků. Náhodně vybereme 100 výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že vadné budou nejvýše 2?

K ŘEŠENÍ

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.31)

4.32. Ve „sportce" taháme 6 čísel z 49. Sázíme 6 čísel. Jaká je pravděpodobnost, že jsme uhodli právě 4 čísla?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.32)

4.33. Závod vyrábí v průměru 99,8% kvalitních výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že mezi 500 vybranými budou více než 3 zmetky?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.33)

4.34. Je-li 1% leváků, jaká je pravděpodobnost, že mezi 200 lidmi budou a) právě 4, b) aspoň 4 leváci?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.34)

Další

4.35. Hodíme kostkou. Náhodná veličina X nechť udává hozené číslo zmenšené o 6. Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl X. Jsou jevy $[X \leq -4]$ a $[-4 \leq X \leq -2]$ nezávislé?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.35)

K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ

4.36. Z 10 výrobků, mezi nimiž jsou 3 vadné, postupně vybereme 2 výrobky. Veličina X nechť udává počet vadných (mezi vybranými). Určete pravděpodobnostní funkci veličiny X, jestliže vybraný výrobek a) vracíme zpět, b) nevracíme zpět.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.36)

K ŘEŠENÍ

4.37. Dva střelci (s pravděpodobnostmi zásahu $0,5$ a $0,6$) nezávisle každý dvakrát vystřelí. Najděte rozdělení, střední hodnotu a rozptyl celkového počtu zásahů.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.37)

K ŘEŠENÍ

4.38. Dva střelci (s pravděpodobnostmi zásahu $0,4$ a $0,5$) nezávisle každý dvakrát vystřelí. Najděte rozdělení, střední hodnotu a rozptyl rozdílu počtů zásahů prvního a druhého střelce.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.38)

K ŘEŠENÍ

4.39. Pracovník obsluhuje n strojů stojících v řadě po a metrech. Po skončení práce na jednom se přesune k tomu stroji, který hlásil

Verze 2004-09-03

problém jako první. Pravděpodobnost problému u všech strojů je stejná. Najděte průměrnou délku přesunu pracovníka.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.39)

4.40. Z n klíčů se jen 1 hodí do zámku. Klíče postupně náhodně zkoušíme. Najděte střední hodnotu a rozptyl veličiny udávající, jako kolikátý přijde na řadu správný klíč.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.40)

5. Spojité náhodné veličiny

Z definice

Z teorie. Distribuční funkce $F(x) = \mathrm{P}[X \le x]$ je *absolutně spojitá*, tj. existuje funkce $f(x)$ (***hustota***) splňující

$$F(x) = \int_{\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Naopak $f(x) = F'(x)$.

Tudíž

$$\mathrm{E}\,g(X) = \int g(x) f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{P}[X \in A] = \int_A f(x)\,\mathrm{d}x$$

(a tedy $\mathrm{P}[X = x] = 0$), p–kvantil

$$u_p = \inf\{x, F(x) \geqq p\} = F_{-1}(p).$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.Teo)

5.1. Napište distribuční funkci rozdělení daného hustotou $f(x) = x/2$ na $(0,1)$, $1/2$ na $(1,2)$, $(3-x)/2$ na $(2,3)$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.1)

K ŘEŠENÍ

5.2. Rozdělení náhodné veličiny X je dáno hustotou $f(x) = 2x+2$, na $(-1,0)$ a nulovou jinde. Najděte $\mathrm{P}[-2 \leqq X \leqq -0,5]$, $\mathrm{P}[-2 \leqq X \leqq -1]$ a $\mathrm{E}\,X$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.2)

K ŘEŠENÍ

5.3. Náhodná veličina X má distribuční funkci $x^2/4$ na $(0,2)$, nulovou pro $x<0$ a jednotkovou pro $x>2$. Najděte její hustotu, modus, medián, střední hodnotu a $\mathrm{P}[0,5 < X < 1,5]$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.3)

K ŘEŠENÍ

5.4. Najděte medián, horní kvartil a 10 % kvantil rozdělení určeného hustotou $f(x) = 1 - x/2$, $x \in (0, 2)$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.4)

K ŘEŠENÍ

5.5. Náhodná veličina má hustotu $f(x) = ae^{-|x|}$ na $\mathbf{R}$ (Laplace). Určete a, střední hodnotu a rozptyl.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.5)

K ŘEŠENÍ

5.6. Náhodná veličina X má hustotu $f(x) = \frac{a}{1+x^2}$ na $\mathbf{R}$ (Cauchy). Určete a, distribuční funkci, $\mathrm{P}[X > \sqrt{3}]$, střední hodnotu, modus a medián.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.6)

K ŘEŠENÍ

5.7. Náhodná veličina X má hustotu $f(x) = ax^2$ na $[0, 2]$ a 0 jinde. Určete a, a pravděpodobnost, že X se od své střední hodnoty neliší o více než 0,5.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.7)

K ŘEŠENÍ

5.8. Najděte distribuční funkci vzdálenosti náhodně zvoleného bodu v kruhu o poloměru R od jeho středu.
(2004-09-03:1ad111ppx1cyaq.5.8)

K ŘEŠENÍ

5.9. Najděte hustotu, distribuční funkci, střední hodnotu a rozptyl vzdálenosti náhodně zvoleného bodu koule o poloměru R od jejího středu.
(2004-09-03:1ad111ppx1cyaq.5.9)

K ŘEŠENÍ

Rovnoměrné rozdělení

5.10. Náhodná veličina X má $\mathrm{Ro}(0, 2)$. Napište její hustotu a distribuční funkci a určete $\mathrm{P}[0 < X < 1/2]$.
(2004-09-03:1ad111ppx1cyaq.5.10)

K ŘEŠENÍ

5.11. Spočtěte střední hodnotu a rozptyl rovnoměrného rozdělení $\mathrm{Ro}(a, b)$.
(2004-09-03:1ad111ppx1cyaq.5.11)

K ŘEŠENÍ

5.12. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení. Jaká je jí hustota, jestliže $\mathrm{E}\,X = 1$, $\operatorname{var} X = 3$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.12)

K ŘEŠENÍ

Exponenciální rozdělení

5.13. Doba do poruchy má exponenciální rozdělení s intenzitou poruch 0,02. Najděte střední dobu do poruchy a pravděpodobnost, že po dobu 80 hodin nedojde k poruše.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.13)

K ŘEŠENÍ

5.14. Doba bezporuchového chodu zařízení má exponenciální rozdělení se střední hodnotou 700 hodin. Určete dobu, během níž nedojde s pravděpodobností 0,8 k poruše?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.14)

K ŘEŠENÍ

5.15. Nechť životnost výrobků se řídí exponenciálním rozdělením s distribuční funkcí $F(x) = 1 - e^{-x/5}, x > 0$. Jakou záruční dobu stanoví výrobce, nemá-li počet reklamovaných výrobků překročit 10%?

K ŘEŠENÍ

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.15)

5.16. Doba opravy televizoru má exponenciální rozdělení. Určete střední dobu opravy, jestliže do 60 minut je opraveno 30 % televizorů.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.16)

K ŘEŠENÍ

5.17. Jaký je podíl střední hodnoty a mediánu u exponenciálního rozdělení?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.17)

K ŘEŠENÍ

5.18. Doba do poruchy zařízení má exponenciální rozdělení s parametrem λ. Porouchané zařízení je za dobu t opraveno a znovu uvedeno do provozu. Jaká je pravděpodobnost, že mezi sousedními poruchami uběhne více času než $3t$?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.18)

K ŘEŠENÍ

5.19. Střední doba bezporuchové práce dvou zařízení pracujících nezávisle s exponenciálním rozdělením je 750 a 800 hodin. Jaká je pravděpodobnost, že obě vydrží pracovat déle než 1000 hodin?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.19)

K ŘEŠENÍ

5.20. Vyjádřete dobu, po kterou bude s pravděpodobností $1-\alpha$ pracovat zařízení sestávající z n nezávisle se chovajících součástek (všechny s týmž exponenciálním rozdělením) zapojených sériově (resp. paralelně).
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.20)

K ŘEŠENÍ

Normální rozdělení

5.21. Náhodná veličina X má rozdělení $\mathrm{N}(0,1)$. Vyjádřete hustotu a distribuční funkci veličiny $Y=\mu+\sigma X$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.21)

K ŘEŠENÍ

5.22. Délka výrobku v mm má $\mathrm{N}(68,3,0,04)$. Jaká je pravděpodobnost, že délka náhodně odebraného výrobku bude mezi 68 a 69 mm?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.22)

K ŘEŠENÍ

5.23. Výsledky měření jsou zatíženy jen normálně rozdělenou náhodnou chybou se směrodatnou odchylkou 3 mm. Jaká je pravděpo-

dobnost, že při 3 měřeních bude aspoň jednou chyba v intervalu (0, 2,4)?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.23)

K ŘEŠENÍ

5.24. Životnost svíčky (v km) má normální rozdělení s průměrem 10 000 a směrodatnou odchylkou 3000. Jaká je pravděpodobnost, že na vzdálenosti 4300 km nebude třeba měnit žádnou ze 4 svíček?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.24)

K ŘEŠENÍ

5.25. Pro veličinu $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ známe a) $\mathrm{P}[X \leqq 5] = 0,7$ a $\mathrm{P}[X \geqq 0] = 0,8$, b) $\mathrm{P}[X \geqq 5] = 0,7$ a $\mathrm{P}[X \leqq 0] = 0,8$. Určete μ, σ^2.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.25)

K ŘEŠENÍ

5.26. Výsledky radarového měření jsou zatíženy normálně rozdělenou náhodnou chybou s nulovou střední hodnotou, která s pravděpodobností 0,95 nepřesahuje ± 20 m. Určete směrodatnou odchylku měření.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.26)

K ŘEŠENÍ

5.27. Výrobky jsou považovány za prvotřídní, pokud odchylka od předepsané délky nepřekročí 3,6 mm. Jestliže odchylka má rozdělení $\mathrm{N}(0, 9)$, kolik prvotřídních výrobků lze čekat mezi 100 výrobky? (2004-09-03.1ad11ppx1cyaq.5.27) K ŘEŠENÍ

5.28. Chyba při měření vzdálenosti má $\mathrm{N}(0, 1370)$. Kolikrát je třeba měření opakovat, má-li s pravděpodobností 0,9 být aspoň jedna chyba menší než 5? (2004-09-03.1ad11ppx1cyaq.5.28) K ŘEŠENÍ

5.29. Jaký rozptyl mají normálně rozdělená měření, která se s pravděpodobností 0,41 neodchylují od správné hodnoty o více než 24 m? (2004-09-03.1ad11ppx1cyaq.5.29) K ŘEŠENÍ

Monotónní transformace

Z teorie. Je-li veličina $Y = T(X)$, monotónní funkcí veličiny X (nebo aspoň postupně na několika intervalech), lze spočítat její distribuční funkci pomocí inverzní transformace T_{-1}. Pro T rostoucí

$$F_Y(y) = \mathrm{P}[Y \leq y] = \mathrm{P}[T(X) \leq y] = \mathrm{P}[X \leq T_{-1}(y)] = \\ = F_X(T_{-1}(y)),$$

resp. pro T klesající

$$F_Y(y) = \cdots = \mathrm{P}[X \geq T_{-1}(y)] = 1 - F_X(T_{-1}(y)).$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq Teo)

5.30. Najděte hustotu veličiny $Y = X^2$, jestliže X má rozdělení $\mathrm{Ro}(0,3)$.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq 5.30)

5.31. X má $\mathrm{Ro}(-1,1)$. Najděte hustotu veličiny X^2.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq 5.31)

5.32. Náhodná veličina X má rozdělení $\mathrm{Ro}(1,2)$. Najděte hustotu a distribuční funkci veličiny $Y = 1/X$.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq 5.32)

5.33. Najděte hustotu veličiny $Y = \ln X$, jestliže X má hustotu $\frac{x}{a^2}e^{-x^2/2a^2}$, $x > 0$, a nulovou jinde (Rayleigh).
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.33)

5.34. Najděte hustotu, střední hodnotu a rozptyl veličiny $Y = \exp(-X^3)$, jestliže X má hustotu $3x^2$, $x \in (0, 1)$, a nulovou jinde.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.34)

5.35. Najděte hustotu veličiny X^2, jestliže $X \sim \mathrm{N}(0, 1)$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.35)

5.36. Na kružnici poloměru R se středem v počátku je náhodně zvolen bod. Náhodnou veličinou X je jeho x-ová souřadnice. Určete hustotu a distribuční funkci X.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.36)

5.37. Náhodná veličina X má rozdělení s distribuční funkcí $F(x) = 1-e^{-x}$, $x > 0$ (Exp(1)). Najděte funkci T tak, aby veličina $Y = T(X)$ měla $\mathrm{N}(0, 1)$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.37)

K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ

Další

5.38. Rozdělení náhodné veličiny X je dáno hustotou $f(x) = -x/2 + 1$ na $[0, 2]$ a nulovou jinde. Najděte $\mathrm{P}[X \leqq 1]$, $\mathrm{P}[X > 1]$ a $\mathrm{E}\,X$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.38)

K ŘEŠENÍ

5.39. Rozdělení náhodné veličiny X je dáno hustotou $f(x) = 1/2$ pro $x \in (-2, -1) \cup (1, 2)$ a nulovou jinde. Najděte $\mathrm{P}[X \leqq -1,5]$, $\mathrm{P}[X < 0,5]$ a $\mathrm{E}\,X$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.39)

K ŘEŠENÍ

5.40. Rozdělení náhodné veličiny X je dáno hustotou $f(x) = 1$ na $[0,\ 0,5]$, $f(x) = 1/2$ na $[1, 2]$, $f(x) = 0$ jinde. Najděte $\mathrm{P}[0,25 \leqq X \leqq 1,5]$ a $\mathrm{E}\,X$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.40)

K ŘEŠENÍ

5.41. Rozdělení náhodné veličiny X je dáno hustotou $f(x) = 3(x-1)^2$ na $(0, 1)$ a nulovou jinde. Určete střední hodnotu a hodnotu distribuční funkce v bodě 0,5.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.41)

K ŘEŠENÍ

5.42. Rozdělení náhodné veličiny X je dáno hustotou $f(x) = x$ na $(0,1]$, $f(x) = 2 - x$ na $(1,2]$, $f(x) = 0$ jinde. Určete střední hodnotu, rozptyl a hodnotu distribuční funkce v bodě 1,5.
(2004-09-03:1ad111ppx1cyaq.5.42)

5.43. Náhodná veličina X má hustotu $3x^2$ na $(0,1)$ a nulovou jinde. Najdějte její distribuční funkci, modus, medián a střední hodnotu.
(2004-09-03:1ad111ppx1cyaq.5.43)

5.44. Náhodná veličina má hustotu $f(x) = a \sin x$ na $[0, \pi]$ a 0 jinde. Najděte a, distribuční funkci a $\mathrm{P}[X \in (0, \frac{\pi}{4})]$.
(2004-09-03:1ad111ppx1cyaq.5.44)

5.45. Rozdělení náhodné veličiny X je dáno hustotou $f(x) = e^x$, pro $x < 0$ a nulovou jinde. Spočtěte střední hodnotu a rozptyl.
(2004-09-03:1ad111ppx1cyaq.5.45)

5.46. Jaká je pravděpodobnost, že po 200 hodinách provozu budou fungovat aspoň 3 výrobky z 5, jestliže jejich živostnost v hodinách má $N(180, 400)$?

K ŘEŠENÍ
K ŘEŠENÍ
K ŘEŠENÍ
K ŘEŠENÍ
K ŘEŠENÍ

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.46)

5.47. Najděte p-kvantil Weibullova rozdělení s distribuční funkcí $F(x) = 1 - e^{-(x/\theta)^{\alpha}}$, $x > 0$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.47)

5.48. Vyjádřete p-kvantil rozdělení $\mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.48)

5.49. Spočtěte $\mathrm{P}[X \in (\mathrm{E}\,X - k\sqrt{\operatorname{var} X}, \mathrm{E}\,X + k\sqrt{\operatorname{var} X})]$, $k = 1, 2, 3$ pro veličinu X s rozdělením $\mathrm{Exp}(\lambda)$, $\mathrm{Ro}(a, b)$ a $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.49)

5.50. Najděte hustotu veličiny $Y = X^3$, jestliže veličina X má rozdělení $\mathrm{Ro}(0, 2)$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.50)

5.51. Najděte hustotu veličiny $Y = 1/X$, jestliže X má rozdělení $\mathrm{Ro}(0, 1)$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.51)

5.52. Najděte hustotu veličiny $Y = \ln X$, jestliže X má rozdělení $\mathrm{Ro}(0, 1)$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.52)

5.53. Najděte hustotu veličiny $Y = -\ln X$, jestliže X má rozdělení $\mathrm{Ro}(0, 1)$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.53)

5.54. Najděte hustotu veličiny $Y = X^2$, jestliže veličina X má rozdělení $\mathrm{Ro}(-2, 0)$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.54)

5.55. Najděte hustotu veličiny $Y = 1/X$, jestliže veličina X má rozdělení $\mathrm{Ro}(0, 2)$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.55)

5.56. Najděte hustotu veličiny $Y = 5\ln X$, jestliže X má rozdělení $\mathrm{Ro}(0, 1)$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.56)

K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ

6. Vztahy mezi náhodnými veličinami

Z definice

6.1. Náhodný vektor (X, Y) má konstantní hustotu na $[1,2]\times[2,4]$ a nulovou jinde. Najděte sdruženou a marginální hustoty a distribuční funkce, zjistěte, zda jsou X a Y nezávislé.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.6.1)

K řešení

6.2. Jsou veličiny $U = X + Y$, $V = X - Y$, kde X, Y jsou výsledky dvou nezávislých hodů kostkou, nezávislé, resp. nekorelované?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.6.2)

K řešení

6.3. Pětkrát hodíme kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že v prvních 3 hodech padla šestka 2×, jestliže ve všech pěti hodech padla 3×? Obecněji: Jaká je $\mathrm{P}[X_1 = k \mid X_1 + X_2 = n]$, jestliže $X_1 \sim \mathrm{Bi}(n_1, p)$ je nezávislá s $X_2 \sim \mathrm{Bi}(n_2, p)$?

K řešení

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.6.3)

6.4. Máme nezávislé stejně rozdělené veličiny $X_1, \ldots, X_n$ s rozdělením s hustotou f a distribuční funkcí F. Najděte distribuční funkci a hustotu jejich maxima a minima.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.6.4)

K ŘEŠENÍ

V normálním rozdělení

6.5. Měsíční výdaje (v Kč) domácností na určité zboží mají $\mathrm{N}(900, 19\,600)$. Jaká je pravděpodobnost, že a) výdaje jedné, b) průměrné výdaje 5 náhodně vybraných domácností překročí 1000 Kč?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.6.5)

K ŘEŠENÍ

6.6. Chyba měření má rozdělení $\mathrm{N}(0, 16)$. Kolikrát je nutno měření opakovat, aby se s pravděpodobností alespoň 0,95 aritmetický průměr naměřených hodnot neodchyloval od správné hodnoty o více než ± 1?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.6.6)

K ŘEŠENÍ

6.7. Poloměr míčku a délka krabice (v mm) mají normální rozdělení se středními hodnotami 29,4 a 237 a se směrodatnými odchylkami 0,2 a 0,8. Čtyři míčky je třeba uložit vedle sebe do krabice. Jaká je pravděpodobnost, že a) se nevejdou, b) zůstane mezera větší než 3 mm.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.6.7)

K ŘEŠENÍ

6.8. Hmotnost pomerančů v dodávce má N(170, 144) (v gramech). Jaká je pravděpodobnost, že síťka s 8 pomeranči bude vážit více než 1,5 kg?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.6.8)

K ŘEŠENÍ

Transformace a konvoluce

Z teorie. Pro hustotu transformované veličiny $T(X)$ platí:

Má-li náhodný vektor X hustotu f_X vzhledem k Lebesgueově míře a je-li T zobrazení $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^n$, regulární a prosté na otevřených disjunktních množinách $G_1, G_2, \ldots$, $\mathrm{P}[X \in \bigcup_i G_i] = 1$, potom $T(X)$

má hustotu

$$f_{T(X)}(y) = \sum_{\{i; y \in T(G_i)\}} f_X\left((T|_{G_i})_{-1}(y)\right) \cdot \left|((T|_{G_i})_{-1})'(y)\right|.$$

Pro $f(X_1, \ldots, X_n)$, diferencovatelnou funkci *nezávislých* náhodných veličin lze za předpokladu jejich blízkosti ke středním hodnotám (tj. $\sqrt{\operatorname{var} X_i}$ malé) díky Taylorovu rozvoji

$$f(X_1, \ldots, X_n) \approx f(\mathrm{E}\, X_1, \ldots, \mathrm{E}\, X_n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathrm{E}\, X_1, \ldots, \mathrm{E}\, X_n) \cdot (X_i - \mathrm{E}\, X_i)$$

psát ***přibližně***

$$\mathrm{E}\, f(X_1, \ldots, X_n) \approx f(\mathrm{E}\, X_1, \ldots, \mathrm{E}\, X_n),$$

a

$$\operatorname{var} f(X_1, \ldots, X_n) \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathrm{E}\, X_1, \ldots, \mathrm{E}\, X_n)\right)^2 \operatorname{var} X_i.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.Teo)

6.9. Najděte distribuční funkci a hustotu veličiny $Z = X + Y$, jestliže $X \sim \mathrm{Ro}(0,1)$ a $Y \sim \mathrm{Ro}(-1,0)$ jsou nezávislé. Kolik je $\mathrm{E}\,Z$ a $\mathrm{var}\,Z$?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.6.9)

K ŘEŠENÍ

6.10. Najděte distribuční funkci a hustotu veličiny $Z = X/Y$, jestliže $X \sim \mathrm{Ro}(0,1)$ a $Y \sim \mathrm{Ro}(-1,0)$ jsou nezávislé.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.6.10)

K ŘEŠENÍ

6.11. Nechť X_1 a X_2 jsou nezávislé náhodné veličiny s $\mathrm{Ro}(\mu_i - \varepsilon_i, \mu_i + \varepsilon_i)$ ($\mu_i > 0$ a ε_i jsou malé). Určete přibližně střední hodnotu a rozptyl veličiny $Y = X_1/X_2$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.6.11)

K ŘEŠENÍ

7. Centrální limitní věta

Obecně

Z teorie. $X_1, X_2, \ldots$ nezávislé s $\mathrm{E}\,|X_i|^3 < \infty$. Jestliže

$$\frac{\sqrt[3]{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\,|X_i - \mathrm{E}\,X_i|^3}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

potom

$$\mathrm{P}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathrm{E}\,X_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \operatorname{var} X_i}} < x\right] \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t.$$

Tedy pro ***stejně rozdělené nezávislé*** náhodné veličiny s $\mathrm{E}\,|X_i^3| < \infty$ (dle Lindebergovy CLV stačí už konečný rozptyl) centrální limitní věta platí.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.Teo)

7.1. Pomocí centrální limitní věty vyjádřete $\mathrm{P}[\sum_{i=1}^{n} X_i < a]$, jestliže $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené veličiny s rozdělením $\mathrm{N}(1,4)$, resp. $\mathrm{Alt}(1/5)$, $\mathrm{Ro}(0,2)$, $\mathrm{Ro}(-2,2)$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.7.1)

K ŘEŠENÍ

7.2. Zatížení letadla s 64 místy nemá překročit 6 000 kg. Jaká je pravděpodobnost, že při plném obsazení bude tato hodnota překročena, má-li hmotnost cestujícího střední hodnotu 90 kg a směrodatnou odchylku 10 kg?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.7.2)

K ŘEŠENÍ

7.3. Počet chyb na jedné straně textu má střední hodnotu 8 a rozptyl 4. Jaká je pravděpodobnost, že na 100 stranách bude méně než 750 chyb?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.7.3)

K ŘEŠENÍ

7.4. Předpokládejme, že žák má při písemce stejnou šanci dostat kteroukoli ze známek 1–5. Jaká je pravděpodobnost, že průměr známek ve třídě se 40 žáky bude lepší než 2,5?

K ŘEŠENÍ

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.7.4)

7.5. Pan „A“ cestuje do práce a z práce tramvají, která jezdí v intervalu 5 min., přičemž jeho příchod na zastávku je vzhledem k odjezdu tramvaje zcela náhodný. S jakou pravděpodobností pročeká pan „A“ během 20 pracovních dní méně než 120 min.?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.7.5)

K ŘEŠENÍ

7.6. Stokrát hodíme kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že součet dosažených ok bude mezi 320 a 380?.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.7.6)

K ŘEŠENÍ

Pro alternativní rozdělení

Z teorie. Pro $S_n \sim \mathrm{Bi}(n,p) = \sum \mathrm{Alt}(p)$ (nezávislých) je

$$\mathrm{P}\left[\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\right] \xrightarrow{n\to\infty} \Phi(x),$$

přičemž aproximaci použijeme už při var $S_n > 9$.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.Teo)

7.7. Pravděpodobnost, že se anketní lístek vrátí vyplněný, je 0,7. Jaká je pravděpodobnost, že ze 160 rozeslaných se jich vrátí aspoň 100 vyplněných? Kolik jich je třeba rozeslat, aby se tato pravděpodobnost zvýšila na 0,99?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.7.7)

7.8. V osudí je 16 bílých a 14 černých koulí. Jaká je pravděpodobnost, že při 150 tazích jedné koule (s vracením) vytáhneme bílou právě 77×?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.7.8)

7.9. Jaká je pravděpodobnost, že při 100 hodech kostkou padne šestka nejvýše dvacetkrát?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.7.9)

7.10. S jakou pravděpodobností bude při 100 hodech kostkou relativní četnost padnutí šestky větší než 1/12?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.7.10)

K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ

7.11. Nechť $P(A) = 0,4$. Jaká je pravděpodobnost, že relativní četnost výskytu jevu A v 1 500 pokusech bude větší než 0,38? Kolik pokusů je třeba provést, aby s pravděpodobností alespoň 0,99 se relativní četnost výskytu A od jeho pravděpodobnosti nelišila o více než 0,01?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.7.11)

K ŘEŠENÍ

7.12. V určité oblasti je 3% nemocných malárií. Jaká je pravděpodobnost, že při kontrole 5 000 lidí najdeme $3 \pm 0,5\%$ nemocných malárií?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.7.12)

K ŘEŠENÍ

Další

7.13. $60\times$ hodíme kostkou. Pomocí CLV určete, jaká je pravděpodobnost, že šestka padne alespoň desetkrát.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.7.13)

K ŘEŠENÍ

7.14. $200\times$ hodíme mincí. Jaká je pravděpodobnost, že podíl líců bude větší než 0,55?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.7.14)

7.15. Kolikrát musíme opakovat pokus, aby pravděpodobnost, že jev (vyskytující se při jednom pokusu s pravděpodobností 0,05) nastal alespoň pětkrát, byla větší než 0,8?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.7.15)

7.16. Kolikrát nejméně musíme hodit kostkou, aby s pravděpodobností 0,995 (nejméně) padla šestka aspoň desetkrát?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.7.16)

7.17. Jaký je nejmenší počet nezávislých pokusů, aby s pravděpodobností (alespoň) 0,95 nastal při nich sledovaný jev (s pravděpodobností výskytu 0,2 při jednom) alespoň desetkrát?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.7.17)

K ŘEŠENÍ
K ŘEŠENÍ
K ŘEŠENÍ
K ŘEŠENÍ

8. Odhady parametrů

Druhy a vlastnosti odhadů

Z teorie. T_n je ***konzistentní*** odhad θ, jestliže

$$T_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \theta.$$

To nastává např. když $\mathrm{E}\,T_n^2 < \infty$, $\mathrm{E}\,T_n \to \theta$ a $\operatorname{var} T_n \to 0$.

Rao-Cramér:

$$\operatorname{var}(\text{nestranný odhad}) \geqq 1/(nJ(\theta)).$$

Obecněji pro každý odhad s $\mathrm{E}\,T^2 < \infty$, $b(\theta) = \mathrm{E}\,T - \theta$ z výběru z regulárního rozdělení (nosič nezáv. na θ, konečná $f' = \partial f/\partial\theta$, $\int f'\,\mathrm{d}x = 0$, $J(\theta)$ konečná) a při ex. $b'(\theta)$ a $\partial(\int T f\,\mathrm{d}x)/\partial\theta = \int T f'\,\mathrm{d}x$

je

$$\mathrm{E}(T-\theta)^2 \geqq \frac{(1+b'(\theta))^2}{J(\theta)},$$

kde $J(\theta) = \mathrm{E}(f'/f)^2$ $(= -E((\ln f)'')^2$ když $\int f'' \,\mathrm{d}x = 0)$. Rovnosti lze dosáhnout pro

$$f(x,\theta) = c(\theta) e^{A(\theta)T(x)} u(x).$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.Teo)

V normálním rozdělení

Z teorie. $(1-\alpha)$% intervaly spolehlivosti (intervalové odhady) pro střední hodnotu (při rozptylu známém, neznámém) a rozptyl normálního rozdělení jsou

$$\overline{X}_n \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}, \quad \overline{X}_n \pm \frac{s_n}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1), \quad \left(\frac{(n-1)s_n^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s_n^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} \right),$$

kde

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2 = \frac{\sum X_i^2 - n\overline{X}^2}{n-1}.$$

Díky CLV lze intervaly pro normální rozdělení použít i pro odhad střední hodnoty u velkých náhodných výběrů ($n > 30$, resp. $n > 100$ při větších odchylkách od normality) z rozdělení s konečným rozptylem. Je

$$\mathrm{P}\left[\frac{\sum X_i - n \,\mathrm{E}\, X_1}{\sqrt{n \operatorname{var} X_1}} \le x \right] \to \Phi(x), \quad s_n^2 \to \operatorname{var} X_1 \quad \text{s.j.}$$

a tedy přibližný $(1-\alpha)\%$ interval spolehlivosti pro $\mathrm{E}\, X_1$ je

$$\overline{X} \pm u_{1-\alpha/2} \frac{s_n}{\sqrt{n}}.$$

Pro větší jistotu lze místo $u_{1-\alpha/2}$ použít $t_{1-\alpha/2}(n-1)$, nicméně $t_p(n) \doteq u_p$ pro $n > 30$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.Teo)

8.1. Odvoďte maximálně věrohodný odhad pro střední hodnotu normálního rozdělení při známém rozptylu.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.1)

8.2. Odvoďte intervalové odhady střední hodnoty (při rozptylu známém i neznámém) a rozptylu normálního rozdělení.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.2)

8.3. Opakovanými měřeními byla zjištěna tloušťka vlákna: 210, 217, 209, 216, 216, 215, 220, 214, 213 (10^{-6} m). Je známo, že měření mají rozdělení $\mathrm{N}(\mu, 25)$. Nalezněte 95% interval spolehlivosti pro μ.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.3)

K ŘEŠENÍ
K ŘEŠENÍ
K ŘEŠENÍ

8.4. Deset balíčků mouky pocházejících z balícího stroje mělo hmotnosti v gramech: 987, 1 001, 993, 994, 993, 1 005, 1 007, 999, 995, 1 002. Sestrojte 95% interval spolehlivosti pro střední hodnotu a rozptyl hmotnosti (předpokládejte normální rozdělení).
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.4)

K ŘEŠENÍ

8.5. Z 12 pozorování doby trvání montážní operace byl zjištěn průměr 44 s a směrodatná odchylka 4 s. Sestrojte 90% interval spolehlivosti pro očekávanou délku operace, jestliže ta má normální rozdělení.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.5)

K ŘEŠENÍ

8.6. U 100 náhodně vybraných výrobků činila průměrná spotřeba materiálu 150 a výběrový rozptyl spotřeby byl 16. Sestrojte 95% interval spolehlivosti pro očekávanou spotřebu na 1 výrobek.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.6)

K ŘEŠENÍ

V alternativním rozdělení

Z teorie. Intervalové odhady pro výběr z $\mathrm{Alt}(p)$ lze založit na CLV,

$$s_n^2 = \frac{n}{n-1}\overline{X}(1-\overline{X}),$$

čili přibližný interval spolehlivosti pro p je

$$\overline{X} \pm u_{1-\alpha/2}\frac{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}}{\sqrt{n}} = \overline{X} \pm u_{1-\alpha/2}\frac{\sqrt{\sum X - (\sum X)^2/n}}{n},$$

pro malé np je však lépe aproximovat pomocí $\mathrm{Po}(np)$.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.Teo)

8.7. $X_1, X_2, \ldots X_n$ výběr z $\mathrm{Alt}(p)$. Najděte maximálně věrohodný odhad p.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.7)

8.8. Z 42 náhodně vybraných účastníků sportovního odpoledne bylo 16 dívek a 26 chlapců. Odhadněte podíl dívek mezi účastníky.

Verze 2004-09-03

K ŘEŠENÍ K ŘEŠENÍ

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.8)

8.9. Mezi 160 pracovníky (náhodně vybranými z 8 000 pracujících v závodě) 48 cestuje do práce vlakem. Napište bodový odhad a 95% interval spolehlivosti pro podíl a počet zaměstnanců dopravujících se vlakem.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.9)

K ŘEŠENÍ

8.10. Byla sledována účinnost léku na snížení tlaku krve. Snížení nastalo u 140 z 225 pacientů. Sestrojte 95% interval spolehlivosti pro (průměrnou) účinnost léku.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.10)

K ŘEŠENÍ

8.11. Při 100 nezávislých pokusech byl dvanáctkrát zaznamenán úspěch. Najděte 95% interval spolehlivosti pro pravděpodobnost úspěchu.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.11)

K ŘEŠENÍ

V rovnoměrném rozdělení

8.12. $X_1, X_2, \ldots X_n$ výběr z $\mathrm{Ro}(0, \theta)$ $(\theta > 0)$. Najděte maximálně věrohodný odhad parametru θ, zjistěte, jestli je nestranný a spočtěte jeho rozptyl. Navrhněte také nestranný odhad pro střední hodnotu a porovnejte ho s $\overline{X}$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.12)

K ŘEŠENÍ

8.13. Najděte $(1-\alpha)\%$ intervalový odhad parametru θ rozdělení $\mathrm{Ro}(\theta, \theta)$ (jeho meze hledejte ve tvaru $g(\max X_i)$, kde g je rostoucí funkce).
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.13)

K ŘEŠENÍ

8.14. Autobus jezdí pravidelně v intervalech délky θ, kterou neznáme. Při náhodných příchodech na zastávku byly zjištěny doby čekání 7, 10, 9, 6, 3, 4, 7, 2, 2, 8 minut. Odhadněte θ.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.14)

K ŘEŠENÍ

Další

8.15. Opakovanými měřeními byla zjištěna teplota vody: 21,0, 21,7, 20,9, 21,6, 21,6, 21,5, 22,0, 21,4, 21,3 ($^\circ$C). Je známo, že měření mají rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Nalezněte 95% interval spolehlivosti pro μ.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.15)

K ŘEŠENÍ

8.16. Určete 95% interval spolehlivosti pro střední hodnotu rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ (výšky studentů) na základě náhodného výběru rozsahu 26: 190, 175, 168, 182, 180, 179, 200, 191, 156, 180, 178, 191, 185, 202, 182, 187,5, 166, 182, 178, 177, 176, 182, 185, 175, 182, 185.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.16)

K ŘEŠENÍ

8.17. Při kontrole ze 100 vozidel 24 překročilo rychlost 60 km/h, průměrná rychlost byla 65 km/h, směrodatná odchylka 7 km/h. Sestrojte 95% interval spolehlivosti pro průměrnou rychlost vozidel a pro podíl vozidel překračujících rychlost.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.17)

K ŘEŠENÍ

8.18. Odhadujeme výši úspor novomanželů. Žádáme spolehlivost 95% a maximální chybu 200 Kč. Směrodatná odchylka byla předběžně odhadnuta na 2 500 Kč. Kolika párů se musíme zeptat?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.18)

8.19. Odhadujeme podíl prvotřídních výrobků. Kolik jich je třeba přezkoušet, aby se spolehlivostí 95% chyba nepřekročila $\pm 3\%$? Co když víme, že hledaný podíl bude přes 80%?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.19)

K ŘEŠENÍ
K ŘEŠENÍ

9. Testování hypotéz

Z DEFINICE

Z teorie. Při testování hypotéz je třeba najít vhodnou statistiku $T = T(X_1, \ldots, X_n)$ a množinu jich hodnot, při nichž budeme zamítat hypotézu H_0 proti alternativě H_1 (***kritický obor***) tak, aby pravděpodobnosti chyb 1. a 2. druhu

$$p_1 = \mathrm{P}[\text{zam. } H_0 \,|\, H_0 \text{ platí}] \quad \text{a} \quad p_2 = \mathrm{P}[\text{nezam. } H_0 \,|\, H_0 \text{ neplatí}]$$

byly co nejmenší.

Nemožnost společně minimalizovat obě dvě chyby vede ke slabší podmínce minimalizovat p_2 při platnosti $p_1 \leq \alpha$ (***stejnoměrně nejsilnější α-test***), kdy je kontrolována „nepříjemnější" chyba 1. druhu číslem α (např. 5%, 1%, 10%).

V mnoha případech to dopadá tak, že při velkých odchylkách parametru od testované hodnoty má i statistika T velké (resp. malé) hodnoty a hledá se tak jen hranice, od které je její hodnota tak velká, že při platnosti hypotézy H_0 by taková situace nastala jen s danou malou pravděpodobností (menší než α při testu s ***hladinou významnosti*** α).

Pro konkrétní hodnoty parametru z H_1 je možno spočítat p_2 a $1 - p_2$ je ***silofunkce testu*** (ta se hledala co nejvyšší).
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.Teo)

9.1. Uhyne-li více než 1 rostlina z 5 zasazených, rozhodneme, že jde o choulostivý druh s pravděpodobností uhynutí 0,3, jinak že o odolný s 0,1. Určete pravděpodobnosti chyb obou druhů.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.1)

K ŘEŠENÍ

9.2. Je možno považovat za znalce člověka, který z 8 předložených druhů vína pozná 5 (anebo ještě více)? (Ví, kterých 8 druhů má poznat, ale neví v jakém pořadí mu budou předloženy.)

K ŘEŠENÍ

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.2)

9.3. Závod obdržel zásilku 10 000 součástek, v níž by podle smlouvy mělo být nejvýše 1% zmetků. Náhodně byl vybrán a zkontrolován vzorek 500 ks. Pro jaký počet zmetků v něm můžeme hypotézu, že v celé zásilce je nejvýše 1% zmetků, zamítnout na hladině významnosti a) 0,05, b) 0,01? Spočtěte pravděpodobnosti chyby 2. druhu za předpokladu, že skutečná zmetkovitost je 2% (resp. 3%).
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.3)

O střední hodnotě a rozptylu

Z teorie. Víme, že při výběru z $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ mají za $H_0: \mu = \mu_0$, resp. $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ statistiky

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s}\sqrt{n} \sim t_{n-1},$$

resp.

$$\chi^2 = \frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1},$$

$$s^2 = \frac{\sum X_i^2 - n\overline{X}^2}{n-1}.$$

Odchylky skutečného μ od μ_0 (resp. σ^2 od σ_0^2) způsobí výrazně nenulovou hodnotu T (resp. příliš malou či velkou hodnotu χ^2), při uvážení pravděpodobnosti chyby 1. druhu je vhodné zamítat H_0 proti oboustranné alternativě, když

$$|T| > t_{1-\alpha/2}(n-1),$$

resp.

$$\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1), \text{ nebo } < \chi^2_{\alpha/2}(n-1),$$

podobně pro jednostranné alternativy.

Obdobně (dle CLV) při testování o střední hodnotě pro jiná rozdělení, např. pro výběr z $\mathrm{Alt}(p)$ má při dostatečném rozsahu výběru $n\widehat{p}(1-\widehat{p}) > 9$) za $H_0 : p = p_0$ statistika

$$U = \frac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p})}}\sqrt{n} \dot{\sim} \mathrm{N}(0,1)$$

($\widehat{p} = \overline{X}$) a zamítá se proti oboustranné alternativě při $|U| > u_{1-\alpha/2}$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.Teo)

9.4. Spotřeba téhož auta byla testována u 11 řidičů s výsledky 8,8, 8,9, 9,0, 8,7, 9,3, 9,0, 8,7, 8,8, 9,4, 8,6, 8,9 (l/100 km). Je pravdivá výrobcem udávaná spotřeba 8,8 l/100 km? Můžeme popřít tvrzení, že rozptyl získaných údajů je 0,1?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.4)

K ŘEŠENÍ

9.5. Je dosud aktuální představa o $\sigma_0 = 300$, směrodatné odchylce normálně rozdělené náhodné veličiny, jestliže je zaznamenáno $n = 25$, $\overline{X} = 3118$, $s = 357$?

K ŘEŠENÍ

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.5)

9.6. Pro bavlněnou přízi je předepsána horní mez variability pevnosti vlákna: rozptyl pevnosti (která má $N(\mu, \sigma^2)$) nemá překročit $\sigma_0^2 = 0,36$. Při zkoušce 16 vzorků byly zjištěny výsledky 2,22, 3,54, 2,37, 1,66, 4,74, 4,82, 3,21, 5,44, 3,23, 4,79, 4,85, 4,05, 3,48, 3,89, 4,90, 5,37. Je důvod k podezření na vyšší nestejnoměrnost než je stanoveno?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.6)

K ŘEŠENÍ

9.7. Určete silofunkci testu hypotézy H_0: $\mu = \mu_0$ proti H_1: $\mu \neq \mu_0$ při výběru z $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, σ^2 známý.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.7)

K ŘEŠENÍ

9.8. Je padnutí 22 líců při 40 hodech mincí důkazem její nevyváženosti? Od jakého rozsahu výběru je 55% líců již významný výsledek?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.8)

K ŘEŠENÍ

Dvě veličiny

Z teorie. Pro porovnání středních hodnot ve výběru z dvojrozměrného normálního rozdělení, tj. rozdíl *dvojic*

$$Z_i = X_i - Y_i \sim \mathrm{N}(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2),$$

používá ***párový t-test*** statistiku

$$T = \frac{\overline{Z} - \delta_0}{s_Z}\sqrt{n} \sim t_{n-1} \qquad \text{za } H_0\colon \mu_1 - \mu_2 = \delta_0.$$

Pro porovnání středních hodnot ve 2 *nezávislých* výběrech rozsahů n_1 a n_2 z $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma^2)$ a $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma^2)$ (nenormalitu a nestejnost rozptylů možno opominout, ne však nezávislost!) používá ***dvouvýběrový (nepárový) t-test*** statistiku

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - \delta_0}{\sqrt{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}}\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \sim t_{n_1+n_2-2} \qquad \text{za } H_0\colon \mu_1 - \mu_2 = \delta_0.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.Teo)

9.9. U 6 aut bylo zjištěno ojetí předních pneumatik (v mm).

1,8	1,0	2,2	0,9	1,5	1,6
1,5	1,1	2,0	1,1	1,4	1,4

Ojíždějí se levá a pravá pneumatika stejně?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.9)

9.10. Denní přírůstky váhy selat byly při krmení směsí A 62, 54, 55, 60, 53, 58, u směsi B 52, 56, 50, 49, 51. Je mezi nimi rozdíl?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.10)

χ^2 test dobré shody

Z teorie. Má-li $\mathbf{X} \sim \text{Multinom}(n, p_1, \ldots, p_k)$, potom

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{X_i^2}{np_i} - n \xrightarrow[\mathcal{D}]{n\to\infty} \chi^2_{k-1},$$

a proti H_0: správné parametry jsou $p_1, \ldots, p_k$ svědčí vysoké hodnoty χ^2.

Aproximace je přijatelná pro $np_i > 5 \forall_i$ (popř. při $k \geq 3$ $np_i \geq 5q$, kde q je podíl tříd s $np_i < 5$).

Při ***modifikované metodě minimálního*** χ^2 se za $p_i = p_i(a)$ dosadí to $\hat{a}$, které je řešením rovnic

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{X_i}{p_i(a)} \frac{\partial p_i(a)}{\partial a_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, m$$

a statistika

$$\chi^2 \sim \chi^2_{k-1-m}.$$

Např. test nezávislosti v ***kontingenční tabulce***: Jsou-li Y, Z nezávislé, pak

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{(n_{ij} - \frac{n_{i.}n_{.j}}{n})^2}{\frac{n_{i.}n_{.j}}{n}} = n\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{n_{ij}^2}{n_{i.}n_{.j}} - n \xrightarrow[\mathcal{D}]{n\to\infty} \chi^2_{(r-1)(c-1)}.$$

spec. pro tabulku 2×2

$$\chi^2 = \frac{(n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21})^2 n}{n_{1.}n_{2.}n_{.1}n_{.2}}.$$

Asymptotické rozdělení lze použít jako dobrou *aproximaci* skutečného, *jestliže*

$$\frac{n_{i.}n_{.j}}{n} > 5 \quad \forall_{i,j},$$

jinak je třeba slučovat buňky.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.Teo)

9.11. V roce 1970 se narodilo 117 137 chlapců a 111 394 děvčat. Jsou pravděpodobnosti narození chlapce a děvčete stejné?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.11)

K ŘEŠENÍ

9.12. 200 lidí uvedlo, jakou číslici mají nejraději:

Číslice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Počet	35	16	15	17	17	19	11	16	30	24

Lze tvrdit, že žádné číslici není dávána přednost?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.12)

K ŘEŠENÍ

9.13. V závodě byly vyzkoušeny dva technologické postupy. Je rozdíl mezi nimi z hlediska počtu nekvalitních výrobků statisticky významný, jestliže daly 950 a 485 (resp. 50 a 15) kvalitních (resp. nekvalitních) výrobků?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.13)

K ŘEŠENÍ

9.14. Byla zjišťována souvislost mezi hladinou alkoholu v krvi (nízká, střední, vysoká) a rychlostí reakce (dobrá, špatná) u 100 náhodně vybraných lidí. Existuje souvislost?

	dobrá	špatná	
nízká	53	12	65
střední	5	15	20
vysoká	2	13	15
	60	40	100

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.14)

K ŘEŠENÍ

9.15. Na základě údajů o 100 žácích rozhodněte, zda je souvislost mezi známkou z chování (v řádcích) a z matematiky (ve sloupcích).

	1	2	≥3	
1	28	34	18	80
≥2	2	6	12	20
	30	40	30	100

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.15)

K ŘEŠENÍ

9.16. Lze z údajů o 91 059 manželstvích uzavřených v roce 1957 prokázat závislost mezi stavem ženicha a stavem nevěsty při vstupu do manželství?

	svob-á	ovd-á	rozv-á	
svob-ý	75 564	824	3 463	79 851
ovdov-ý	1 370	904	798	3 072
rozv-ý	4 603	590	2 943	8 136
	81 537	2 318	7 204	91 059

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.16)

K ŘEŠENÍ

9.17. V tabulce $\begin{matrix} 3 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{matrix}$ je na místě ij počet žáků se známkou z matematiky i a z angličtiny j. Jsou známky z těchto předmětů nezávislé?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.17)

K ŘEŠENÍ

Další

9.18. Zácvik laboranta je úspěšný, pokud dosahuje směrodatné odchylky menší než 0,14. Jaký závěr učiníte z měření 6,42, 6,44 6,38, 6,60, 6,50, 6,51?

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.18)

9.19. Potvrzuje náhodný výběr rozsahu 240 s $\overline{X} = 9720$ a $s = 2300$, že průměrný příjem je 10 000 Kč?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.19)

K ŘEŠENÍ

9.20. Výrobce předpokládal, že bude reklamováno 15% výrobků. Je tomu tak, jestliže z 900 výrobků bylo reklamováno 150?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.20)

K ŘEŠENÍ

9.21. Starosta obdržel při posledních volbách 60% hlasů. Bude stejně úspěšný i při příštích, když ze 100 náhodně vybraných občanů je pro něj 48?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.21)

K ŘEŠENÍ

9.22. Při 200 hodech mincí byl rub zaznamenán 90krát. Je důvod se domnívat, že rub nepadá stejně často jako líc?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.22)

K ŘEŠENÍ

9.23. U 100 neošetřených postřikem byla zaznamenána prvotřídní kvalita plodů v 58 případech, u 200 ošetřených ve 134 případech. Má postřik nějaký vliv na kvalitu plodů?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.23)

K ŘEŠENÍ

9.24. Mezi 60 americkými studenty bylo zjištěno, že marihuanu kouří (resp. nekouří) 15 (resp. 20) mužů a 8 (resp. 17) žen. Lze prokázat souvislost mezi a kouřením marihuany pohlavím respondentů?
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.24)

K ŘEŠENÍ

9.25. U 31 pacientů trpících chorobou bylo zjišťováno, zda byli očkováni a jaký průběh choroba má. Závisí průběh choroby na tom, zda byl pacient očkován?

	lehký	těžký	
očk	11	3	14
neočk	5	12	17
	16	15	31

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.25)

K ŘEŠENÍ

9.26. Je souvislost mezi barvou očí u syna a u otce? (1 000 údajů o kombinacích barev modrá, zelená – šedá, tmavě šedá – světle hnědá, hnědá.)

	M	Z-Š	tŠ-sH	H	
Syn: M	194	70	41	30	335
Z-Š	83	124	41	36	284
tŠ-sH	25	34	55	23	137
H	56	36	43	109	244
	358	264	180	198	1 000

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.26)

ŘEŠENÍ

10. Korelace a regrese

KORELACE

Z teorie. Pro test nulovosti ***korelačního koeficientu*** ϱ lze při výběru výběru z regulárního N_2 využít za H_0: $\varrho = 0$

$$T = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2} \sim t_{n-2},$$

kde ***výběrový korelační koeficient***

$$r = \frac{s_{XY}}{\sqrt{s_X^2 s_Y^2}},$$

a ***výběrová kovariance***

$$s_{XY} = \frac{1}{n-1}\sum(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}) = \frac{1}{n-1}\left(\sum X_i Y_i - n\overline{XY}\right).$$

Pro testování jiných hodnot ϱ lze už od $n = 10$ (resp. při malém ϱ už od $n = 6$) používat *aproximaci*

$$Z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r} \stackrel{.}{\sim} \mathrm{N}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+\varrho}{1-\varrho}, \frac{1}{n-3}\right),$$

tj. za H_0: $\varrho = \varrho_0$ je

$$U = \left(Z - \frac{1}{2}\ln\frac{1+\varrho_0}{1-\varrho_0}\right)\sqrt{n-3} \stackrel{.}{\sim} \mathrm{N}(0,1).$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.Teo)

10.1. Zjistěte, zda jsou nezávislá měření provedená 2 pracovníky, jestliže naměřili hodnoty (předpokládáme výběr z N_2)

U_i	0,16	0,49	0,47	0,55	0,46	0,48	0,60	0,45	0,45
V_i	0,30	0,49	0,50	0,48	0,59	0,60	0,69	0,40	0,54

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.10.1)

K ŘEŠENÍ

LINEÁRNÍ REGRESE

Z teorie. V modelu

$$\mathbf{Y}_{n\times 1} = \mathbf{X}_{n\times k}\boldsymbol{\beta}_{k\times 1} + \mathbf{e}_{n\times 1},$$

kde

$$\mathrm{E}\,\mathbf{e} = 0, \quad \mathrm{var}\,\mathbf{e} = \sigma^2\mathbf{I}, \quad \mathrm{h}(X) = k < n,$$

je ***odhadem metodou nejmenších čtverců***

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}.$$

Reziduální součet čtverců

$$S_e = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y}.$$

Při *normálních* chybách

$$\mathbf{e} \sim \mathrm{N}_n(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$$

je ($s^2 = S_e/(n-k)$)

$$T_i = \frac{\widehat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{s^2 v_{ii}}} \sim t_{n-k}, \qquad \frac{s^2(n-k)}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-k}$$

$$F = \frac{1}{qs^2}(\widehat{\boldsymbol\beta}_{\mathbf q} - \boldsymbol\beta_{\mathbf q})'[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}{}_{\mathbf{qq}}]^{-1}(\widehat{\boldsymbol\beta}_{\mathbf q} - \boldsymbol\beta_{\mathbf q}) \sim F_{q,n-k}$$

$$T = \frac{\mathbf{c}'\widehat{\boldsymbol\beta} - \mathbf{c}'\boldsymbol\beta}{\sqrt{s^2\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c}}} \sim t_{n-k}.$$

(Testy odpovídají testování různých obyčejných, či např. parciálních korelačních koeficientů.)

Pomocí ***koeficientu determinace***

$$R^2 = 1 - \frac{S_e}{S_T} = \frac{[(\mathbf{Y} - \overline{Y})'(\widehat{\mathbf{Y}} - \overline{Y})]^2}{\|\mathbf{Y} - \overline{Y}\|^2\|\widehat{\mathbf{Y}} - \overline{Y}\|^2} = \frac{\widehat{\mathbf{Y}}'\mathbf{Y} - n\overline{Y}^2}{\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\overline{Y}^2}$$

lze testovat

H_0 : jen abolutní člen nenulový,

za níž má

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \frac{n - k}{k - 1} \sim F_{k-1, n-k}$$

(ekvivalentní s testem pomocí F s příslušným $\mathbf{q}$).
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.Teo)

10.2. Odvoďte metodou nejmenších čtverců vzorce pro odhady parametrů při lineární regresi.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.10.2)

10.3. Metodou nejmenších čtverců odhadněte parametry při regresi přímkou procházející počátkem.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.10.3)

10.4. Metodou nejmenších čtverců odhadněte parametry při regresi křivkou $ax + b + c/x$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.10.4)

K ŘEŠENÍ
K ŘEŠENÍ
K ŘEŠENÍ
K ŘEŠENÍ

10.5. Metodou nejmenších čtverců odhadněte parametry při kvadratické regresi.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.10.5)

K ŘEŠENÍ

10.6. V surovém železe byly při 11 teplotách, 1 300, 1 320,. . . , 1 500, naměřeny procentní obsahy křemíku 0,30, 0,29, 0,35, 0,28, 0,38, 0,42, 0,47, 0,51, 0,62, 0,68, 0,70. Odhadněte parametry předpokládané lineární závislosti a zjistěte, zda obsah na teplotě závisí.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.10.6)

K ŘEŠENÍ

10.7. Byly zjištěny koncentrace kyseliny mléčné v krvi matek (x_i) a novorozenců (Y_i):

x_i	40	64	34	15	57	45
Y_i	33	46	23	12	56	40

Určete parametry předpokládané lineární závislosti Y_i na x_i.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.10.7)

K ŘEŠENÍ

10.8. Ověřte kvadratickou závislost spotřeby na rychlosti, jestliže při rychlosti 40, 50,...,100 km/h bylo naměřeno 6,1, 5,8, 6,0, 6,5, 6,8, 8,1, 10 l/100km.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.10.8)

K ŘEŠENÍ

10.9. Byly sledovány výdaje rodin za potraviny a nápoje (Y_i) v závislosti na počtu členů domácnosti (x_i) a čistém příjmu (z_i) (v 1 000 Kč). Prozkoumejte závislosti.

Y_i	4	3	4	1	6	4	5
x_i	4	2	4	1	5	3	4
z_i	10	8	12	3	15	12	13

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.10.9)

K ŘEŠENÍ

B. Řešení

Řešení

1. Kombinatorika

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.1. [336]

$V_3(8) = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.1)

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.2. [60,36,48]

$V_3(5) = 5 \cdot 4 \cdot 3, \quad 3V_2(4) = 3 \cdot 4 \cdot 3, \quad 60 - 1 \cdot V_2(4) = 60 - 4 \cdot 3 = 48.$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.2)

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.3. [32 490]

$V_1(9) + 9V_1(9) + 9V_2(9) + \cdots + 9V_4(9) = 9(1 + 9 + 9 \cdot 8 + 9 \cdot 8 \cdot 7 + 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6) = 9 \cdot$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.3)

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.4. [5040,2688]

$V_4(10) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7, \quad 6 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 7 + 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 7.$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.4)

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.5. [1 728]

Posadíme je postupně: první tři mají k dispozici 4 sedadla ve směru jízdy, další dva 4 proti a na zbývající zbývají 3 sedadla (tj. postupně třikrát variace bez opakování)

$$V_3(4)V_2(4)V_{(4-3)+(4-2)}(3) = (4 \cdot 3 \cdot 2) \cdot (4 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) = 1\,728.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.5)

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.6. [665 280]
$V_6(12) = 665\,280.$
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.6)

Z řešení 1.7. [165]

Od dvojic,... číslic musíme odečíst ty, které začínají nulou,

$$V_1(5) + \big(V_2(5) - 1 \cdot V_1(4)\big) + \big(V_3(5) - 1 \cdot V_2(4)\big) + \big(V_4(5) - 1 \cdot V_3(4)\big).$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.7)

K ZADÁNÍ

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.8. [8!, 7!]
Usazení je určeno tím, kdo si kam sedne. Je 8 lidí na 8 míst (tj. permutace), tedy $P(8) = 8!$ usazení.
Ve druhém případě se poposednutím všech o 1 místo nově definované usazení nezmění, posunout se mohou $8\times$, nyní je tedy celkový počet usazení 8 krát menší, tj. $P(8)/8 = 8!/8 = 7!$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.8)

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.9. [720, 360, 120]
$6! = 720$, A po E je stejně jako E po A, tedy $\frac{1}{2}6! = 360$, AE jako jeden poslanec, tj $5!$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.9)

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.10. $[(n-1)!(n-2)]$

Všechny $-AB$ vedle sebe $= n! - 2(n-1)!$.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.10)

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.11. [120, 48, 48]
5 žáků na 5 míst dává (permutace) $P(5) = 5! = 120$ možností.

Zaujme-li „A“ místo na kraji, zbývá na ostatní $P(4) = 4! = 24$ možností, kraje jsou však dva, celkově je $2 \cdot 4! = 48$ možností.

Považujeme-li dvojici „A“ a „B“ za jednoho studenta, řešíme úkol posadit 4 studenty do čtyřmístné lavice, což lze $P(4) = 4!$ způsoby. Ve dvojici si však „A“ a „B“ ještě mohou prohodit místa (2 možnosti), takže celkově je $2 \cdot 4! = 48$ způsobů.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.11)

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.12. [1152]

$4! \cdot 4! + 4! \cdot 4!$ (věty lze prohodit).

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.12)

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.13. $[n!m!, (n+1)!m!]$

a) Jasně $n!m!$.

b) Všichni chlapci jako jednotka a pak prohození chlapců navzájem mezi sebou $(n+1)!m!$.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.13)

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.14. [2 610 000]
Pro každý předmět vybíráme určitý počet otázek z připravených, (tj. pro každý předmět kombinace bez opakování)

$$C_2(30)C_2(25)C_1(20) = \binom{30}{2}\binom{25}{2}\binom{20}{1} = \frac{30\cdot 29}{2\cdot 1}\frac{25\cdot 24}{2\cdot 1}\frac{20}{1} =$$
$$= 12\cdot 15\cdot 25\cdot 29\cdot 20 = 2\,610\,000.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.14)

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.15. $[n(n-1)/2]$
Tolik, kolik lze vytvořit dvojic, což je (kombinace bez opakování)

$$C_2(n) = \binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.15)

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.16. $[\binom{64}{3}$, a)$-8\binom{8}{3}$, b)$-8\binom{8}{3}]$

a) Jasně $\binom{64}{3} = 41\,664$, b) odečteme $-8\binom{8}{3} = 448$ ležících v témže sloupci, tj. 41 216, c) Odečteme dalších $-8\binom{8}{3} = 448$ ležících v témže řádku, tj. 40 768.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.16)

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.17. [945]

$$\binom{7}{2}\cdot\binom{10}{2}=945.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.17)

Verze 2004-09-03

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.18. [mn]
Všechny páry, ale ne chlapci spolu, ne dívky spolu

$$\binom{m+n}{2} - \binom{m}{2} - \binom{n}{2},$$

nebo jednoduše mn.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.18)

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.19. $[n(n-3)/2]$

Tolik, kolik je dvojic vrcholů bez dvojic sousedních vrcholů (tj. použijeme dvakrát kombinace bez opakování)

$$C_2(n) - n = \binom{n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{2n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$$

Nebo jinak: každý z n vrcholů je spojen s $n-3$ s ním nesousedícími vrcholy úhlopříčkou. Těchto úhlopříček je (každá má dva koncové body)

$$\frac{1}{2}n(n-3)$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.19)

Z řešení 1.20. [219 520 000]

$$V_3'(28) \cdot V_4'(10) = 28^3 \cdot 10^4 = 219\,520\,000.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.20)

Z řešení 1.21. [2000]
3 chlapci mají na výběr 5 podniků, 2 dívky 4 podniky (tj. variace s opakováním — pro chlapce trojice z 5 podniků, pro dívky dvojice ze 4 podniků)

$V_3'(5)V_2'(4) = 5^3 \cdot 4^2 = 2\,000.$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.21)

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.22. [30]

$2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30.$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.22)

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.23. [Ano, jen 1024 iniciál]
Iniciál je $32 \cdot 32 = 2^{10} = 1024$, tedy musí mít stejné.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.23)

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.24. [450 000]
První číslo není 0, poslední je buďto liché, nebo sudé, podle dosavadního ciferného součtu (v obou případech 5 možností),

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 450\,000.$$

(2004-09-03.`1ad111ppx1cyaq`.1.24)

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.25. [13!/(2!2!2!2!)]

Čtyři písmena po 2, pět po 1, celkem 13 míst, tedy

$$P'_{2,2,2,2,1,1,1,1,1} = 13!/(2!2!2!2!) = 3,891\,88 \cdot 10^8.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.25)

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.26. [11!/480]
Jedno písmeno 5 krát, dvě 2 krát a další dvě 2 krát, celkem 16 míst,
$P'_{5,2,2,1,1} = 11!/(5!2!2!1!1!) = 11!/480 = 82\,160.$
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.26)

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.27. [$16!/(8!2!2!2!)$, $\binom{8}{2}\cdot$a)]

a) Počty figurek jsou 8,2,2,2,1,1, odpovídající permutace s opakováním $P'_{8,2,2,2,1,1} = 16!/(8!2!2!2!) = 64\,864\,800$.

b) Vynásobíme počtem dvojic řad, tj. $\binom{8}{2}\cdot$ a).

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.27)

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.28. [135]
Můžeme brát 4 modré (a k nim některou ze zbývajících 3), 3 modré (sledujeme, kterou barvu nevezmeme), nebo 2 modré,

$$3\frac{5!}{4!1!}+3\frac{5!}{3!1!1!}+\frac{5!}{2!1!1!1!}=135.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.28)

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.29. $[\binom{7}{4}, \binom{11}{4}]$

$$C'_4(4) = \binom{7}{4} = 35, \quad C'_4(8) = \binom{11}{4} = 330.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.29)

Verze 2004-09-03

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.30. [9]

3 druhy kamenů, máme vybrat 3 kameny (avšak nemáme dost smaragdů na prsten se samými smaragdy),

$$C_3'(3) - 1 = \binom{5}{3} - 1 = 9.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.30)

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.31. [19,21]
b) $C_5'(3) = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = 21$,
a) jako b), ale bez samé modré a samé zelené, tj. o 2 méně.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.31)

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.32. [20]

Máme vlastně $6/2 = 3$ krát vybrat ze 4 druhů rybiček (tj. kombinace s opakováním)

$$C_3'(4) = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.32)

Verze 2004-09-03

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.33. $[\binom{12}{3}, 10]$
Vybíráme pro strany 3 délky z 10 možných,

$$C_3'(10) = \binom{12}{3} = 220,$$

krychle musí mít všechny strany stejné, tedy 10 krychlí.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.33)

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.34. $[\binom{n+2}{3}, n^2, n]$

a) Už $n+1, n+1, 2n$ splňují trojúhelníkovou nerovnost, vybíráme tedy libovolně $C_3'(n) = \binom{n+2}{3}$.

b) Odečteme s každou stranou jinou

$$C_3'(n) - C_3(n) = \binom{n+2}{3} - \binom{n}{3} = \frac{(n+2)(n+1)n}{6} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = n^2.$$

c) Určeny jedinou délkou, k dispozici n.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.34)

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.35. [96,42]

a) Pomocí permutací (ale nesmějí začínat nulou)

$5! - 4! = 4 \cdot 4! = 96.$

b) musí končit 0, nebo 4,

$4! \cdot 1 + 3 \cdot 3! \cdot 1 = 42.$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.35)

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.36. [49 999]
Tolik, kolik je nejvyšší takové — tj. 49 999. Též posčítáním k-ciferných (vynecháváme 0 na začátku)

$$\sum_{k=1}^{5}(V_k'(10) - V_{k-1}'(10)) = V_5'(10) - 1.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.36)

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.37. $[8!, \binom{8}{4}]$
Jednoduše $8! = 40\,320$, ve druhém případě stačí vybrat auta do 1. řady, což lze $C_4(8) = \binom{8}{4} = 70$ způsoby.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.37)

Z řešení 1.38. [360]

V každém sloupci je každé číslo stejněkrát, $120/5 = 60$ krát, celkový součet je

$60 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 360.$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.38)

K ZADÁNÍ
Verze 2004-09-03

Z řešení 1.39. []
Vybereme 4 hochy a k nim postupně dívky
$$\binom{15}{4} \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 16\,216\,200.$$
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.39)

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.40. []
Počty písmen M1, I4, S4, P2, celkem 11,
$P'_{4,4,2,1} = 11!/(4!4!2!1!) = 34\,650$,
Odečteme $P'_{4,4,2} = 10!/(4!4!2!)$ začínajících „M" s výsledkem 31 500.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.40)

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.41. $[\binom{8}{5}, 54]$
Kupujeme 5 balíčků ze 4 druhů, tj.

$$C'_5(4) = \binom{8}{5} = 56,$$

případně vyloučíme 2 možnosti (5 stejných balíčků nelze kupovat u 2 druhů).
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.41)

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.42. [7,2n + 1]

Budeme považovat jednokorunu za 1 druh a 2 padesátníky za druhý druh (jak zaplatit 1 Kč), tedy

$$C'_6(2) = \binom{7}{6} = 7 \quad \text{a obecně} \quad C'_{2n}(2) = \binom{2n+1}{2n} = 2n + 1.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.42)

Verze 2004-09-03

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.43. [45]

$C_8'(3) = \binom{10}{8} = 45.$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.43)

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.44. $\left[\frac{64!}{32!(8!)^2(2!)^6}\right]$
Na 64 místech se má vyskytovat 32 krát prázdné políčko, 8 krát bílý a 8 krát černý pěšec,...

$P'_{32,8,8,2,2,2,2,2,2,1,1,1,1} = 64!/(32!(8!)^2(2!)^6)$.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.44)

Verze 2004-09-03

K ZADÁNÍ

Z řešení 1.45. [63]
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.1.45)

Verze 2004-09-03

2. Klasická definice pravděpodobnosti

Z řešení 2.1. [0,5]
Pravděpodobnostním prostorem může být $\boldsymbol{\Omega} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a jednotlivými, stejně pravděpodobnými, elementárními jevy výsledky hodu kostkou. Pak

$$\mathrm{P}[\text{padne sudé číslo}] = \frac{|\{2, 4, 6\}|}{|\boldsymbol{\Omega}|} = \frac{3}{6} = 0,5.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.1)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.2. [5/36]

Stejně pravděpodobné jevy jsou dvojice výsledků hodů jednotlivými kostkami. Těch je 6^2 (každá ze dvou kostek má 6 stran). Součtu 8 odpovídají dvojice $\boldsymbol{A} = \{[2,6],[6,2],[5,3],[3,5],[4,4]\}$, kterých je 5. Hledaná pravděpodobnostje tedy

$$p = \frac{|\boldsymbol{A}|}{6^2} = \frac{5}{36}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.2)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.3. $[\frac{3}{8}, \frac{1}{8}]$

$$p_1 = \frac{12 \cdot 2}{64}, \quad p_2 = \frac{2^3}{64}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.3)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.4. [1/210]
Všech možností seřazení je 9!. Jede-li každý ze 3 druhů vozidel pohromadě, pak druhy lze seřadit 3! způsoby a uvnitř každého druhu vozidla pak 2!, resp. 3! a 4! způsoby. Celkově

$$p = \frac{3! \cdot 2!3!4!}{9!} = \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2} = \frac{1}{210}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.4)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.5. [0,482]
Prostorem stejně pravděpodobných jevů jsou trojice lahví vybraných z 16, kterých je $C_3(16)$. Hledaná pravděpodobnost je pak

$$p = \frac{\binom{10}{2}\binom{6}{1}}{\binom{16}{3}} = \frac{\frac{10\cdot 9}{2}6}{\frac{16\cdot 15\cdot 14}{3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{27}{56} \doteq 0,482.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.5)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.6. [0,484]

$$p = (20 \cdot 12)/\binom{32}{2} = \frac{15}{31}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.6)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.7. [0, 231]

$$p = \frac{4 \cdot (10 \cdot 9)}{40 \cdot 39} = \frac{9}{39}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.7)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.8. [$\frac{1}{3}$]
Vše je jasné, když víme, s kým hraje a:

$$p = \frac{|b|}{|b, c, d|} = \frac{1}{3}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.8)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.9. $[\frac{3}{7}]$

Umístíme 1. nejsilnější, 2. nejsilnější má 7 možností, ale jen 3 jsou příznivé.

Nebo

$$p = (\binom{6}{2} + \binom{6}{4})/\binom{8}{4} = \frac{3}{7}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.9)

Verze 2004-09-03

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.10. [24/10!]

$$p = \frac{3!2!2!}{10!} = \frac{1}{151\,200}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.10)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.11. [0,4375]
Zaznamenáme do čtverce o straně 60 minut místa, kde se setkají, tj. kromě trojúhelníků vlevo nahoře a vpravo dole, tedy s pravděpodobností
$$(60^2 - 2\frac{(60-15)(60-15)}{2})/60^2 = \frac{7}{16}.$$
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.11)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.12. [1/4]
Máme délky x, y a $\ell-x-y$, tj. $y<\ell-x$, $x,y>0$ (trojúhelník). Trojúhelníková nerovnost platí, když zároveň $x+y>\ell/2$, $x<\ell/2$, $y<\ell/2$, tj. 1/4 (prostřední trojúhelníček) původního trojúhelníka.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.12)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.13. [dělit. 6, $\emptyset$, Ω, neděl. 6]
C znamená, že číslo je dělitelné jak 2, tak 3, tedy dělitelné 6. Jev $A^c \cap C$ nikdy nenastane (nedělitelné 2, ale 6 ano není žádné číslo), jev $A \cup C^c$ je jistý (mimo C^c jsou čísla dělitelná 6, a ta jsou sudá), je to doplněk k předchozímu. Jev $A^c \cup B^c$ nastane, není-li číslo dělitelné 6 (buďto není 2, nebo není 3), je doplňkem k C.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.13)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.14. []

$$p = 1 - \mathrm{P}[\text{každý jindy}] = 1 - \frac{365 \cdot 364 \ldots (365-n+1)}{365^n} = 1 - \frac{365!}{(365-n)!365^n}.$$

Přes pravděpodobnost 1/2 se dostaneme už při $n = 23$:

n	10	20	22	23	30	40	50	60
p	0,117	0,411	0,476	0,507	0,706	0,891	0,870	0,994

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.14)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.15. $[0,340]$

$$p = 1 - \text{nebude} = 1 - \binom{28}{3} / \binom{32}{3}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.15)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.16. [0,990]

3 pole z $8 \cdot 8 = 64$ lze vybrat $\binom{8}{3}$ způsoby. Počet případů, kdy všechna leží v určitém sloupci je $\binom{8}{3}$ (sloupec má 8 polí), sloupců je 8, takže

$$p = 1 - \mathrm{P}[\text{všechna leží v 1 sloupci}] = 1 - \frac{8\binom{8}{3}}{\binom{64}{3}} = 1 - \frac{8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1}\,\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{64 \cdot 63 \cdot 62} =$$

$$= 1 - \frac{7 \cdot 6}{63 \cdot 62} = \frac{448}{41\,664} \doteq 0,989\,2.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.16)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.17. []

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}((A\cup B)\cup C)=\mathrm{P}(A\cup B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}((A\cup B)\cap C)=\\
&= \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(C)-\\
&\quad -[\mathrm{P}(A\cap C)+\mathrm{P}(B\cap C)-\mathrm{P}(A\cap C\cap B\cap C)]=\\
&= \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(A\cap C)-\mathrm{P}(B\cap C)+\\
&\quad +\mathrm{P}(A\cap B\cap C)
\end{aligned}
$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.17)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.18. [0,533]

$$p = (1 \cdot \binom{9}{2})/\binom{10}{3} + (1 \cdot \binom{9}{2})/\binom{10}{3} - \binom{8}{1}/\binom{10}{3} = \frac{8}{15}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.18)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.19. [0,702 702]

$$p = \frac{18}{37} + \frac{12}{37} + \frac{4}{37} - (\frac{6}{37} + \frac{2}{37} + 0) + 0 = \frac{26}{37}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.19)

Z řešení 2.20. [91/216, 19/72, 7/24]

Dle předchozího vzorce na $\bigcup_{i=1}^{3}$[šestka na kostce i] (a nezávislost)

$p_1 = \mathrm{P}[\text{aspoň 1 šestka}] = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - (\frac{1}{6}\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\frac{1}{6}) + \frac{1}{6}\frac{1}{6}\frac{1}{6} =$
$= \frac{1}{2} - \frac{3}{36} + \frac{1}{216} = \frac{108-18+1}{216} = \frac{91}{216}$,

i když lépe $p_1 = 1 - \mathrm{P}[\text{žádná šestka}] = 1 - (\frac{5}{6})^3$. Využitím neslučitelnosti

$p_2 = \mathrm{P}[\text{sudé} \vee \text{liché} \vee \text{součet } 4] = \frac{3\cdot3\cdot3}{6\cdot6\cdot6} + \frac{3\cdot3\cdot3}{6\cdot6\cdot6} + \frac{3}{6\cdot6\cdot6} - (0) + 0 =$
$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2\cdot36} = \frac{9+9+1}{72} = \frac{19}{72}$,

a také

$p_3 = \mathrm{P}[\text{sudé} \vee \text{liché} \vee \text{součet } 6] = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{10}{6\cdot6\cdot6} - 0 - \frac{1}{6\cdot6\cdot6} - 0 + 0 = \frac{1}{4} +$
$+ \frac{1}{6\cdot4} = \frac{7}{24}$.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.20)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.21. [Ne,ne]
$\mathrm{P}(A \cap B) = 0,2 \neq 0$, nejsou tedy neslučitelné.

$\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B) = 0,3 \cdot 0,5 = 0,15 \neq \mathrm{P}(A \cap B) = 0,2$, nejsou tedy nezávislé.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.21)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.22. [Ne]
Možné výsledky jsou
$\omega_1 = [\text{lic,lic}]$, $\omega_2 = [\text{lic,rub}]$, $\omega_3 = [\text{rub,lic}]$, $\omega_4 = [\text{rub,rub}]$,
každý s pravděpodobností 1/4. Pro jevy
$A_1 = \{\omega_1, \omega_2\}$, $A_2 = \{\omega_1, \omega_3\}$, $A_3 = \{\omega_1, \omega_4\}$
pak máme

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathrm{P}(\omega_1) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_2)\,\mathrm{P}(A_3),$$

a proto jevy A_1, A_2, A_3 nemohou být nezávislé (přestože po dvojicích jsou).
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.22)

Z řešení 2.23. [Ne]

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{2}{12} \neq \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B),$$

$$\mathrm{P}(A \cap C) = \frac{1}{12} \neq \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(C),$$

$$\mathrm{P}(B \cap C) = \frac{2}{12} = \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(C),$$

tj. po dvojicích pouze B je nezávislé s C, a proto A, B, C nemohou být nezávislé, *přestože*

$$\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{12} = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{3} = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(C).$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.23)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.24. [1/4, 1/8, nezávislé]
$\mathrm{P}(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}[\text{vytažení žaludového esa}] = \frac{1}{32} = \frac{1}{4}\frac{1}{8} = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B),$$

tudíž jevy A, B jsou nezávislé.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.24)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.25. [0,995]

$p = 1 - \text{ani jeden} = 1 - 0,1 \cdot 0,05 = 0,995.$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.25)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.26. $[0{,}72,\ 0{,}922,\ 0{,}950,\ 0,922 + 0,029p,\ 0,922 + 0,014p]$

a) $0,9 \cdot 0,8 = 0,72$,

b) $0,72 + 0,72 - 0,72 \cdot 0,72 = 0,72 \cdot (2 - 0,72) = 0,72 \cdot 1,28 = 0,921\,6$,

c) $[0,9 + 0,9 - 0,9 \cdot 0,9][1 - (1 - 0,8)(1 - 0,8)] = 0,99 \cdot 0,96 = 0,950\,4$,

d) buď C pracuje a jsme jako v c), nebo nepracuje a jsme jako v b), tedy $p \cdot p_{c)} + (1 - p)p_{b)} = 0,9504p + 0,9216(1 - p) = 0,921\,6 + 0,028\,8p$,

e) pracuje-li C, pak buď B u jeho výstupu funguje a stačí, aby fungovalo aspoň jedno A, nebo nefunguje (není z C kudy pokračovat) a potřebujeme A a B u vstupu C; nepracuje-li C, máme situaci b), dohromady $p(0,99 \cdot 0,8 + 0,72 \cdot 0,2) + (1 - p)p_{b)} = 0,936p + 0,9216(1 - p) = 0,921\,6 + 0,014\,4p$.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.26)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.27. [Ano]
Disjunktnost a nezávislost:

$$0 = P(A \cap B) = P(A)\,P(B),$$

tedy disjunktní mohou být nezávislé, jen když aspoň jeden z nich má nulovou pravděpodobnost.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.27)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.28. $[\frac{1}{2} + 2\varepsilon^2]$

$$p = (\frac{1}{2} + \varepsilon)^2 + (\frac{1}{2} - \varepsilon)^2 = \frac{1}{2} + 2\varepsilon^2,$$

což je blíž k $\frac{1}{2}$ než původní pravděpodobnosti, lze tedy omezovat vliv nepravidelnosti mince.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.28)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.29. [$\frac{5}{16}$]

$$p = \mathrm{P}[3, \text{ nebo } 4] = \binom{4}{3}(\tfrac{1}{2})^3(\tfrac{1}{2})^1 + \binom{4}{4}(\tfrac{1}{2})^4(\tfrac{1}{2})^0 = \frac{5}{16}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.29)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.30. [0,078]

$$p = \sum_{k=5}^{10} \binom{10}{k} (\tfrac{1}{4})^k (\tfrac{3}{4})^{10-k} = \frac{81\,922}{1\,048\,546} \doteq 0,078.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.30)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.31. [0,740]

$$p = \binom{30}{30} 0,99^{30} 0,01^{0} = 0,9930 = 0,740.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.31)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.32. [1,6%]

$$p = 1 - \text{žádný nebo 1 vadný} = 1 - 0,98^{10} - \binom{10}{1} 0,02^1 0,98^9 = 0,016\,177.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.32)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.33. [7]

$0,9 < 1 - \mathrm{P}[\text{ani jednou}] = 1 - 0,7^n$,
tj. $n > \frac{\ln 0,1}{\ln 0,7} = 6,46$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.33)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.34. [0,6]

p_i — porucha i-tý den. Známe

$$P(p_1 \cap p_2) = 0,5, \quad P(p_1^c \cap p_2^c) = 0,3,$$

tudíž

$$P(p_1 \setminus p_2) = P(p_2 \setminus p_1) = \frac{1 - 0,5 - 0,3}{2} = 0,1 \text{ a } P(p_1) = P(p_2) = 0,5 + 0,1.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.34)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.35. [0,52]
Známe $Ch_1 \cap Ch_2$, $D_1 \cap D_2$, tudíž

$$\mathrm{P}(Ch_1 \cap D_2) = \mathrm{P}(D_1 \cap Ch_2) = (1 - 0,30 - 0,34)/2 = 0,18$$

a

$$\mathrm{P}(Ch_1) = \mathrm{P}(Ch_2) = 0,34 + 0,18 = 0,52.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.35)

Z řešení 2.36. $[\frac{m!}{m^n(m-n)!}]$
Zaznamenáme ke každému střelci číslo jeho cíle,

$$p = \frac{m(m-1)\cdot\ldots(m-n+1)}{m^n} = \frac{m!}{m^n(m-n)!}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.36)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.37. [0,311, 0,083]

$$p_1 = \binom{45}{10} \Big/ \binom{50}{10}, \quad p_2 = \binom{40}{10} \Big/ \binom{50}{10}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.37)

Z řešení 2.38. [0,018]
Mezi 6 čísly vylosovanými z 49 musí být 3 z 6 námi vsazených a 3 ze $49 - 6 = 43$ nevsazených,

$$p = \frac{\binom{6}{3}\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} \doteq 0{,}017\,65 \doteq 1/56.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.38)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.39. [0,8]

$$p = \binom{45}{2} / \binom{50}{2} = \frac{198}{245} \doteq 0,8.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.39)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.40. [0,0009, 0,569]
$p_1 = 1/\binom{20}{3}$, $p_2 = \binom{17}{3}/\binom{20}{3}$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.40)

Verze 2004-09-03

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.41. [0,538]

$$p = 1 - \mathrm{P}[\text{žádný odhalen}] = 1 - \binom{25}{4} / \binom{30}{4}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.41)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.42. [0,409, 0,660]

$$p_1 = 1 - \mathrm{P}[\text{žádná výhra}] = 1 - \binom{190}{10} / \binom{200}{10},$$

podobně $p_2 = 1 - \binom{180}{10} / \binom{200}{10}$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.42)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.43. [0,793]
Pro každou trojici žáků je pravděpodobnost, že budou vyzkoušeni vždy stejná, takových trojic je $C_3(30)$. Příznivý je nastává, jsou-li zkoušeni 2 z $0,7 \cdot 30 = 21$ připravených a 1 z $0,3 \cdot 30 = 9$ nepřipravených, nebo 3 připravení a žádný nepřipravený, tj.

$$p = \mathrm{P}[\text{2 nebo 3 připraveni}] = \left(\binom{21}{2}\binom{9}{1} + \binom{21}{3}\binom{9}{0}\right) / \binom{30}{3} =$$
$$= \frac{1\,890 + 1\,330}{4\,060} \doteq 0,793\,1.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.43)

Z řešení 2.44. [jednou kostkou]

$$p_1 = 1 - \frac{5^4}{6^4} = \frac{671}{1296} \doteq 0,518,$$
$$p_2 = 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} \doteq 0,491.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.44)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.45. $[(1-1/n)^r, (1-2/n)^r]$
Pro jednotlivé míčky vybíráme krabičky:

$$p_1 = \frac{(n-1)^r}{n^r}, \quad p_2 = \frac{(n-2)^r}{n^r}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.45)

Z řešení 2.46. $[2(n!)^2/(2n)!]$
Příznivé usazení z celkem $(2n)!$ možných (a stejně pravděpodobných) nastane, sednou-li si všichni muži na sudá místa (to je pro muže $n!$ možností) a k tomu ženy na lichá ($n!$), což je $n!n!$ usazení, anebo opačně. Celková pravděpodobnost tak je $p = \frac{2n!n!}{(2n)!}$.

Stejně tak můžeme usazení reprezentovat posloupností nul a jedniček délky $2n$, ve které je n nul a n jedniček (mužů i žen je stejně), takových je $\binom{2n}{n}$. Příznivý jev pak znamená pravidelně se střídající nuly a jedničky, což jsou 2 případy (podle toho, čím posloupnost začíná). Dospějeme k témuž výsledku $p = 2/\binom{2n}{n} = 2n!n!/(2n)!$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.46)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.47. []

Se střídáním: Příznivá situace nastane usazením onoho muže na jedno z $2n$ míst, vybráním 1 přítelkyně z k za pravou sousedku, 1 ze zbylých $k-1$ za levou (resp. vybráním 2 z k, ty se pak ještě mohou navzájem prohodit), pak se posadí ostatní ženy na $n-2$ zbylých míst určených pro ženy a $n-1$ mužů na zbylá místa. Takže

$$p = \frac{2n \cdot k(k-1) \cdot (n-2)! \cdot (n-1)!}{(2n)!}.$$

Bez střídání: Situace se liší až v závěru, kdy $(n-1)+(n-2)$ zbylých mužů a žen se libovolně posadí na $n-3$ míst:

$$p = \frac{2n \cdot k(k-1) \cdot (2n-3)!}{(2n)!}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.47)

Verze 2004-09-03

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.48. []
Protože nám záleží na pořadí, elementárním jevem je k-členná posloupnost čísel označujících jednotlivé koule. Těchto posloupností je $V_k(a+b) = (a+b)!/k!$. Příznivý jev nastává, jsou-li na prvních $k-1$ místech černé koule a na k-tém místě bílá, tj. $V_{k-1}(a)V_1(b)$.

Takže

$$p = \left(\frac{a!}{(a-k+1)!}b\right) / \frac{(a+b)!}{(a+b-k)!} = \frac{a!b}{(a-k+1)!}\frac{(a+b-k)!}{(a+b)!}.$$

Anebo na základě podmíněné pravděpodobnosti: v jednotlivých tazích postupně vybíráme z b černých, pak z $b-1$ černých,..., nakonec 1 bílá z a,

$$p = \frac{a}{a+b}\frac{a-1}{a+b-1}\cdots\frac{a-k+2}{a+b-k+2}\cdot\frac{b}{a+b-k+1}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.48)

Verze 2004-09-03

Z řešení 2.49. [1/n]
Je-li $b = 1$ (počet správných klíčů), $a = n - 1$ (počet nesprávných), dostaneme dle předchozího

$$p = \frac{(n-1)! \cdot 1}{(n-1-k+1)!} \cdot \frac{(n-1+1-k)!}{(n-1+1)!} = \frac{1}{n},$$

což na k vůbec nezávisí!
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.49)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.50. [závislé]

$0,15 \cdot 0,1 \neq 0,05$, tedy závislé.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.50)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.51. [0,28]

$p = 1 - \mathrm{P}[\text{nevyhraje žádný}] = 1 - 0,8 \cdot 0,9 = 0,28.$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.51)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.52. [závislé, 0,98]

Označme jako A a B jevy, že výrobek má vyhovující rozměr, resp. hmotnost. Dle zadání

$$P(A) = 0{,}96, \quad P(B) = 0{,}93, \quad P(A^C \cup B^C) = 0{,}09.$$

Můžeme spočítat pravděpodobnost, že výrobek je vyhovující v obou směrech, jako

$$P(A \cap B) = 1 - P((A \cap B)^C) = 1 - P(A^c \cup B^c) = 1 - 0{,}09 = 0{,}91.$$

Rovnost

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

neplatí, jevy A a B (a tedy i jevy A^C a B^C tak nejsou neávislé).

Nakonec máme spočítat pravděpodobnost, že nenastane A^C a B^C současně, tedy že nastane aspoň jeden z jevů A nebo B,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}96 + 0{,}93 - 0{,}91 = 0{,}98.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.52)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.53. [závislé]

$0,10 \cdot 0,06 \neq 0,03$, takže závislé.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.53)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.54. [0,0688]

$p = 0,03 + (0,2 \cdot 0,2) - 0,03 \cdot (0,2 \cdot 0,2) = 0,0688.$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.54)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.55. [0,988]

$p = 0,95 + (0,9 \cdot 0,85) - 0,95 \cdot (0,9 \cdot 0,85) \doteq 0,988.$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.55)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.56. [0,930]

$$p = \mathrm{P}[\text{funguje } 8,\, 9, \text{ nebo } 10] = \binom{10}{8} 0,9^8 0,1^2 + \binom{10}{9} 0,9^9 0,1^1 + \binom{10}{10} 0,9^1 0 0,1^0 = 0,930.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.56)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.57. [0,994, 0,496]

$p_1 = 1 - \mathrm{P}[\text{žádná včas}] = 1 - 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,3 = 0,994,$

$p_2 = 1 - \text{žádná pozdě} = 1 - 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = 0,496.$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.57)

Z řešení 2.58. [≥10, 7]

P[žádný líc] $= 0{,}5^{n_1} < 0{,}001$,
tedy $n_1 > \frac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}5} = 9{,}97$, podobně $n_2 > \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}5} = 6{,}64$,
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.58)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.59. [$\geqq 4$]

P[vůbec nepadne] $= (\frac{5}{6})^n < \frac{1}{2}$,
tedy $n > \ln \frac{1}{2} / \ln \frac{5}{6} = 3,8$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.59)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.60. [7/8]

Prostorem $\mathbf{\Omega}$ může být množina posloupností (délky 4) zaznamenávající výsledků hodů, která má 2^4 prvků (variace s opakováním ze 2 prvků). Doplňkem ke zkoumanému jevu je pravidelné střídání obou stran, jemuž odpovídají 2 elementární jevy (podle toho, zda posloupnost začne rubem, nebo lícem).

Hledaná pravděpodobnostje pak doplněk do 1:

$$p = 1 - \mathrm{P}[\text{strany se střídaly}] = 1 - \frac{2}{2^4} = \frac{7}{8}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.60)

Z řešení 2.61. [0,388]

Vybrané kostky lze k sobě přiložit,

a) buď když jedna z kostek má dvě stejná políčka a druhá je ze 6 dalších obsahujících totéž políčko jako první (to je $7 \cdot 6$ možností), anebo

b) na žádné nejsou stejná políčka: jedna je z 21, které mají různá políčka, a druhá z 10 s různými políčky, které se k ní hodí (5 ke každému políčku), což dává $21 \cdot (5+5)/2$ možností (nezáleží nám, na pořadí vytažení kostky na prvním nebo druhém místě).

Celkově (vybrat 2 kostky lze $C_2(28)$ způsoby)

$$p = \frac{7 \cdot 6 + 21 \cdot (5+5)/2}{\binom{28}{2}} = \frac{147}{378} = \frac{7}{18} = 0{,}388.$$

Nebo postupujeme po tazích: v prvním vytáhneme dvojitou (resp. nedvojitou) z 28 a v druhém k ní se hodící nedvojitou (resp. kteroukoli hodící se) z 27, tj.

$$p = \frac{7}{28}\frac{6}{27} + \frac{21}{28}\frac{12}{27}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.61)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.62. [4/7]
V každé skupině posloupnosti, kde černé koule jsou na stejných místech, si je odmysleme a zkoumáme, kdy je ve zbývající posloupnosti 4 červených a 3 bílých koulí červená na prvním místě — je to ve 4/7 případů.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.62)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.63. $[3mn/(m+n)/(m+n-1)]$

Všech možností, jak zvolit 3 body z $m+n$ je $\binom{m+n}{3}$. Mají-li tvořit trojúhelník, musí být dva z a a jeden z b, anebo naopak:

$$p = (\binom{n}{2}\binom{m}{1} + \binom{n}{1}\binom{m}{2})/\binom{m+n}{3} = (\frac{n(n-1)}{2}m + n\frac{m(m-1)}{2})/\frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{mn(m+n-2)/2}{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)/6} = \frac{3mn}{(m+n)(m+n-1)}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.63)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.64. $[\frac{(n-4)(n-5)}{(n-1)(n-2)}]$
3 vrcholy lze vybrat $C_3(n) = \binom{n}{3}$ způsoby. Naopak jednu společnou stranu má $n(n-4)$ trojúhelníků (je-li dána jedna z n stran n-úhelníku, lze trojúhelník s jedinou společnou stranou vytvořit s $n-4$ nesousedními vrcholy) a dvě společné strany n trojúhelníků (dvojic sousedních stran v n-úhelníku je n, tím už je trojúhelník určen). Takže

$$p = 1 - \mathrm{P}[\text{mají aspoň 1 společnou stranu}] = 1 - \frac{n(n-4)+n}{\binom{n}{3}} = 1 -$$
$$- \frac{n(n-3)}{\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}} = 1 - 6\frac{n-3}{(n-1)(n-2)} = \frac{(n-4)(n-5)}{(n-1)(n-2)}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.64)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.65. $[\binom{2n}{n}2^{-2n}]$

Pravděpodobnostním prostorem mohou být posloupnosti nul a jedniček délky $2n$ (označující kam v kterém kroku jdeme). Abychom po $2n$-tém kroku stáli v nule, musíme jít v průběhu stejněkrát (tj. n krát) doleva a n krát doprava:

$$p = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.65)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.66. []

Ve $2n$ krocích musíme jít stejněkrát, řekněme $i\times$ ($i = 0, \dots, n$), ve směru osy x jako proti jejímu směru. Ve zbývajících $2n - 2i$ krocích pak y stejněkrát, řekněme $j\times$ ($j = 0, \dots, n - i$), ve směru osy jako proti němu. Konečně ve zbývajících $2n - 2i - 2j$ krocích stejněkrát, tj. $n - i - j\times$, ve směru osy z jako proti:

$$p = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{2n}{i}\binom{2n-i}{i}\cdot\binom{2n-2i}{j}\binom{2n-2i-j}{j}\cdot\binom{2n-2i-2j}{n-i-j}/6^{2n} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\frac{(2n)!}{i!i!j!j!(n-i-j)!(n-i-j)!}6^{-2n}$$

(tj. z $2n$ kroků jich je i doprava, i doleva, j dopředu, j dozadu, $n - i - j$ nahoru a $n - i - j$ dolu).

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.66)

Verze 2004-09-03

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.67. []

Prostorem elementárních jevů je posloupnost délky r obsahující osoby, které se postupně zprávu dozvídají, tj. posloupnost obsahující čísla $1, \ldots, n$, v níž žádná dvě sousední čísla nejsou stejná (nelze zprávu předat sám sobě). Těchto posloupností je $(n-1)^r$ (vždy je $n-1$ možností, komu zprávu předat). Tudíž

$$p_1 = 1 - \mathrm{P}[\text{dozvídají se ji stále noví lidé}] = 1 - \tfrac{(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r)}{(n-1)^r}.$$

Podobně

$$p_2 = 1 - \mathrm{P}[\text{nikdy k autorovi}] = 1 - \frac{(n-1)(n-2)^{r-1}}{(n-1)^r}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.67)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.68. []

Přinejhorším na prázdnou krabičku narazí v $2n+1$-ním tahu. Pravděpodobnostním prostorem pro nás budou posloupnosti délky $2n+1$ s nulami a jedničkami (tj. z které kapsy chtěl tahat v kterém tahu), kterých je 2^{2n+1}.

V příznivém případě z prvních $2n-k$ sirek vytáhl n z levé a $n-k$ z pravé, pak chce táhnout z levé, která už je prázdná, a zbylých k pokusů už je nám to jedno; anebo naopak prázdnou je pravá:

$$p = \frac{\binom{2n-k}{n} \cdot 1 \cdot 2^k}{2^{2n+1}} \cdot 2 = \binom{2n-k}{n} 2^{k-2n}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.68)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.69. [0,590]
Víme, že šestý pochází z $200 - 5 = 195$ žáků, mezi nimiž je $0,6 \cdot 200 - 5 = 115$ těch, kteří umí, tudíž

$$p = \frac{115}{195} \doteq 0,5897.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.69)

K ZADÁNÍ

Z řešení 2.70. $[-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!},\ 1-e^{-1}]$
Nechť jev A_i je „číslo i na svém místě“. Podle vzorce pro sjednocení

$$p_n = P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = n\frac{1\cdot(n-1)!}{n!} - \binom{n}{2}\frac{1\cdot 1\cdot(n-2)!}{n!} + \cdots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}\frac{1\cdot 1\ldots 1}{n!} = -\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!} = -\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} \to -e^{-1}+1.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.2.70)

3. Podmíněná pravděpodobnost

Z řešení 3.1. [3/11]

$$\mathrm{P}[\text{součet} > 10 \,|\, \text{aspoň 1 šestka}] = \frac{\frac{|\{[6,5],[6,6],[5,6]\}|}{6\cdot 6}}{\frac{6+6-1}{6\cdot 6}} = \frac{3}{11}$$

(jakoby podíl příznivých ve zmenšeném pravděpodobnostním prostoru — padnutí aspoň jedné šestky).

Avšak

$$\mathrm{P}[\text{aspoň jedna šestka} \,|\, \text{součet} > 10] = 1,$$

neboť [součet > 10] ⊂ [aspoň jedna šestka].

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.1)

K ZADÁNÍ

Z řešení 3.2. [0,4]

$$p = \frac{0,02}{0,05} = 0,4.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.2)

K ZADÁNÍ

Z řešení 3.3. $[\frac{1}{3}]$

Stejně pravděpodobné jsou

$$(1, z_1), (1, z_2), (2, z), (2, s), (3, s_1), (3, s_2),$$

podmíněná pravděpodobnost je

$$p = \frac{|(2, s)|}{|(2, s), (3, s_1), (3, s_2)|} = \frac{1}{3}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.3)

K ZADÁNÍ

Z řešení 3.4. $[a/(a+b-1)]$

Označme $B_1 =$ [v 1. tahu bílá], $A_2 =$ [ve 2. tahu černá].

$$\mathrm{P}(A_2 \mid B_1) = \frac{\mathrm{P}(A_2 \cap B_1)}{\mathrm{P}(B_1)} = \frac{\frac{ba}{(a+b)(a+b-1)}}{\frac{b(a+b-1)}{(a+b)(a+b-1)}} = \frac{a}{a+b-1}$$

(jako bychom obyčejně táhli černou z urny s a černými a $b-1$ bílými).

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.4)

K ZADÁNÍ

Z řešení 3.5. [závislé, $(n-1)/(N-1)$]
$\Omega = \{v; v \subset \{1, 2, \dots N\}, |v| = n\}$, k „$j$“ vybíráme $n-1$ dalších:

$$P(V_j) = \frac{1 \cdot \binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!} \frac{(N-n)!n!}{N!} = \frac{n}{N},$$

$$P(V_1 \cap V_2) = P(V_i \cap V_j) = \frac{1 \cdot 1 \cdot \binom{N-2}{n-2}}{\binom{N}{n}} = \frac{n(n-1)}{N(N-1)} \neq P(V_1)\,P(V_2) = \\ = P(V_i)\,P(V_j), \quad \text{pro } i \neq j,$$

takže $V_1, \dots, V_N$ nemohou být nezávislé.

Pro $k \neq j$ je

$$P[V_k \mid V_j] = P(V_k \cap V_j)/P(V_j) = (n-1)/(N-1).$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.5)

Verze 2004-09-03

K ZADÁNÍ

Z řešení 3.6. [0,6]

$$p = \mathrm{P}[B \mid A^c] = \frac{\mathrm{P}(B \cap A^c)}{\mathrm{P}(A^c)} = \frac{\mathrm{P}(B)}{1 - \mathrm{P}(A)} = \frac{0,3}{0,5} = 0,6.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.6)

K ZADÁNÍ

Z řešení 3.7. $[0,5,\ \frac{1}{3}]$

$$\mathrm{P}[B \mid A^c] = \frac{0,3}{0,6} = 0,5, \quad \mathrm{P}[C \mid A^c] = \frac{0,2}{0,6} = \frac{1}{3},$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.7)

K ZADÁNÍ

Z řešení 3.8. [$\mathrm{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$]

$$\mathrm{P}(A_1) \cdot \frac{\mathrm{P}(A_2 \cap A_1)}{\mathrm{P}(A_1)} \cdot \frac{\mathrm{P}(A_3 \cap A_2 \cap A_1)}{\mathrm{P}(A_2 \cap A_1)} \cdot \dots \cdot \frac{\mathrm{P}(A_n \cap A_{n-1} \cap \dots \cap A_1)}{\mathrm{P}(A_{n-1} \cap \dots \cap A_1)} = \\ = \mathrm{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i).$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.8)

Z řešení 3.9. [0,708]

Pravděpodobnost tahu z první (resp. druhé) urny, je 1/2. Označíme-li $B =$ [tah bílé koule], $U_i =$ [tah z urny i], je podle věty o celkové pravděpodobnosti

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B \,|\, U_1)\,\mathrm{P}(U_1) + \mathrm{P}(B \,|\, U_2)\,\mathrm{P}(U_2) = \frac{6}{6+2}\frac{1}{2} + \frac{4}{4+2}\frac{1}{2} = $$

$$= \frac{17}{24} \doteq 0{,}708\,3.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.9)

K ZADÁNÍ

Z řešení 3.10. [0,83]

$p = 0,8 \cdot 0,4 + 0,9 \cdot 0,3 + 0,8 \cdot 0,3 = 0,32 + 0,27 + 0,24 = 0,83.$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.10)

K ZADÁNÍ

Z řešení 3.11. [0,97]
Podle věty o celkové pravděpodobnosti (poměr výrobků v bedně je 2 : 1 ve prospěch automatu A, tj. 2/3 výrobků pochází od A a 1/3 od B)

$$p = \frac{2}{3}0,98 + \frac{1}{3}0,95 = \frac{1,96 + 0,95}{3} = \frac{2,91}{3} = 0,97.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.11)

K ZADÁNÍ

Z řešení 3.12. [14,61 %]

Označme Z = zmetek, V = vyřadí. Známe

$$\mathrm{P}(Z) = 13\,\%, \quad \mathrm{P}(V^c \mid Z) = 1\,\%, \quad \mathrm{P}(V \mid Z^c) = 2\,\%.$$

Podle věty o celkové pravděpodobnosti

$$\mathrm{P}(V) = \mathrm{P}(V \mid Z)\,\mathrm{P}(Z) + \mathrm{P}(V \mid Z^c)\,\mathrm{P}(Z^c) = (1 - 0{,}01)0{,}13 + 0{,}02(1 - 0{,}13) = 0{,}146\,1.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.12)

Verze 2004-09-03

K ZADÁNÍ

Z řešení 3.13. [$\frac{b}{b+c}$ obě]

$$p_1 = \frac{b}{b+c},$$

$$p_2 = \frac{b}{b+c}\frac{b-1}{b+c-1} + \frac{c}{b+c}\frac{b}{b+c-1} = \frac{b}{b+c}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.13)

K ZADÁNÍ

Z řešení 3.14. [0,022]

$p = 0,02(1-0,05) + 0,06 \cdot 0,05 = 0,022.$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.14)

K ZADÁNÍ

Z řešení 3.15. [0,46]

Podle toho, která dvojice bude vybrána

$$p = (0,9 \cdot 0,9)\frac{4 \cdot 3}{20 \cdot 19} + (0,9 \cdot 0,7)\frac{4 \cdot 10}{20 \cdot 19} + \cdots + (0,5 \cdot 0,5)\frac{10 \cdot 9}{20 \cdot 19} = 0,46.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.15)

K ZADÁNÍ

Z řešení 3.16. [5/16]

$$p = \frac{0,5 \cdot (1/3)}{0,3 \cdot (1/3) + 0,5 \cdot (1/3) + 0,8 \cdot (1/3)} = \frac{5}{16}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.16)

Z řešení 3.17. [0,21]

Ptáme se na $p = \mathrm{P}[-++ \mid 2 \text{ zásahy}]$. Do Bayesovy věty $\mathrm{P}[2 \mid -++] = 1$, podobně při ostatních podmínkách s právě jedním ze střelců nezasahujícím (a výsledkem 0 při dvou či žádném minusu v podmínce). Tedy

$$p = \frac{1 \cdot (0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,4)}{1 \cdot (0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,4) + 1 \cdot (0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,4) + 1 \cdot (0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,6) + 0 \cdot ?} = \frac{4}{19}.$$

Lépe asi přímo z definice

$$p = \frac{\mathrm{P}[-++ \cap 2 \text{ zásahy}]}{\mathrm{P}[2 \text{ zásahy}]} = \frac{\mathrm{P}[-++]}{\mathrm{P}[-++] + \mathrm{P}[+-+] + \mathrm{P}[++-]}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.17)

K ZADÁNÍ

Z řešení 3.18. [0,143, 0,457, 0,4]

$$p_1 = \frac{2 \cdot 0,9 \cdot 0,1 \frac{5}{20}}{2 \cdot 0,9 \cdot 0,1 \frac{5}{20} + 2 \cdot 0,8 \cdot 0,2 \frac{9}{20} + 2 \cdot 0,7 \cdot 0,3 \frac{6}{20}} = 0,143.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.18)

K ZADÁNÍ

Z řešení 3.19. [0,323]

Označíme-li $V = [\text{vadný}]$, $U = [\text{ukazuje vadu}]$, známe

$$\mathrm{P}(U \mid V) = 0,95, \quad \mathrm{P}(U \mid V^c) = 0,01, \quad \mathrm{P}(V) = 0,005.$$

Pomocí Bayesovy věty

$$\mathrm{P}(V \mid U) = \frac{\mathrm{P}(U \mid V)\,\mathrm{P}(V)}{\mathrm{P}(U \mid V)\,\mathrm{P}(V) + \mathrm{P}(U \mid V^c)\,\mathrm{P}(V^c)} = \\ = \frac{0,95 \cdot 0,005}{0,95 \cdot 0,005 + 0,01 \cdot 0,995} = \frac{0,00475}{0,00475 + 0,00995} = \\ = 0,00475/0,0147 \doteq 0,323.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.19)

K ZADÁNÍ

Z řešení 3.20. [0,376]
Označíme-li $A = [\text{má AIDS}]$, $T = [\text{test říká AIDS}]$, známe

$$\mathrm{P}(T \mid A) = 0,999, \quad \mathrm{P}(T^c \mid A^c) = 0,99, \quad \mathrm{P}(A) = 0,006.$$

Bayesova věta nám dá

$$\mathrm{P}(A \mid T) = \frac{\mathrm{P}(T \mid A)\,\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(T \mid A)\,\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(T \mid A^c)\,\mathrm{P}(A^c)} = $$
$$= \frac{0,999 \cdot 0,006}{0,999 \cdot 0,006 + (1 - 0,99) \cdot (1 - 0,006)} \doteq 0,376.$$

(2004-09-03.`1ad111ppx1cyaq.3.20`)

Z řešení 3.21. [0,5625, 0,25, 0,1875]
Označíme-li $A =$ [ve 20 hod. byl doma] a B_1, B_2, B_3 zdržení z jednotlivých příčin, je podle Bayesovy věty

$$\mathrm{P}(B_1 \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \mid B_1)\,\mathrm{P}(B_1)}{\sum_{i=1}^{3} \mathrm{P}(A \mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i)} = \frac{0,9 \cdot 0,3}{0,9 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,6 + 0,9 \cdot 0,1} = \frac{0,27}{0,48} = \frac{9}{16} = 0,5625.$$

Podobně $\mathrm{P}(B_2 \mid A) = 0,2 \cdot 0,6/0,48 = 1/4 = 0,25$, $\mathrm{P}(B_3 \mid A) = 0,9 \cdot 0,1/0,48 = 3/16 = 0,1875$.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.21)

K ZADÁNÍ

Z řešení 3.22. [0,69, 0,3]

$$p_1 = \frac{0,9 \cdot (2/6)}{0,9 \cdot (2/6) + 0,2 \cdot (4/6)} \doteq 0,69.$$

$$p_2 = \frac{0,2 \cdot (4/6)}{0,9 \cdot (2/6) + 0,2 \cdot (4/6)} \doteq 0,3,$$

resp. $p_2 = 1 - p_1$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.22)

Z řešení 3.23. [0,97, 0,1235]
Označíme-li V_i = [vysláno i], P_i = [přijato i], je

$$\mathrm{P}(V_1 \mid P_1) = \frac{\mathrm{P}(P_1 \mid V_1)\,\mathrm{P}(V_1)}{\mathrm{P}(P_1 \mid V_1)\,\mathrm{P}(V_1) + \mathrm{P}(P_1 \mid V_0)\,\mathrm{P}(V_0)} =$$
$$= \frac{0,8 \cdot 0,55}{0,8 \cdot 0,55 + 0,03 \cdot 0,45} \doteq 0,97,$$
$$\mathrm{P}[\text{chybný příjem}] = \mathrm{P}(P_0 \cap V_1) + \mathrm{P}(P_1 \cap V_0) = \mathrm{P}(P_0 \mid V_1)\,\mathrm{P}(V_1) +$$
$$+ \mathrm{P}(P_1 \mid V_0)\,\mathrm{P}(V_0) = 0,2 \cdot 0,55 + 0,03 \cdot 0,45 = 0,11 + 0,0135 = 0,1235.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.23)

K ZADÁNÍ

Z řešení 3.24. [0,62]
Značíme-li B = [rozbliká se] a P = [porucha], známe $\mathrm{P}(P) = 0,003$, $\mathrm{P}[B \mid P] = 0,999$ a $\mathrm{P}[B \mid P^c] = 0,005$. Dle Bayesovy věty zjistíme

$$\mathrm{P}[P^c \mid B] = \frac{\mathrm{P}[B \mid P^c]\,\mathrm{P}(P^c)}{\mathrm{P}[B \mid P^c]\,\mathrm{P}(P^c) + \mathrm{P}[B \mid P]\,\mathrm{P}(P)} =$$
$$= \frac{0,005 \cdot 0,997}{0,005 \cdot 0,997 + 0,999 \cdot 0,003} = \frac{4,985 \cdot 10^{-3}}{7,982 \cdot 10^{-3}} = 0,6245.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.24)

Z řešení 3.25. [0,944, závislé]
Označíme-li $D =$ [Dobrý splatí], $Z =$ [Zlý splatí], můžeme dopočítat

$$\mathrm{P}(D \cap Z) = \mathrm{P}(D) + \mathrm{P}(Z) - \mathrm{P}(D \cup Z) = 0,9 + 0,1 - 0,95 = 0,05.$$

Protože podmíněná pravděpodobnost se chová jako pravděpodobnost,

$$\mathrm{P}(Z^c \,|\, D) = 1 - \mathrm{P}(Z \,|\, D) = 1 - \frac{\mathrm{P}(Z \cap D)}{\mathrm{P}(D)} = 1 - \frac{0,05}{0,9} = \frac{17}{18} \doteq 0,944\,4 \neq 1 - - 0,1 = \mathrm{P}(Z^c),$$

takže splacení jednotlivých úvěrů nejsou nezávislá.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.25)

K ZADÁNÍ

Z řešení 3.26. [0,6]

$$\mathrm{P}[B\,|\,V] = \frac{\mathrm{P}(B \cap V)}{\mathrm{P}(V)} = \frac{\mathrm{P}[V\,|\,B]\,\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(V)} = \frac{0,1 \cdot 0,3}{0,05} = 0,6.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.26)

K ZADÁNÍ

Z řešení 3.27. [6/7]
Označíme-li $K =$ [výrobek je kvalitní], $T =$ [vyhověl v testu], známe

$\mathrm{P}(K) = 0,6, \quad \mathrm{P}(K^c \cap T) = 0,1, \quad \mathrm{P}(T) = 0,7.$

K výpočtu podmíněné pravděpodobnosti se hodí znát

$\mathrm{P}(K \cap T) = \mathrm{P}(T \setminus (K^c \cap T)) = \mathrm{P}(T) - \mathrm{P}(K^c \cap T) = 0,7 - 0,1 = 0,6.$

Hledaná podmíněná pravděpodobnost je

$\mathrm{P}(K \mid T) = \mathrm{P}(K \cap T)/\mathrm{P}(T) = 0,6/0,7 = 6/7.$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.27)

K ZADÁNÍ

Z řešení 3.28. [0,673]
stejné − 2různé, tedy

$$Ch_1 \cap D_2 = \frac{1}{2} \cdot \text{různé} = \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

$$p = \frac{Ch_1 \cap Ch_2}{Ch_1} = \frac{Ch_1 \setminus (Ch_1 \cap D_2)}{Ch_1} = \frac{0,51 - 1/6}{0,51} = 0,673.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.28)

K ZADÁNÍ

Z řešení 3.29. [0,2816]

$$p = 0,2 \cdot \binom{3}{1} 0,4^2 0,6^2 + 0,5 \cdot \binom{3}{2} 0,4^2 0,6^1 + 0,8 \cdot 0,4^3 = 0,2816.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.29)

K ZADÁNÍ

Z řešení 3.30. [0,217 54]

$$p = 1 \cdot 0,1^4 + 1 \cdot \binom{4}{3} 0,1^3 0,9^1 + 0,8 \cdot \binom{4}{2} 0,1^2 0,9^2 + 0,6 \cdot \binom{4}{1} 0,1^1 0,9^3 + 0 = \\ = 0,217\,54.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.30)

K ZADÁNÍ

Z řešení 3.31. [0,3368]

Žádný zásah: $0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = 0,504$, jeden zásah

$0,1 \cdot 0,8 \cdot 0,7 + 0,9 \cdot 0,2 \cdot 0,7 + 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,3 = 0,398$,

aspoň 2 $1 - 0,504 - 0,398 = 0,098$. tedy

$p = 1 \cdot 0,098 + 0,6 \cdot 0,398 = 0,3368$.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.31)

K ZADÁNÍ

Z řešení 3.32. $[\ldots, (s-1)/n]$

Označme $B = [\text{výběr nejlepšího}]$, $Q = [\text{neprovdá se}]$. Je-li nejlepší k-tý, zbývá na ostatní $n-1$ míst:

$$\mathrm{P}(A_k) = \mathrm{P}[\text{nejlepší přišel jako } k\text{-tý}] = [1 \cdot (n-1)!]/n! = 1/n.$$

Předpokládejme $s > 1$. Vybrala-li si nejlepšího a ten přišel jako k-tý, přišlo před ním $k-1$ nápadníků z $n-1$. Z nich nejlepší musel být mezi prvními $s-1$ příchozími, ostatních $k-2$ předchozích mohlo přijít libovolně. Pak přišel onen nejlepší. Po něm $n-k$ zbylých mohlo přijít v jakémkoli pořadí, tedy

$$\mathrm{P}(B \cap A_k) = \left[\binom{n-1}{k-1}(s-1)(k-2)! \cdot 1 \cdot (n-k)!\right]/n! = \frac{s-1}{n(k-1)},\ k \geqq s,$$

pro $k < s$ pochopitelně $\mathrm{P}(B \cap A_k) = 0$. Vzhledem k tomu, že A_k tvoří rozklad, je

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(B \cap A_k) = \sum_{k=s}^{n} \tfrac{s-1}{n(k-1)} = \tfrac{s-1}{n}\left(\tfrac{1}{s-1} + \tfrac{1}{s} + \cdots + \tfrac{1}{n-1}\right),$$

Stejně tak

$$\mathrm{P}(B \,|\, A_k) = \frac{\mathrm{P}(B \cap A_k)}{\mathrm{P}(A_k)} = \frac{s-1}{k-1}$$

a podle věty o celkové pravděpodobnosti

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(B \,|\, A_k)\,\mathrm{P}(A_k) = \sum_{k=s}^{n} \frac{s-1}{k-1}\frac{1}{n}.$$

Neprovdá se, když prvních $s-1$ už nemůže být předstiženo, tj. nejlepší musel být mezi nimi — přišel jako první, druhý,..., nebo $s-1$-ní (což jsou disjunktní jevy), takže

$$\mathrm{P}(Q) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{s-1} A_k\right) = \sum_{k=1}^{s-1} \frac{1}{n} = \frac{s-1}{n}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.32)

K ZADÁNÍ

Z řešení 3.33. [0,15, 0,42]
Označme U_i = [úraz v i-tém roce], je

$$\mathrm{P}(U_1) = p_B u_B + p_S u_S = 0,15,$$

$$\mathrm{P}(U_2 \,|\, U_1) = \frac{\mathrm{P}(U_2 \cap U_1)}{\mathrm{P}(U_1)} = \frac{p_B u_B^2 + p_S u_S^2}{\mathrm{P}(U_1)} = \frac{0,063}{0,15} = 0,42,$$

též

$$\mathrm{P}(U_2 \,|\, U_1) = u_B p_{B\,|\,U_1} + u_S p_{S\,|\,U_1},$$

kde $p_{\cdot\,|\,U_1}$ dle Bayesovy věty.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.33)

K ZADÁNÍ

Z řešení 3.34. [0,358]
Označme $A_k = [\text{mají } k \text{ dětí}]$, $K = [\text{rodina má samé kluky}]$. Posloupnost k dětí, v níž jsou jen kluci je jen jedna, čili $\mathrm{P}(K \mid A_k) = 2^{-k}$,

$$\mathrm{P}(A_1 \mid K) = \frac{\mathrm{P}(K \mid A_1)P(A_1)}{\sum_{k=1}^{4} \mathrm{P}(K \mid A_k)\,\mathrm{P}(A_k)} = \frac{2^{-1}\,\mathrm{P}(A_1)}{\sum_{k=1}^{4} 2^{-k}\,\mathrm{P}(A_k)} =$$
$$= 16\frac{0,1}{1,6+2,4+0,3+0,05} = \frac{1,6}{4,35} \doteq 0,358.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.3.34)

4. Diskrétní náhodné veličiny

K ZADÁNÍ

Z řešení 4.1. [Alt(1/2),1/2,1/4]
Náhodné veličiny X, Y tak obě mají Alt(1/2), přestože nejsou totožné. Nakreslit distribuční funkci.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.1)

K ZADÁNÍ

Z řešení 4.2. []

$$\mathrm{E}(X-\mathrm{E}\,X)^3 = \mathrm{E}\big(X^3 - 3X^2\,\mathrm{E}\,X + 3X(\mathrm{E}\,X)^2 - (\mathrm{E}\,X)^3\big) = \mathrm{E}\,X^3 - {}$$
$$- 3\,\mathrm{E}\,X\,\mathrm{E}\,X^2 + 3(\mathrm{E}\,X)^2\,\mathrm{E}\,X - (\mathrm{E}\,X)^3 = \mathrm{E}\,X^3 - 3\,\mathrm{E}\,X\,\mathrm{E}\,X^2 + 2(\mathrm{E}\,X)^3$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.2)

K ZADÁNÍ

Z řešení 4.3. $[p, p(1-p)]$

$$\mathrm{E}\,X = 0\,\mathrm{P}[X=0] + 1\,\mathrm{P}[X=1] = 0(1-p) + 1p = p,$$
$$\mathrm{E}\,X^2 = 0^2\,\mathrm{P}[X=0] + 1^2\,\mathrm{P}[X=1] = 0(1-p) + 1p = p,$$

tudíž

$$\operatorname{var} X = \mathrm{E}\,X^2 - (\mathrm{E}\,X)^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

(2004-09-03.`1ad111ppx1cyaq`.4.3)

K ZADÁNÍ

Z řešení 4.4. []

$$p_{2n+1} = (1-p_1)^n(1-p_2)^n p_1,$$
$$p_{2n+2} = (1-p_1)^{n+1}(1-p_2)^n p_2,$$

$n = 0, 1, \ldots .$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.4)

K ZADÁNÍ

Z řešení 4.5. [2,3, 1,96]

$p_k = 0,6^{k-1} 0,4, \quad k = 1, \dots, 4,$
$p_5 = 0,6^4$ (useknuté geometrické).

$$\mathrm{E}\, X \doteq 2,3, \quad \mathrm{E}\, X^2 = 7,28, \quad \mathrm{var}\, X = 7,28 - 2,3^2 \doteq 1,96.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.5)

K ZADÁNÍ

Z řešení 4.6. [2,75, 2,687 5]

$$\mathrm{E}\,X = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{4} = 2 + \frac{3}{4},$$

$$\mathrm{E}\,X^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} = 10 + \frac{1}{4},$$

a tedy

$$\operatorname{var} X = \mathrm{E}\,X^2 - (\mathrm{E}\,X)^2 = \frac{41}{4} - \frac{121}{16} = 2 + \frac{11}{16}.$$

Distribuční funkce $F(x) = \mathrm{P}[X \leq x]$ (zprava spojitá).
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.6)

Z řešení 4.7. $[0,\ 2{,}3333,\ 0,\ 1{,}5306]$
Rozdělení je symetrické kolem 0, čili $\mathrm{E}\,X = 0$.

$$\mathrm{E}\,X^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{3},$$

tudíž $\operatorname{var} X = \frac{7}{3}$.

Ze symetrie $\mathrm{E}\,X^3 = 0$, a tedy i

šikmost $X = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}\,X)^3/(\operatorname{var} X)^{3/2} = \mathrm{E}\,X^3/(\operatorname{var} X)^{3/2} = 0$.

Konečně

$$\mathrm{E}(X - \mathrm{E}\,X)^4 = 16\frac{2}{4} + 1\frac{2}{6} + 0\frac{1}{6} = \frac{25}{3},$$

a tak

špičatost $X = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}\,X)^4/(\operatorname{var} X)^{4/2} = (25/3)/(49/9) = \frac{75}{49}$.

Distribuční funkce $F(x) = P[X \leqq x]$ (zprava spojitá).
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.7)

K ZADÁNÍ

Z řešení 4.8. [1,5, 1,05, nezáv, 0,5]
$p_{(0,1,2,3)} = (0,2,\ 0,3,\ 0,3,\ 0,2)$,
$\mathrm{E}\,X = (0\cdot 2 + 1\cdot 3 + 2\cdot 3 + 3\cdot 2)/10 = 1,5$,
$\mathrm{E}\,X^2 = (0\cdot 2 + 1\cdot 3 + 4\cdot 3 + 9\cdot 2)/10 = 3,3$,
$\operatorname{var} X = \mathrm{E}\,X^2 - (\mathrm{E}\,X)^2 = 3,3 - 2,25 = 1,05$.
$\mathrm{P}[X = 2]\,\mathrm{P}[X \leqq 3] = 0,3\cdot 1 = 0,3 = \mathrm{P}([X = 2] \cap [X \leqq 3]) = \mathrm{P}[X = 2]$,
tedy nezávislost jevů.

$$\mathrm{P}[X \text{ liché}] = \mathrm{P}[X \in \{1,3\}] = \frac{3+2}{10} = 0,5.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.8)

K ZADÁNÍ

Z řešení 4.9. [4, 4/3, 5/9]

k	hody	$\mathrm{P}[X=k]$
2	[1,1]	1/9
3	[1,2],[2,1]	2/9
4	[2,2],[1,3],[3,1]	3/9
5	[2,3],[3,2]	2/9
6	[3,3]	1/9

$$\mathrm{E}\,X = \frac{2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 3 + 5\cdot 2 + 6\cdot 1}{9} = \frac{36}{9} = 4,$$

$$\mathrm{E}\,X^2 = \frac{4\cdot 1 + 9\cdot 2 + 16\cdot 3 + 25\cdot 2 + 36\cdot 1}{9} = \frac{156}{9},$$

$$\operatorname{var} X = \mathrm{E}\,X^2 - (\mathrm{E}\,X)^2 = \frac{52}{3} - 16 = \frac{4}{3}.$$

$\mathrm{P}[X \text{ je sudé číslo}] = \mathrm{P}[X \in \{2,4,6\}] = (1+3+1)/9 = 5/9.$
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.9)

K ZADÁNÍ

Z řešení 4.10. [1, 2/3, záv]

j	hody	$\mathrm{P}[Y=j]$
2	[1,1]	1/9
3	[1,2],[2,1]	2/9
4	[2,2],[1,3],[3,1]	3/9
5	[2,3],[3,2]	2/9
6	[3,3]	1/9

tj.

k	Y	$\mathrm{P}[X=k]$
0	3,6	1/3
1	1,4	1/3
2	2,5	1/3

Nechť Y udává součet hodů. Potom

$$\mathrm{E}\,X=(0+1+2)/3=1,\quad \mathrm{E}\,X^2=(0^2+1^2+4^2)/3=5/3,\quad \operatorname{var}X= \\ =\mathrm{E}\,X^2-(\mathrm{E}\,X)^2=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}.$$

Zkoumané jevy jsou závislé — už jen např.

$$\mathrm{P}[X=0]\,\mathrm{P}[X=1]=\frac{1}{3}\frac{1}{3}\neq 0=\mathrm{P}([X=0]\cap[X=1])=\mathrm{P}(\emptyset)=0.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.10)

K ZADÁNÍ

Z řešení 4.11. [8 %]

Bankéř při jednotkové sázce zaznamená zisk 1, −1, −2, nebo −3, když vsazené číslo padne na 0, 1, 2, nebo 3 kostkách, tedy s pravděpodobnostmi

$$(\frac{5}{6})^3 = \frac{125}{216}, \quad 3(\frac{5}{6})^2\frac{1}{6} = \frac{75}{216}, \quad 3\frac{5}{6}(\frac{1}{6})^2 = \frac{15}{216}, \quad \text{a} \quad (\frac{1}{6})^3 = \frac{1}{216}.$$

Máme tak

$$\mathrm{E}\,X = \frac{1\cdot 125 - 1\cdot 75 - 2\cdot 15 - 3\cdot 1}{216} = \frac{17}{216} \doteq 0,08.$$

Příklad můžeme řešit také přes podmíněnou střední hodnotu. Ze situací, kdy na kostkách padají navzájem různá čísla, nemá bankéř žádný zisk (ke 3 číslům vyhrávajícím 1 máme 3 čísla prohrávající sázku). Padnou-li 2 stejná čísla a jedno jiné, na 1 číslo vyhrávající 1 a 1 číslo vyhrávající 2 připadají 4 prohrávající 1, z jedné hry plyne průměrný zisk $(4\cdot 1 - (1\cdot 1 + 1\cdot 2))/6 = 1/6$. Z her, kdy padají 3 stejná čísla (na jedno číslo s výhrou 3 připadá 5 s prohrou 1), plyne zisk $(5-3)/6 = 2/6$.

Navzájem různá čísla padnou v $6\cdot 5\cdot 4 = 120$ případech z $6^3 = 216$, stejná v 6, 2 stejná a jedno jiné ve zbývajících $216 - 120 - 6 = 90$ případech. Tedy celkově je průměrný zisk

$$\mathrm{E}\,X = 0\cdot\frac{120}{216} + \frac{1}{6}\frac{90}{216} + \frac{2}{6}\cdot\frac{6}{216} = \frac{17}{216}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.11)

Verze 2004-09-03

Z řešení 4.12. [ano,∞]

Součtem

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = 1,$$

dostáváme 1, jde tedy skutečně o rozdělení pravděpodobnosti. Střední hodnota však není konečná,

$$\mathrm{E}\, X = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \infty.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.12)

K ZADÁNÍ

Z řešení 4.13. []

Rozdělením na disjunktní jevy (v kterých konkrétních k pokusech z n možných)

$$\mathrm{P}[X=k] = \sum_{\{i_1,i_2,\dots,i_k\}\subset\{1,2,\dots,n\}} p^k(1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k},$$

což je rozdělení $\mathrm{Bi}(n,k)$.

Platí tedy, že $\mathrm{Bi}(n,p)$ je součtem n nezávislých $\mathrm{Alt}(p)$.

Protože X je součtem nezávislých stejně rozdělených veličin $Z_i \sim \mathrm{Alt}(p)$, je

$$\mathrm{E}\,X = \sum_i \mathrm{E}\,Z_i = np.$$

Vzhledem k nezávislosti Z_i je

$$\operatorname{var} X = \operatorname{var}\sum Z_i = \sum \operatorname{var} Z_i = np(1-p).$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.13)

K ZADÁNÍ

Z řešení 4.14. [13/16]
X = počet líců $\sim \mathrm{Bi}(5, 1/2)$, tudíž

$$p = \mathrm{P}[X \geqq 2] = 1 - \mathrm{P}[X < 2] = 1 - \mathrm{P}[X \leqq 1] = 1 - F(1) = 1 - [\binom{5}{0} + \binom{5}{1}]/2^5 = 1 - \frac{6}{32} = \frac{13}{16},$$

je-li F distribuční funkce $\mathrm{Bi}(5, 1/2)$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.14)

K ZADÁNÍ

Z řešení 4.15. $[1-(5/6)^n]$

X = počet šestek $\sim \mathrm{Bi}(n, 1/6)$. Tudíž

$$p = \mathrm{P}[X \geqq 1] = 1 - \mathrm{P}[X < 1] = 1 - \mathrm{P}[X \leqq 0] = 1 - F(0) = 1 - \binom{n}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(1-\frac{1}{6}\right)^{n-0} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n,$$

kde F byla distribuční funkce $\mathrm{Bi}(n, 1/6)$.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.15)

K ZADÁNÍ

Z řešení 4.16. [2, 1, nezáv]
X má Bi$(4, 1/2)$, tudíž

$$\mathrm{E}\,X = 4\frac{1}{2} = 2, \quad \operatorname{var} X = 4\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}).$$

Vzhledem k tomu, že $[X \leqq 4] = [X \geqq 0] = \Omega$, mají všechny pravděpodobnost1, a tudíž jsou nezávislé.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.16)

K ZADÁNÍ

Z řešení 4.17. [$\geqq 7$]
Označme jako X veličinu udávající počet chlapců mezi n dětmi, je $X \sim \mathrm{Bi}(n, 0{,}515)$. Hledáme takové n, aby

$$\mathrm{P}(X > 0) > 0{,}99,$$

přitom levá strana nerovnosti je

$$\mathrm{P}(X > 0) = 1 - \mathrm{P}(X \leqq 0) = 1 - \mathrm{P}(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} 0{,}515^0 (1 - 0{,}515)^{n-0},$$

když použijeme hodnotu pravděpodbnostní funkce binomického rozdělení (veličiny X). Úpravou nerovnosti dostáváme

$$n \geqq \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}485} \dot{\sim} 6{,}36,$$

je tedy třeba mít aspoň 7 dětí.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.17)

K ZADÁNÍ

Z řešení 4.18. [36]
Počet dvojek má $Bi(n, 1/6)$, čili $6 = n\frac{1}{6}$, tj. $n = 36$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.18)

Z řešení 4.19. $[\mathrm{HG}(N, A, n)]$

$$\mathrm{P}[X = k] = [\binom{A}{k}\binom{N-A}{n-k}]/\binom{N}{n}, \quad \max(n-N+A, 0) \leqq k \leqq \min(A, n),$$

což je hypergeometrické rozdělení $\mathrm{HG}(N, A, n)$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.19)

K ZADÁNÍ

Z řešení 4.20. [1,9]

$p_{(0,1,2,3)} = (1, 15, 30, 10)/56, \quad \mathrm{E}\, X = 105/56.$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.20)

K ZADÁNÍ

Z řešení 4.21. [0,6075]

$p_{(0,\dots 5)} = (0,5126,\ 0,3844,\ 0,0938,\ 0,0089\,0,0^3 3,\ 0,0^5 3)$, $\quad \mathrm{E}\,X = 0,6075.$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.21)

K ZADÁNÍ

Z řešení 4.22. [13/35]
X = počet vytažených černých $\sim \mathrm{HG}(7,3,3)$. Tudíž

$$p = \mathrm{P}[X \geqq 2] = 1 - \mathrm{P}[X \leqq 1] = 1 - F(1) = 1 - [\binom{3}{0}\binom{4}{3} + \binom{3}{1}\binom{4}{2}]/\binom{7}{3} = = 1 - \frac{1 \cdot 4 + 3 \cdot 6}{35} = 1 - \frac{22}{35} = \frac{13}{35},$$

je-li F distribuční funkce $\mathrm{HG}(7,3,3)$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.22)

K ZADÁNÍ

Z řešení 4.23. [Geom(1/6)]
Vzhledem k nezávislosti hodů je

$$\mathrm{P}[X = k] = \mathrm{P}[k \text{ krát nezávisle nešestka, pak šestka}] = (\frac{5}{6})^k \frac{1}{6},$$

což je rozdělení Geom(1/6).
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.23)

Z řešení 4.24. [0,545 4]

$$p = \mathrm{P}[\text{1. úspěch po sudém počtu neúspěchů}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{2k} = \frac{1}{6}\frac{1}{1-\frac{25}{36}} = \frac{6}{11}$$

(úspěch v kroku $X \sim \mathrm{Geom}(1/6)$).

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.24)

K ZADÁNÍ

Z řešení 4.25. $[\lambda, \lambda]$

$$\mathrm{E}\,X = \sum_{k=0}^{\infty} k\ \mathrm{P}[X=k] = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} =$$
$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda.$$

Pro určení rozptylu potřebujeme znát 2. moment. Spočteme-li faktoriální moment

$$\mathrm{E}\,X(X-1) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2,$$

můžeme vyjádřit $\mathrm{E}\,X^2 = \lambda^2 + \mathrm{E}\,X = \lambda^2 + \lambda$. Konečně

$$\operatorname{var} X = \mathrm{E}\,X^2 - (\mathrm{E}\,X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

K výsledku se lze dobrat také přes momentovou vytvořující funkci

$$M(t) = \mathrm{E}\,e^{tX} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)},$$

neboť existují-li momenty, pak $\mathrm{E}\,X^k = M^{(k)}(0)$. U nás

$$M'(t) = \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}, \qquad M''(t) = \lambda(1+\lambda e^t) e^{t+\lambda(e^t-1)},$$

a tak

$$\mathrm{E}\,X = M'(0) = \lambda \qquad \text{a} \qquad \mathrm{E}\,X^2 = M''(0) = \lambda(1+\lambda).$$

Verze 2004-09-03

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.25)

K ZADÁNÍ

Z řešení 4.26. [0,0004]
Počet současných hovorů má (600/60 hovorů za minutu) $\mathrm{Po}(10 \cdot 1,5)$, tedy
$p = \mathrm{P}[\mathrm{Po}(15) > 30] = 0,0004$.
Zdůvodnění Po: N nezávislých účastníků, každý hovoří s pravděpodobností $\frac{600 \cdot 1,5}{60N}$, tedy počet najednou hovořících je
$$\mathrm{Bi}(N, \frac{15}{N}) \xrightarrow{N\to\infty} \mathrm{Po}(N\frac{15}{N}).$$
(2004-09-03.`1ad111ppx1cyaq`.4.26)

K ZADÁNÍ

Z řešení 4.27. [0,001]
Ztráta, když chce volat více než 10 účastníků, tj. (2 hovory za minutu)
$p = \mathrm{P}[\mathrm{Po}(2 \cdot 1,5) > 10] \doteq 0,001.$
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.27)

K ZADÁNÍ

Z řešení 4.28. [12,15]
Počet volajících má $\mathrm{Po}(\frac{240}{60} \cdot 1{,}5)$, hledáme n tak aby

$$\mathrm{P}[\mathrm{Po}(6) > n] \leqq p,$$

tj.

$$\mathrm{P}[\mathrm{Po}(6) \leqq n] \geqq 0{,}99 \quad \text{(resp. 0,999)},$$

čili $n = 12$ (resp. 15).
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.28)

K ZADÁNÍ

Z řešení 4.29. [0,681]
Počet poruch během t hodin má $\mathrm{Po}(\frac{10}{365\cdot 24}t)$, takže

$$p = 1 - \mathrm{P}[\mathrm{Po}(\frac{10\,000}{365\cdot 24}) = 0] = 1 - \mathrm{e}^{10\,000/(365\cdot 24)} = 0,681.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.29)

K ZADÁNÍ

Z řešení 4.30. [0,865, 0,0005]
Počet výpadků za t dní je $\mathrm{Po}(2 \cdot t)$, takže

$$p_a = 1 - \mathrm{P}[\mathrm{Po}(2) = 0] = 1 - \mathrm{e}^{-2} = 0,865,$$

$$p_b = \mathrm{e}^{-14}\left(1 + 14 + \frac{14^2}{2!} + \frac{14^3}{3!}\right) = 0,000474.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.30)

K ZADÁNÍ

Z řešení 4.31. [0,676 8]

X = počet vadných $\sim \mathrm{HG}(15\,000, 300, 100) \dot{\sim} \mathrm{Po}(\frac{300}{15\,000} 100) = \mathrm{Po}(2)$, neboť je $300/15\,000 = 1/50 < 0,1$ a $100 > 30$. Tudíž

$\mathrm{P}[X \leqq 2] \doteq \mathrm{e}^{-2}(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!}) = \mathrm{e}^{-2}(1+2+2) \doteq 0,676\,8.$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.31)

K ZADÁNÍ

Z řešení 4.32. [0,000 969]
X = počet uhodnutých $\sim$ HG(49, 6, 6), a tedy

$$\mathrm{P}[X=4] = [\binom{6}{4}\binom{49-6}{6-4}]/\binom{49}{6} =$$
$$= \frac{6\cdot 5}{2}\,\frac{43\cdot 42}{2}\,\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{49\cdot48\cdot47\cdot46\cdot45\cdot44} \doteq 0{,}000\,969.$$

Zde **nelze** aproximovat ($p = 6/49 \not< 0,1$, navíc $n = 6 \not> 30$)! Nevhodnou aproximací by vyšlo
$$\binom{6}{4}(\frac{6}{49})^4(\frac{43}{49})^2 \doteq 0{,}000\,216,$$
resp.
$$\mathrm{e}^{-36/49}\frac{(36/49)^4}{4!} \doteq 0{,}005\,823,$$
což se dost liší od správného výsledku.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.32)

Verze 2004-09-03

K ZADÁNÍ

Z řešení 4.33. [0,019]

$$p \doteq \mathrm{P}[\mathrm{Po}(500 \cdot 0,002) > 3] = 1 - \mathrm{e}^{-1}\left(1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!}\right) \doteq 0,0190.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.33)

K ZADÁNÍ

Z řešení 4.34. [0,09, 0,15]

$$p_a \doteq \mathrm{P}[\mathrm{Po}(200 \cdot 0,01) = 4] = \mathrm{e}^{-2}\frac{2^4}{4!} \doteq 0,09,$$

$$p_b \doteq \mathrm{P}[\mathrm{Po}(200 \cdot 0,01) \geqq 4] = 1 - \mathrm{e}^{-2}(1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}) \doteq 0,143.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.34)

Z řešení 4.35. $[-2{,}5,\ 3-\frac{1}{12},\ \text{nezáv}]$
$\mathrm{P}[X=k]=1/6$ pro každé $k\in\{-5,\dots,0\}$.

$$\mathrm{E}\,X=(-5+(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0)/6=-2{,}5,$$
$$\mathrm{E}\,X^2=(25+16+9+4+1+0)/6=55/6,$$
$$\operatorname{var}X=\mathrm{E}\,X^2-(\mathrm{E}\,X)^2=55/6-6{,}25=35/12.$$
$$\mathrm{P}[X\leqq-4]\,\mathrm{P}[-4\leqq X\leqq-2]=\frac{2}{6}\frac{3}{6}=\frac{1}{6}=\mathrm{P}([X\leqq-4]\cap[-4\leqq X\leqq-2])=$$
$$=\mathrm{P}[X=-4],$$

tedy nezávislost jevů.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.35)

K ZADÁNÍ

Z řešení 4.36. [(0,49, 0,42, 0,09), (7/15, 7/15,6/90)]
Veličina X nabývá hodnot $k = 0, 1, 2$.
a) $X \sim \mathrm{Bi}(2, 3/10)$ a $\mathrm{P}[X = k] = \binom{2}{k}(3/10)^k(1 - 3/10)^{2-k}$,
b) $X \sim \mathrm{HG}(10, 3, 2)$ a $\mathrm{P}[X = k] = \binom{3}{k}\binom{10-7}{2-k}$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.36)

K ZADÁNÍ

Z řešení 4.37. [2,2, 0,98]
$p_{(0,\dots,4)} = (0,04, 0,2, 0,37, 0,3, 0,09)$,

$$\mathrm{E}\,X = 2,2, \quad \mathrm{E}\,X^2 = 5,82, \quad \operatorname{var} X = 5,82 - 2,2^2 = 0,98.$$

Přes nezávislost

$$X = \mathrm{Bi}(2,\ 0,5) + \mathrm{Bi}(2,\ 0,6),$$

takže $\mathrm{E}(X) = 1 + 1,2$, $\operatorname{var} X = 0,5 + 0,48$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.37)

K ZADÁNÍ

Z řešení 4.38. $[-0,2,\ 0,98]$
$p_{(-2,\dots,2)} = (0,09, 0,3, 0,37, 0,2, 0,04)$,
$\quad \mathrm{E}\,X = -0,2, \quad \mathrm{E}\,X^2 = 1,02, \quad \mathrm{var}\,X = 1,02 - 0,2^2 = 0,98.$
Přes nezávislost
$\quad X = \mathrm{Bi}(2,\ 0,4) - \mathrm{Bi}(2,\ 0,5),$
takže $\mathrm{E}(X) = 0,8 - 1$, $\mathrm{var}\,X = 0,48 + 0,5$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.38)

K ZADÁNÍ

Z řešení 4.39. $[\frac{n^2-1}{3n}a]$

Podle věty o celkové pravděpodobnosti (v závislosti na tom, kde se nachází a který stroj ho volá)

$$p_0 = n(\frac{1}{n}\frac{1}{n}),$$

$$p_a = \frac{1}{n}\frac{1}{n} + (n-2)(\frac{1}{n}\frac{1+1}{n}) + \frac{1}{n}\frac{1}{n},$$

$$p_{2a} = \frac{1}{n}\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\frac{1}{n} + (n-4)(\frac{1}{n}\frac{1+1}{n}) + \frac{1}{n}\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\frac{1}{n},$$

atd.

Obecně

$$p_{ka} = \frac{2(n-k)}{n^2}, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

$p_0 = \frac{1}{n}$.

$$\mathrm{E}\,X = 0a + \sum_{k=1}^{n-1} ka\frac{2}{n-k}n^2 = \frac{2a}{n^2}(n\sum_{k=1}^{n-1}k - \sum_{k=1}^{n-1}k^2) = \frac{2a}{n^2}(n\frac{n-1}{2}(1+n- \\ -1) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}) = \frac{n^2-1}{3n}a.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.39)

K ZADÁNÍ

Z řešení 4.40. $[\frac{n+1}{2}, \frac{n^2-1}{12}]$
$p_k = \frac{1}{n}$, $k = 1, \ldots, n$, takže

$$\mathrm{E}\,X = \frac{1}{n}(1 + \cdots + n) = \frac{n+1}{2},$$

$$\mathrm{E}\,X^2 = \frac{1}{n}(1^2 + \cdots + n^2) = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\operatorname{var} X = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2-1}{12}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.4.40)

5. Spojité náhodné veličiny

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.1. []

Na $(0,1)$

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t}{2} = \frac{1}{2}[\frac{t^2}{2}]_0^x = \frac{x^2}{4},$$

na $(1,2)$

$$F(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(x-1),$$

na $(2,3)$

$$F(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \int_2^x \frac{3-t}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}[\frac{(3-t)^2}{2}]_2^x = \frac{3+1-(3-x)^2}{4} = 1 - \\ - \frac{(3-x)^2}{4}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.1)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.2. $[1/4, 0, -1/3]$

Z grafu hustoty je vidět, že

$$\mathrm{P}[-2 \leqq X \leqq -0,5] = \mathrm{P}[X \in [-1, -0,5]] = \frac{1}{2}\frac{1}{2}1 = \frac{1}{4};$$

$\mathrm{P}[-2 \leqq X \leqq -1] = 0.$

$$\mathrm{E}\, X = \int_{\mathbf{R}} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} x(2x+2)\,\mathrm{d}x = [2\frac{x^3}{3} + x^2]_{-1}^{0} = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.2)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.3. $[\frac{x}{2}, 2, \sqrt{2}, \frac{4}{3}, \frac{1}{2}]$

$$f(x) = F'(x) = x/2, \quad x \in (0,2),$$

tudíž modus 2.

$$\operatorname{med} X = F_{-1}(1/2) = \sqrt{4 \cdot 1/2} = \sqrt{2},$$

$$\operatorname{E} X = \int_0^2 x^2/2 = 8/6 = 4/3, \quad p = (1,5^2 - 0,5^2)/4 = 1/2.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.3)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.4. $[2-\sqrt{2}, 1, 0{,}103]$

Pro distribuční funkci tohoto rozdělení máme $F(x) = 0$, $x \leqq 0$, $F(x) = 1$, $x \geqq 2$ a

$$F(x) = \int_0^x 1 - \frac{t}{2}\,dt = x - \frac{x^2}{4}, \quad x \in (0,2).$$

Pro $p \in (0,1)$ je p-kvantil tou hodnotou x_p, pro niž $F(x_p) = p$. Medián $x_{0,5}$ je tedy řešením x rovnice

$$F(x) = 0{,}5, \quad \text{tedy i} \quad x^2 - 4x + 2 = 0, \quad x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}.$$

Uvážíme-li, že $2+\sqrt{2} > 2$, tedy $F(2+\sqrt{2}) = 1$, uzavíráme, že $x_{0,5} = 2 - \sqrt{2}$.

Podobně pro horní kvartil $x_{0,75}$

$$F(x) = 0{,}75 \quad \text{vede k} \quad x^2 - 4x + 3 = 0, \quad x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = 2 \pm 1.$$

Hodnota $x = 3$ nesplňuje úvodní rovnici, je $x_{0,75} = 1$, což je vidět i z grafu hustoty.

Podobně se najde $x_{0,10} = (10 - 3\sqrt{10})/5$.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.4)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.5. [1/2, 0, 2]

$$a = 1/\left(2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\right) = 1/2.$$

$\mathrm{E}\,X = 0$ (symetrie), $\operatorname{var} X = \mathrm{E}\,X^2 = 2!$.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.5)

Z řešení 5.6. $[\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{arctg} x}{\pi}, 1/6, \text{neex.}, 0, 0]$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f = a(\operatorname{arctg} x - (-\frac{\pi}{2})),$$

tedy

$$a = 1/F(\infty-) = 1/\pi.$$

$$p = 1 - F(\sqrt{3}) = 1/6, \quad \operatorname{med} X = \operatorname{mod} X = 0$$

(symetrie, f má maximum v 0). Střední hodnota neexistuje, protože integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f$ nekonverguje.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.6)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.7. [3/8, 7/8]

$a = 1/\int_0^2 x^2 = \frac{3}{8}$,

$\mathrm{E}\,X = \frac{3}{8}\int_0^2 x^3 = \frac{3}{2}$,

$p = \mathrm{P}[X \in (1,2)] = (3/8)(2^3 - 1^3)/3 = 7/8$.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.7)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.8. $[x^2/R^2 \text{ na } (0,R)]$

Bod bude v kruhu o poloměru x s pravděpodobností

$$F(x) = \frac{\pi x^2}{\pi R^2} = \left(\frac{x}{R}\right)^2, \quad x \in (0,R).$$

(2004-09-03 1ad111ppx1cyaq 5.8)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.9. $[\frac{x^3, 3x^2}{R^3}, \frac{3R}{4}, \frac{3R^2}{80}]$

Bod bude v kouli o poloměru x s pravděpodobností

$$F(x) = \frac{4\pi x^3/3}{4\pi R^3/3} = (\frac{x}{R})^3,$$

$$f(x) = \frac{3x^2}{R^3}, \quad x \in (0, R).$$

Nyní

$$\mathrm{E}\, X = \frac{3x^4}{4R^3}|_0^R = \frac{3R}{4},$$

$$\mathrm{E}\, X^2 = \frac{3x^5}{5R^3}|_0^R = \frac{3R^2}{5},$$

$$\mathrm{var}\, X = R^2(\frac{3}{5} - \frac{9}{16}) = \frac{3R^2}{80}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.9)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.10. [1/4]

$f(x) = 1/2$ na $(0, 2)$, $F(x) = x/2$. $p = 1/4$.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.10)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.11. $[\frac{a+b}{2}, \frac{(b-a)^2}{12}]$

Hustota je

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a < x < b,$$

takže

$$\mathrm{E}\,X = \int_a^b x \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2},$$

$$\mathrm{E}\,X^2 = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\frac{b^3-a^3}{3} = \frac{a^2+ab+b^2}{3},$$

tudíž

$$\operatorname{var} X = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{b^2+a^2-2ab}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.11)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.12. [1/6 na $(-2,4)$]
$b-a=\sqrt{12\cdot 3}=6$, tj.

$$f(x)=1/6 \quad \text{na} \quad (-2,4).$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.12)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.13. [50, 0,2]

$\mathrm{E}\,X = 1/0,02 = 50,$

$p = \mathrm{P}[X > 80] = \mathrm{e}^{-0,02\cdot 80} \doteq 0,202.$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.13)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.14. [156]

$0{,}8 = \mathrm{P}[X > t] = \mathrm{e}^{-t/700}$,

tj. $t = -700 \ln(0{,}8) \doteq 156$ (0,2-kvantil).

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.14)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.15. [0,526 8]
Záruční dobu označme x. Žádáme

$$\mathrm{P}[X \leqq x] = 0,1$$

(tj. hledáme 10% kvantil), řešíme tedy

$$0,1 = F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x/5},$$

tj.

$$x = (\ln 0,9)(-5) \doteq -5(-0,105\,36) \doteq 0,526\,8.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.15)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.16. [168 min.]
O $\mathrm{Exp}(\lambda)$ víme, že 30 % kvantil je 60, tj.

$$0,3 = \mathrm{P}[X < 60] = 1 - e^{-\lambda \cdot 60}$$

tedy $\lambda = -\ln(1-0,3)/60 \doteq 0,005\,944$, a střední hodnota $\mathrm{E}\,X = 1/\lambda = 168,22$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.16)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.17. [$1/\ln 2$]
V Exp(λ) máme střední hodnotu $1/\lambda$, medián splňuje $0,5 = 1 - F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, tedy med $X = \ln 2/\lambda$. Vychází

$$\frac{\mathrm{E}\,X}{\mathrm{med}\,X} = \frac{1/\lambda}{\ln 2/\lambda} = \frac{1}{\ln 2} \doteq 1,44,$$

nezávisle na parametru λ.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.17)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.18. $[\mathrm{e}^{-2\lambda t}]$
Čas mezi poruchami má $t + \mathrm{Exp}(\lambda)$, tj.
$p = \mathrm{e}^{-\lambda(3t-t)}$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.18)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.19. [0,0755]

$$p = \mathrm{e}^{-1000/750}\mathrm{e}^{-1000/800} \doteq 0,0755.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.19)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.20. $[\frac{-\lambda}{n}\ln(1-\alpha), -\lambda\ln(1-\sqrt[n]{\alpha})]$
X_i = doba života i-té součástky $\sim \operatorname{Exp}(\lambda)$ s distribuční funkcí $F(x) = 1 - e^{-x/\lambda}, x > 0$, X = doba fungování celého zařízení. Při sériovém zapojení musí pracovat všechny součástky:

$$1-\alpha = \mathrm{P}[X > x] = \mathrm{P}[\forall_i X_i > x] = \prod_{i=1}^{n} e^{-x/\lambda} = e^{-nx/\lambda},$$

tj.

$$x = \frac{-\lambda}{n}\ln(1-\alpha).$$

Při paralelním zapojení stačí jedna pracující

$$1-\alpha = \mathrm{P}[X > x] = 1-\mathrm{P}[X \leqq x] = 1-\mathrm{P}[\forall_i X_i \leqq x] = 1-\prod_{i=1}^{n}(1 - e^{-x/\lambda}) = 1-(1-e^{-x/\lambda})^n,$$

tedy

$$x = -\lambda\ln(1-\sqrt[n]{\alpha}).$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.20)

Verze 2004-09-03

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.21. $[Y \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)]$

Je-li Φ distribuční funkce a $\varphi = \Phi'$ hustota $\mathrm{N}(0,1)$, je pro $\sigma > 0$

$$F_Y(y) = \mathrm{P}[\mu + \sigma X \leqq y] = \mathrm{P}\left[X \leqq \frac{y-\mu}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right),$$

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \Phi'\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right).$$

Pro $\sigma < 0$ je

$$F_Y(y) = \mathrm{P}\left[X \geqq \frac{y-\mu}{\sigma}\right] = 1 - \Phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{y-\mu}{|\sigma|}\right),$$

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \Phi'\left(\frac{y-\mu}{|\sigma|}\right)\frac{1}{|\sigma|} = \frac{1}{|\sigma|}\varphi\left(\frac{y-\mu}{|\sigma|}\right).$$

Pro $\sigma = 0$ je $F_Y(y) = 1$ pro $y \geqq \mu$, jinak 0 ($\mathrm{P}[Y = \mu] = 1$).

Tedy v každém případě $Y \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.21)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.22. [0,9331]

$$p = \Phi(\frac{69-68,3}{\sqrt{0,04}}) - \Phi(\frac{68-68,3}{\sqrt{0,04}}) = \Phi(3,5) - \Phi(-1,5) = 0,9998 - (1 - 0,9333) = 0,9331.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.22)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.23. [0,6392]
Při jednom měření
$p_1 = \Phi(2,4/3) - \Phi(0/3) = 0,2881.$
Aspoň 1× ze 3:
$p = 1 - (1 - p_1)^3 = 0,6392.$
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.23)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.24. [0,89]

$$p = \mathrm{P}[\text{jedna vydrží}]^4 = \mathrm{P}^4(\mathrm{N}(10\,000, 3000^2) > 4300) = (1 - \\ - \Phi(\frac{4300 - 10\,000}{3000}))^4 = \Phi^4(1,9) = 0,9713^4 = 0,8900.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.24)

Verze 2004-09-03

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.25. [3,082, 13,4, nelze]

a) Přepíšeme zadání pomocí kvantilů
$$\frac{5-\mu}{\sigma} = u_{0,7}, \qquad \frac{0-\mu}{\sigma} = u_{0,2},$$
vyhledáme je v tabulkách,
$$5-\mu = 0,5246\sigma, \qquad -\mu = -0,8416\sigma,$$
z čehož
$$\sigma = \frac{5}{1,3662} \doteq 3,66, \qquad \text{a} \qquad \mu \doteq 3,082,$$
tedy $\sigma^2 \doteq 13,4$.

b) Na pravé straně úvodních rovnic dostaneme opačná čísla, a vyšlo by $\sigma \doteq -3,66$, což nevyhovuje, neboť σ představuje kladnou směrodatnou odchylku. (Ostatně, už ze zadání je vidět spor.)

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.25)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.26. [10,2]

$0,95 = \mathrm{P}[|X| < 20] = 2\Phi(20/\sigma) - 1,$

tj.

$\sigma = 20/u_{(1+0,95)/2} = 20/1,96 \doteq 10,2\,\mathrm{m}.$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.26)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.27. [77]

$p = \mathrm{P}[|\text{odchylka}| < 3,6] = 2\Phi(3,6/3) - 1 = 2 \cdot 0,885 - 1 = 0,77,$
tedy 77.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.27)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.28. [21]

$$0,9 < \mathrm{P}[\exists_i |X_i| < 5] = 1 - \mathrm{P}[\forall_i |X_i| > 5] = 1 - (\mathrm{P}[|X_1| > 5])^n,$$

tedy

$$n > \frac{\ln(1-0,9)}{\ln(2(1-\Phi(5/37,01)))} = \frac{\ln(0,1)}{\ln(2(1-0,552))} = 20,96.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.28)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.29. [1975]

$0{,}41 = \mathrm{P}[|X - \mathrm{E}\,X| < 24] = 2\Phi(24/\sigma) - 1$,

tj.

$\sigma^2 = (24/u_{(1+0{,}41)/2})^2 = (24/0{,}54)^2 \doteq 1975\,\mathrm{m}.$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.29)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.30. $[y^{-1/2}/6,\ y \in (0,9)]$

$f_Y(y) = f_X(\sqrt[2]{y}) \cdot |(\sqrt[2]{y})'| = 1/3 \cdot y^{-1/2}/2, \quad y \in (0,9).$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.30)

Z řešení 5.31. $[1/(2\sqrt{x})]$

$F_{X^2}(x) = \mathrm{P}[|X| \leqq \sqrt{x}] = 2\sqrt{x}/2$,

tudíž

$f(x) = 1/(2\sqrt{x}), \quad x \in (0,1)$.

Podle věty ((-1,0) a (0,1)):

$$f(x) = \frac{1}{2}|(-\sqrt{x})'| + \frac{1}{2}|(\sqrt{x})'|.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.31)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.32. $[1/y^2,\ 2-1/y$ pro $y \in [1/2,1]]$

$F_Y(y) = \mathrm{P}[1/X \leqq y] = \mathrm{P}[X \geqq 1/y] = 1 - F_X((1/y)-) = 1 - (1/y - 1) =$
$= 2 - 1/y, \quad$ je-li $\quad y \in [1/2, 1],$

$f_Y(y) = F_Y'(y) = 1/y^2, \quad y \in [1/2, 1].$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.32)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.33. []

$$f_Y(y) = f_X(\mathrm{e}^y) \cdot |(\mathrm{e}^y)'| = \frac{\mathrm{e}^y}{a^2} \exp(-e^{2y}/2a^2) \cdot \mathrm{e}^y = \frac{1}{a^2} \exp(2y - - e^{2y}/2a^2), \quad y \in \mathbf{R}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.33)

Z řešení 5.34. $[1/y$ na $(e^{-1}, 1)$, $1 - 1/e$, $\frac{-3+4e-e^2}{2e^2}]$

$$f_Y(y) = f_X(\sqrt[3]{-\ln y}) \cdot |(\sqrt[3]{-\ln y})'| = 3(-\ln y)^{2/3} \cdot (-\ln y)^{-2/3}/(3y) = $$
$$= 1/y, \quad y \in (1/e, 1).$$
$$\mathrm{E}\,Y = \int_{1/e}^{1} 1 = 1 - 1/e,$$
$$\mathrm{E}\,Y^2 = \int_{1/e}^{1} y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^2},$$
$$\operatorname{var} Y = -\frac{1}{2} + 2e{-}1 - \frac{3}{2}e^{-2} = \frac{1}{2e^2}(-3 + 4e - e^2).$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.34)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.35. []

$$F_Y(y) = \mathrm{P}[X^2 \leqq y] = \mathrm{P}[|X| \leqq \sqrt{y}] = 2\Phi(\sqrt{y}) - 1, \qquad y > 0,$$

(jinde nulová), takže

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = 2\varphi(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(\sqrt{y})^2/2}\frac{1}{2\sqrt{y}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1/2}}{\sqrt{\pi}}y^{-1/2}\mathrm{e}^{-y/2}, \qquad y > 0,$$

což je případ hustoty χ^2_n rozdělení, $\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}y^{n/2-1}\mathrm{e}^{-y/2}$, $y > 0$, pro $n = 1$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.35)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.36. []

Náhodné zvolení bodu odpovídá náhodnému výběru úhlu φ z $[0, 2\pi]$. Zajímá nás tedy rozdělení veličiny $X = R\cos\varphi$, kde $\varphi \sim \mathrm{Ro}(0, 2\pi)$. Distribuční funkce je

$$F(x) = \mathrm{P}[X \leqq x] = \mathrm{P}[R\cos\varphi \leqq x] = \mathrm{P}[\varphi \in (\arccos\frac{x}{R}, 2\pi - \arccos\frac{x}{R})] =$$
$$= \frac{1}{2\pi}(2\pi - 2\arccos\frac{x}{R}) = 1 - \frac{\arccos\frac{x}{R}}{\pi} = \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{x}{R}, \quad x \in [-R, R],$$

což je vidět také z toho, že souřadnicím $X > x$ odpovídají úhly (horní polokružnice) $\varphi \in [0, \arccos\frac{x}{R}]$ (a stejný podíl úhlů na spodní polokružnici). Hustota

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1 - x^2/R^2}}\frac{1}{R} = \frac{1}{\pi\sqrt{R^2 - x^2}}$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.36)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.37. $[\Phi_{-1} \circ F]$

Je-li Φ distribuční funkce $N(0,1)$, musí platit

$P[Y \leqq y] = \Phi(y)$.

Předpokládáme-li T rostoucí, potom

$\Phi(y) = P[T(X) \leqq y] = P[X \leqq T_{-1}(y)] = F(T_{-1}(y))$,

to znamená

$\Phi = F \circ T_{-1}$, $F_{-1} \circ \Phi = T_{-1}$,

$T = \Phi_{-1} \circ F$ (skutečně rostoucí).

Obecněji pro spojitou rostoucí distribuční funkci:

$F_X(X) \sim \mathrm{Ro}(0,1)$

(platí i pro neklesající) a

$F_{-1}(\mathrm{Ro}(0,1)) \sim F$

(platí pro libovolnou distribuční funkci, $F_{-1}(u) = \inf\{x; F(x) \geqq (u)\}$).

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.37)

Verze 2004-09-03

Z řešení 5.38. [3/4, 1/4, 2/3]

Z grafu hustoty je vidět, že

$$\mathrm{P}[X > 1] = \mathrm{P}[X \in (1,2]] = \frac{1}{2} 1 \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$\mathrm{P}[X \leqq 1] = 1 - \mathrm{P}[X > 1] = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

$$\mathrm{E}\,X = \int_{\mathbf{R}} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 x(-\frac{x}{2}+1)\,\mathrm{d}x = [-\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}]_0^2 = \frac{-8}{6} + \frac{4}{2} = \frac{2}{3}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.38)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.39. [1/4, 1/2, 0]
Z grafu hustoty je vidět, že

$$\mathrm{P}[X \leqq -1,5] = \mathrm{P}[X \in (-2,-1,5)] = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4};$$

$$\mathrm{P}[X < 0,5] = \mathrm{P}[X \in (-2,-1)] = 1\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Vzhledem k symetrii rozdělení $\mathrm{E}\,X = 0$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.39)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.40. [1/2, 7/8]

Z grafu hustoty je vidět, že

$$\mathrm{P}[0,25 \leqq X \leqq 1,5] = \mathrm{P}[0,25 \leqq X \leqq 0,5] + \mathrm{P}[1 \leqq X \leqq 1,5] = \frac{1}{4}1 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\mathrm{E}\,X = \int_{\mathbf{R}} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{0,5} x 1\,\mathrm{d}x + \int_1^2 x\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = [-\frac{x^2}{2}]_0^{0,5} + [\frac{x^2}{4}]_1^2 = \frac{1}{8} + \\ + (1 - \frac{1}{4}) = \frac{7}{8}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.40)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.41. [1/4,7/8]

$$\mathrm{E}\,X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = 3\int_0^1 x(x-1)^2\,\mathrm{d}x = 3\int_0^1 x^3 - 2x^2 + x\,\mathrm{d}x = 3[\frac{x^4}{4} - $$
$$- \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}]_0^1 = 3(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4},$$
$$F(0{,}5) = \int_{-\infty}^{1/2} f(x)\,\mathrm{d}x = 3\int_0^{1/2} (x-1)^2\,\mathrm{d}x = 3\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^{1/2} = -\frac{1}{8} + 1 =$$
$$= \frac{7}{8}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.41)

Verze 2004-09-03

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.42. [1,1/6,7/8]

$$\mathrm{E}\,X = \int_0^1 x \cdot x\,dx + \int_1^2 x(2-x)\,dx = [\frac{x^3}{3}]_0^1 + [x^2 - \frac{x^3}{3}]_1^2 = 1/3 - 0 + 4 - 8/3 - 1 + 1/3 = 1,$$

$$\mathrm{E}\,X^2 = \int_0^1 x^2 \cdot x\,dx + \int_1^2 x^2(2-x)\,dx = [\frac{x^4}{4}]_0^1 + [\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}]_1^2 = 1/4 - 0 + 16/3 - 2/3 - 4 + 1/4 = 7/6,$$

tudíž $\mathrm{var}\,X = 7/6 - 1 = 1/6$.

Z grafu hustoty je vidět, že (obsah levé části trojúhelníku plus 3/4 obsahu pravé)

$$F(1,5) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\frac{1}{2} = \frac{7}{8}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.42)

Verze 2004-09-03

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.43. $[x^3, 1, 2^{-1/3}, \frac{3}{4}]$

$$F(x) = \int_0^x f = x^3 \; x \in (0,1),$$

modus 1,

$$\operatorname{med} X = F_{-1}(1/2) = \sqrt[3]{1/2}, \quad \operatorname{E} X = \int_0^1 3x^3 = 3/4.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.43)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.44. [1/2, $(1-\cos x)/2$, 0,147]

$$F(x) = a\int_0^x \sin = a(1-\cos x)$$

na $[0,\pi]$, $a = 1/(1-\cos\pi) = 1/2$.

$$p = \frac{1}{2}[(1-\cos\frac{\pi}{4}) - (1-\cos 0)] = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.44)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.45. $[-1, 1]$

$$\mathrm{E}\,X = \int_{-\infty}^{0} x e^x \,\mathrm{d}x = 0 - \int_{-\infty}^{0} e^x \,\mathrm{d}x = -1,$$

$$\mathrm{E}\,X^2 = \int_{-\infty}^{0} x^2 e^x \,\mathrm{d}x = 0 - \int_{-\infty}^{0} 2x e^x \,\mathrm{d}x = 2,$$

$$\operatorname{var} X = 2 - (-1)^2 = 1.$$

(Vlastně $X \sim -\operatorname{Exp}(1)$.)

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.45)

Verze 2004-09-03

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.46. [0,031]

Jeden funguje s

$$p = 1 - \Phi\left(\frac{200-180}{\sqrt{400}}\right) = 1 - 0,8413 = 0,1587,$$

aspoň 3 tedy

$$\sum_{k=3}^{5} \binom{5}{k} p^k (1-p)^{5-k} = 0,031.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.46)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.47. $[\theta(-\ln(1-p))^{1/\beta}]$
Pro kvantil u_p musí platit

$$p = F(u_p) = 1 - e^{-(u_p/\theta)^\beta},$$

tedy

$$u_p = \theta(-\ln(1-p))^{1/\beta}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.47)

Z řešení 5.48. $[\exp(\mu + \sigma u_p)]$
Kvantilem rozdělení veličiny $X \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$ bude ta hodnota $x_p \in \mathbf{R}$, pro niž $F(x_p) = p$ (když F značí distribuční funkci X). Přitom vzhledem k $X = \mathrm{e}^Y$ pro nějakou veličinu $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ můžeme psát

$$F(x_p) = \mathrm{P}(X \leqq x_p) = \mathrm{P}(\mathrm{e}^Y \leqq x_p) = \mathrm{P}(Y \leqq \ln x_p).$$

Odtud je vidět, že $\ln x_p$ je p-kvantilem rozdělení veličiny X, tj. $x_p = \exp(\mu + \sigma u_p)$, kde u_p značí p-kvantil $\mathrm{N}(0, 1)$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.48)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.49. []

Pro daná $k \geqq 1$ je pro $\mathrm{Exp}(\lambda)$

$$\mathrm{P}[|X - \frac{1}{\lambda}| < k\frac{1}{\lambda}] = \int_0^{(k+1)/\lambda} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}^{-(k+1)},$$

pro $\mathrm{Ro}(a, b)$ díky konstantní hustotě a vzdálenostem bodů

$$\mathrm{P}[|X - \frac{a+b}{2}| < k\frac{b-a}{2\sqrt{3}}] = \frac{1}{b-a}\min(b-a, 2k\frac{b-a}{2\sqrt{3}}) = \min(1, \frac{k}{\sqrt{3}}),$$

konečně pro $N(\mu, \sigma^2)$

$$\mathrm{P}[|X - \mu| < k\sigma] = \mathrm{P}[|\frac{X-\mu}{\sigma}| < k] = \Phi(k) - \Phi(-k) = 2\Phi(k) - 1.$$

Hledané pravděpodobnosti:

k	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\mathrm{Ro}(a,b)$	$\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$
1	0,865	0,577	0,683
2	0,950	1,000	0,956
3	0,982	1,000	0,997

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.49)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.50. $[y^{-2/3}/6 \text{ na } (0,8)]$

$$f_Y(y) = f_X(\sqrt[3]{y}) \cdot |(\sqrt[3]{y})'| = (1/2) \cdot y^{-2/3}/3, \quad y \in (0,8).$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.50)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.51. $[y^{-2}, y > 1]$

$$f_Y(y) = f_X(1/y) \cdot |(1/y)'| = 1 \cdot y^{-2}, \quad y > 1.$$

(2004-09-03:1ad111ppx1cyaq.5.51)

Verze 2004-09-03

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.52. $[e^y,\ y<0]$

$$f_Y(y) = f_X(e^y)\cdot|(e^y)'| = 1\cdot e^y, \quad y<0.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.52)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.53. $[\mathrm{e}^{-y},\ y \geqq 0]$

$$f_Y(y) = (\mathrm{P}[Y \leqq y])' = (\mathrm{P}[-\ln X \leqq y])' = \mathrm{P}[X \geqq \mathrm{e}^{-y}])' = (1-\mathrm{e}^{-y})' = \\ = \mathrm{e}^{-y}, \qquad y \geqq 0.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.53)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.54. $[y^{-1/2}/4 \text{ na } (0,4)]$

$$f_Y(y) = f_X(-\sqrt[2]{y}) \cdot |(-\sqrt[2]{y})'| = (1/2) \cdot y^{-1/2}/2, \quad y \in (0,4).$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.54)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.55. $[y^{-2}/2,\ y > 1/2]$

$$f_Y(y) = f_X(1/y) \cdot |(1/y)'| = (1/2) \cdot y^{-2}, \quad y > 1/2.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.55)

K ZADÁNÍ

Z řešení 5.56. $[e^{y/5}/5]$

$$f_Y(y) = f_X(e^{y/5}) \cdot |(e^{y/5})'| = 1 \cdot e^{5y}/5, \quad y < 0.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.5.56)

6. Vztahy mezi náhodnými veličinami

Z řešení 6.1. [nezáv. Ro(1, 2) a Ro(2, 4)]
Sdružená hustota má na daném obdélníku o obsahu 2 hodnotu $f = 1/2$. Marginální hustoty jsou

$$f_X = \int f \, dy = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1, \qquad x \in [1, 2],$$

$$f_Y = \int f \, dx = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}, \qquad y \in [2, 4],$$

tedy $X \sim \mathrm{Ro}(1, 2)$ a $Y \sim \mathrm{Ro}(2, 4)$.

Je $f = f_X f_Y$, tedy složky jsou nezávislé. Sdružená distribuční funkce je

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1)(y-2) & \text{na } [1, 2] \times [2, 4] \\ x - 1 & \text{na } [1, 2] \times [4, \infty) \\ \frac{1}{2}(y-2) & \text{na } [2, \infty) \times [2, 4] \end{cases}$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.6.1)

K ZADÁNÍ

Z řešení 6.2. [závislé, nekorelované]
Provedená transformace je prostá (nazpět $X = (U+V)/2, Y = (U-V)/2$), takže $\mathrm{P}[U=u, V=v] = 1/36$ pro všechny dosažitelné hodnoty u, v, tj. pro

$$2 \leq \overbrace{u+v}^{2x} \leq 12, \qquad 2 \leq \overbrace{u-v}^{2y} \leq 12,$$

mřížové body, jejichž souřadnice jsou obě liché, nebo obě sudé, ležící v kosočtverci s vrcholy v bodech 2 a 12 na ose u a v bodech s $v=-5$ a $v=5$ na přímce $u=7$. (U, resp. V nabývá hodnot od 2 do 12, resp. od -5 do 5, s pravděpodobnostmi $[1, 2, \ldots 5, 6, 5, \ldots, 2, 1]/36$.)

U a V nejsou nezávislé, protože např.

$$\mathrm{P}[U=2]\,\mathrm{P}[V=0] = \frac{1}{36}\frac{6}{36} = \frac{1}{216} \neq \mathrm{P}[U=2, V=1] = 1/36.$$

Kovariance

$$\operatorname{cov}(U,V) = \mathrm{E}\,UV - \mathrm{E}\,U\ \mathrm{E}\,V\ = \mathrm{E}(X+Y)(X-Y) - \mathrm{E}(X+Y)\,\mathrm{E}(X - \\ - Y) = \mathrm{E}(X^2 - Y^2) - \mathrm{E}(X+Y)\cdot 0 = 0,$$

neboť X a Y jsou stejně rozdělené, tudíž i se stejnými momenty. U a V jsou tedy nekorelované.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.6.2)

Z řešení 6.3. [3/5, $\mathrm{HG}(n_1+n_2,n_1,n)$]
$X_1+X_2 \sim \mathrm{Bi}(n_1+n_2,p)$ jakožto součet n_1 nezávislých $\mathrm{Alt}(p)$ s n_2 nezávislými $\mathrm{Alt}(p)$ (i vzájemně nezávislé).

$$\mathrm{P}[X_1=k \mid X_1+X_2=n] = \frac{\mathrm{P}[X_1=k \wedge X_1+X_2=n]}{\mathrm{P}[X_1+X_2=n]} =$$
$$= \frac{\mathrm{P}[X_1=k \wedge X_2=n-k]}{\mathrm{P}[X_1+X_2=n]} = [\binom{n_1}{k}p^k(1-p)^{n_1-k}\cdot\binom{n_2}{n-k}p^{n-k}(1-$$
$$-p)^{n_2-n+k}]/[\binom{n_1+n_2}{n}p^n(1-p)^{n_1+n_2-n}] =$$
$$= \binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k}/\binom{n_1+n_2}{n} \sim \mathrm{HG}(n_1+n_2,n_1,n).$$

V našem případě $X_1 \sim \mathrm{Bi}(3,1/6)$, $X_2 \sim \mathrm{Bi}(2,1/6)$, tudíž
$$\mathrm{P}[X_1=2 \mid X_1+X_2=3] = \binom{3}{2}\binom{2}{1}/\binom{5}{3} = \frac{3\cdot 2}{10} = \frac{3}{5}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.6.3)

K ZADÁNÍ

Z řešení 6.4. $[F^n,\, nF^{n-1}f;\, 1-(1-F)^n,\, n(1-F)^{n-1}f]$

$F_{\max X_i}(x) = \mathrm{P}[\max_{X_i} \leqq x] = \mathrm{P}[\forall_i X_i \leqq x] = F^n(x),$

$f_{\max X_i}(x) = F'_{\max X_i}(x) = nF^{n-1}(x)F'(x) = nF^{n-1}(x)f(x).$

$F_{\min X_i}(x) = \mathrm{P}[\min_{X_i} \leqq x] = \mathrm{P}[\exists_i X_i \leqq x] = 1 - \mathrm{P}[\forall_i X_i > x] = 1 - (1-F(x))^n,$

$f_{\min X_i}(x) = F'_{\min X_i}(x) = -n(1-F(x))^{n-1}(-F'(x)) = n(1-F(x))^{n-1}f(x).$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.6.4)

K ZADÁNÍ

Z řešení 6.5. [0,238, 0,055]

$$p_a = 1 - \Phi\left(\frac{1000-900}{\sqrt{19\,600}}\right) = 1 - \Phi(0,714) = 1 - 0,762 = 0,238,$$

$$p_b = 1 - \Phi\left(\frac{1000-900}{\sqrt{19\,600/5}}\right) = 1 - \Phi(1,597) = 1 - 0,945 = 0,055.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.6.5)

K ZADÁNÍ

Z řešení 6.6. [62]
Průměr má $N(0, 16/n)$, tedy

$$0,95 \leqq \mathrm{P}[-1 < \overline{X} < 1] = \Phi(\frac{1}{\sqrt{16/n}}) - \Phi(\frac{-1}{\sqrt{16/n}}) = 2\Phi(\frac{\sqrt{n}}{4}) - 1,$$

tudíž

$$\frac{\sqrt{n}}{4} \geqq u_{0,975} = 1,96,$$

tj.

$$n \geqq 16 \cdot 1,96^2 = 61,47.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.6.6)

K ZADÁNÍ

Z řešení 6.7. [0,056, 0,144]

Mezera

$$X \sim \mathrm{N}(237 - 4 \cdot 2 \cdot 29,4,\ 0,8^2 + 4 \cdot (2 \cdot 0,2)^2) = \mathrm{N}(1,8,\ 1,28),$$

tedy

$$p_a = \mathrm{P}[X < 0] = \Phi(\frac{0 - 1,8}{\sqrt{1,28}}) = 1 - \Phi(1,59) = 1 - 0,944 = 0,056,$$

$$p_b = \mathrm{P}[X > 3] = 1 - \Phi(\frac{3 - 1,8}{\sqrt{1,28}}) = 1 - \Phi(1,06) = 1 - 0,856 = 0,144,$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.6.7)

Z řešení 6.8. [< 0,001]

$$p = 1 - \Phi(\frac{1500 - 8 \cdot 170}{\sqrt{8 \cdot 144}}) = 1 - \Phi(4,125) < 1 - 0,999 = 0,001.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.6.8)

Z řešení 6.9. [0, 1/6]

Netriviální pouze pro $|z| < 1$:

$$F_{X+Y}(z) = \mathrm{P}[X + Y \leqq z] = \iint_{x+y\leqq z} f(x)f(y),$$

což je

$$\frac{1}{2}(1 - |z|z)^2 \quad \text{pro} \quad z < 0$$

a

$$1 - \frac{1}{2}(1 - z)^2 \quad \text{pro} \quad z > 0$$

(ve čtverci $[0,1] \times [-1,0]$ plocha $y \geqq x - z$, tj. levý dolní trojúhelník, resp. kromě pravého horního).

Hustota $z+1$ na $[-1,0]$ a $-z+1$ na $[0,1]$. Střední hodnota je součet středních hodnot, rozptyl součtu nezávislých veličin je součtem rozptylů.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.6.9)

Z řešení 6.10. []

Netriviální pouze pro $|z| > 0$:

$$F_{X/Y}(z) = \mathrm{P}[X/Y \leqq z] = \iint_{x/y \leqq z} f(x)f(y),$$

což je

$$\frac{z}{2} \quad \text{pro} \quad z < 1 \qquad \text{a} \qquad 1 - \frac{1}{2z} \quad \text{pro} \quad z > 1$$

(v jednotkovém čtverci plocha $y \geqq \frac{1}{z}x$.

Hustota $\frac{1}{2}$ na $[0,1]$ a $\frac{1}{2z^2}$ na $[1,\infty]$.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.6.10)

K ZADÁNÍ

Z řešení 6.11. $[\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \frac{\mu_2^2\varepsilon_1^2+\mu_1^2\varepsilon_2^2}{3\mu_2^4}]$

$$\mathrm{E}\, X_i = \mu_1, \quad \mathrm{var}\, X_i = \frac{4\varepsilon_i^2}{12} = \frac{\varepsilon_i^2}{3},$$

$f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}$, tedy

$$\mathrm{E}\, Y \doteq \frac{\mathrm{E}\, X_1}{\mathrm{E}\, X_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2},$$

$$\mathrm{var}\, Y \doteq f_{x_1}^2(\mathrm{E}\, X_1, \mathrm{E}\, X_2)\,\mathrm{var}\, X_1 + f_{x_2}^2(\mathrm{E}\, X_1, \mathrm{E}\, X_2)\,\mathrm{var}\, X_2 = (\frac{1}{\mu_2})^2\frac{\varepsilon_1^2}{3} + (- -\frac{\mu_1}{\mu_2^2})^2\frac{\varepsilon_2^2}{3} = \frac{\mu_2^2\varepsilon_1^2+\mu_1^2\varepsilon_2^2}{3\mu_2^4}.$$

Potřebné hodnoty však lze zjistit přesně,

$$\mathrm{E}\,\frac{X_1}{X_2} = \mathrm{E}\, X_1\, \mathrm{E}\,\frac{1}{X_2} = \mu_1\frac{1}{2\varepsilon_2}\ln\Big(\frac{\mu_2+\varepsilon_2}{\mu_2-\varepsilon_2}\Big) = \mu_1\frac{1}{2\varepsilon_2}\ln\Big(1+\frac{2\varepsilon_2}{\mu_2-\varepsilon_2}\Big)$$

a

$$\mathrm{E}\,\frac{X_1^2}{X_2^2} = \mathrm{E}\, X_1^2\, \mathrm{E}\,\frac{1}{X_2^2} = (\mu_1^2+\varepsilon_1^2/3)\frac{1}{\mu_2^2-\varepsilon_2^2}$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.6.11)

7. Centrální limitní věta

K ZADÁNÍ

Z řešení 7.1. []

Dle CLV je

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \stackrel{.}{\sim} N(n \operatorname{E} X_1, n \operatorname{var} X_1),$$

tedy

$$p \doteq \Phi\Big(\frac{a - n \operatorname{E} X_1}{\sqrt{n \operatorname{var} X_1}}\Big).$$

Pro jednotlivá rozdělení tak dostáváme

$$\Phi\Big(\frac{a-n}{2\sqrt{n}}\Big) \quad \text{(přesně)}, \quad \Phi\Big(\frac{5a-n}{2\sqrt{n}}\Big), \quad \Phi\Big(\frac{a-n}{\sqrt{n}}\sqrt{3}\Big), \quad \Phi\Big(\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{n}}\Big).$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.7.1)

K ZADÁNÍ

Z řešení 7.2. [0,0015]

Celková hmotnost

$$\mathrm{P}[X > 6000] \doteq 1 - \Phi\left(\frac{6000 - 64 \cdot 90}{\sqrt{64 \cdot 10^2}}\right) = 1 - \Phi(3) = 1 - 0,9985 = 0,0015.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.7.2)

K ZADÁNÍ

Z řešení 7.3. [0,006]
Celkem chyb

$$\mathrm{P}[X < 750] \doteq \Phi\left(\frac{750 - 100 \cdot 8}{\sqrt{100 \cdot 4}}\right) = \Phi(-2,5) = 1 - 0,9938 = 0,0062.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.7.3)

K ZADÁNÍ

Z řešení 7.4. [0,013]
Jednu známka

$$\mu = \frac{5+1}{2} = 3, \quad \sigma^2 = \frac{5(5+1)(2\cdot 5+1)}{6}/5 - 3^2 = 2,$$

průměr přibližně $N(3, 2/\sqrt{n})$, tj.

$$p = \Phi(\frac{2,5-3}{\sqrt{2}}\sqrt{n}) = \Phi(-2,236) = 1 - 0,987 = 0,013.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.7.4)

Z řešení 7.5. [0,9857]
Doba čekání při i-té cestě $\sim \mathrm{Ro}(0, 5)$, tedy $\mu = 5/2$, $\sigma^2 = 25/12$. Součet 40 cest dle CLV přibližně
$\mathrm{N}(40 \cdot 5/2, 40 \cdot 25/12) = \mathrm{N}(100, 250/3)$,
tj.
$$p = \Phi\left(\frac{120 - 100}{\sqrt{250/3}}\right) = \Phi(2,19) = 0,985\,7.$$
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.7.5)

K ZADÁNÍ

Z řešení 7.6. [0,92]
Součet 100 nezávislých Ro$(\{1,\dots,6\})$, která mají $\mu = 3,5$, $\sigma^2 = 91/6 - (3,5)^2 \doteq 2,917$. Celkově dle CLV

$$p \doteq \Phi\left(\frac{380-350}{\sqrt{291,7}}\right) - \Phi\left(\frac{350-380}{\sqrt{291,7}}\right) = \Phi(1,756\,8) - \Phi(-1,756\,8) = = 2\Phi(1,756\,8) - 1 = 2\cdot 0,96 - 1 = 0,92.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.7.6)

Z řešení 7.7. [0,984, 162]

$X \sim$ vrácené $\sim \mathrm{Bi}(n, 0,7) \,\dot\sim\, \mathrm{N}(n \cdot 0,7,\ n \cdot 0,7 \cdot 0,3)$,

takže

$$p = 1 - \Phi\left(\frac{99,5 - 0,7n}{\sqrt{0,21n}}\right).$$

Pro $n = 160$

$$p = 1 - \Phi(-2,156) = \Phi(2,156) = 0,984.$$

Pro $p = 0,99$

$$\frac{99,5 - 0,7n}{\sqrt{0,21n}} = u_{1-0,99} = -u_{0,99} = -2,326,$$

tedy

$$0,7n - 2,326\sqrt{0,21}\sqrt{n} - 99,5 = 0,$$

tj.

$$\sqrt{n}_{1,2} = (1,07 \pm 16,72)/1,4$$

a $n = (12,7)^2 = 161,5$ (162,3 bez opravy na celočíselnost).

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.7.7)

K ZADÁNÍ

Z řešení 7.8. [0,058]

X = počet vytažených bílých $\sim \mathrm{Bi}(150, \frac{16}{30}) \dot\sim \mathrm{N}(150\frac{16}{30}, 150\frac{16}{30}\frac{14}{30}) =$
$= \mathrm{N}(80, \frac{112}{3})$.

Tudíž dle CLV (s opravou na celočíselnost)

$$\mathrm{P}[X = 77] \doteq \mathrm{P}[76{,}5 \leqq \mathrm{N}(80, 112/3) \leqq 77{,}5] = \Phi(\frac{77{,}5-80}{\sqrt{112/3}}) - \Phi(\frac{76{,}5-80}{\sqrt{112/3}}) = \Phi(-0{,}409) - \Phi(-0{,}573) = \Phi(0{,}573) - \Phi(0{,}409) \doteq 0{,}717 - 0{,}659 = 0{,}058.$$

(2004-09-03.`1ad111ppx1cyaq`.7.8)

Verze 2004-09-03

K ZADÁNÍ

Z řešení 7.9. [0,85]

X = počet šestek při 100 hodech $\sim \mathrm{Bi}(100, \frac{1}{6})$, s

$$\mathrm{E}\,X = 100 \cdot \frac{1}{6} = \frac{50}{3} \quad \text{a} \quad \operatorname{var} X = 100 \frac{1}{6} \frac{5}{6} = \frac{125}{9} \doteq 13{,}9.$$

Dle CLV (s opravou na celočíselnost)

$$\mathrm{P}[X \leqq 20] \doteq \mathrm{P}[-0{,}5 \leqq \mathrm{N}(50/3, 125/9) \leqq 20{,}5] =$$
$$= \mathrm{P}[\frac{-0{,}5 - 50/3}{\sqrt{125/9}} \leqq \mathrm{N}(0,1) \leqq \frac{20{,}5 - 50/3}{\sqrt{125/9}}] = \Phi(1{,}03) - \Phi(-$$
$$-4{,}61) \doteq 0{,}85 - 0.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.7.9)

K ZADÁNÍ

Z řešení 7.10. [0,987]
Celkem šestek má přibližně $\mathrm{N}(\frac{100}{6}, 100\frac{5}{36})$, Relativní četnost tedy $\mathrm{N}(\frac{1}{6}, \frac{1}{100}\frac{5}{36})$, čili

$$p = 1 - \Phi\left(\frac{1/12 - 1/6}{\sqrt{1/100 \cdot 5/36}}\right) = 1 - \Phi(-5/\sqrt{5}) = \Phi(\sqrt{5}) = \Phi(2,236) = 0,987.$$

(2004-09-03.`1ad111ppx1cyaq`.7.10)

K ZADÁNÍ

Z řešení 7.11. [0,943, 15 976]

Relativní četnost $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum X_i$ má dle CLV přibližně

$$\mathrm{N}(\frac{1}{n}n \cdot 0,4,\ \frac{1}{n^2}n \cdot 0,4 \cdot 0,6) = \mathrm{N}(0,4, 0,24/n),$$

takže

$$p = 1 - \Phi(\frac{0,38 - 0,4}{\sqrt{0,24}}\sqrt{1500}) = \Phi(1,581\,1) = 0,943.$$

$$0,99 \leqq \mathrm{P}[|\overline{X} - 0,4| \leqq 0,01] = \Phi(\frac{0,41 - 0,4}{\sqrt{0,24/n}}) - \Phi(\frac{0,39 - 0,4}{\sqrt{0,24/n}}) =$$

$$= 2\Phi(\frac{\sqrt{n}}{10\sqrt{24}}) - 1,$$

tj.

$$\sqrt{n}/(10\sqrt{24}) \geqq u_{0,995} = 2,58,$$

neboli $n = 2\,400 \cdot 2,58^2 = 15\,975,36$,

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.7.11)

K ZADÁNÍ

Z řešení 7.12. [0,9615]

Podíl nemocných

$$\frac{S_{5000}}{5000} \mathrel{\dot\sim} \mathrm{Bi}(5000,\, 0{,}03)/5000 \mathrel{\dot\sim} \mathrm{N}(0{,}03,\, \frac{1}{5000} \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}97) = \\ = \mathrm{N}(0{,}03,\, 0{,}000\,005\,82),$$

$$\mathrm{P}[0{,}025 < \frac{S_{5000}}{5000} < 0{,}035] \doteq \Phi(\frac{0{,}035 - 0{,}03}{\sqrt{0{,}000\,005\,82}}) - \Phi(\frac{0{,}025 - 0{,}03}{\sqrt{0{,}000\,005\,82}}) = \\ = 2\Phi(2{,}073) - 1 = 2 \cdot 0{,}981 - 1 = 0{,}962.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.7.12)

Verze 2004-09-03

K ZADÁNÍ

Z řešení 7.13. [0,5]
Počet šestek má Bi(60, 1/6), tj.

$$p \doteq 1 - \Phi\left(\frac{10 - 60 \cdot 1/6}{\sqrt{60 \cdot 5/36}}\right) = 1 - \Phi(0) = 0,5.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.7.13)

Verze 2004-09-03

K ZADÁNÍ

Z řešení 7.14. [0,08]
Podíl líců má

$$\frac{1}{200}\,\mathrm{Bi}(200, 0,5) \mathrel{\dot\sim} \mathrm{N}(0,5,\ \frac{1}{200}1/4) = \mathrm{N}(0,5,\ 1/800),$$

$$p = 1 - \Phi\left(\frac{0,55 - 0,5}{\sqrt{1/800}}\right) = 1 - \Phi(\sqrt{2}) = 1 - 0,92 = 0,08.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.7.14)

K ZADÁNÍ

Z řešení 7.15. [144]
Počet výskytů má $\mathrm{Bi}(n,\,0,05) \dot{\sim} \mathrm{N}(0,05n, 0,05 \cdot 0,95n)$, tj.

$$0,8 \leqq 1 - \Phi\left(\frac{5 - n0,05}{\sqrt{n0,05 \cdot 0,95}}\right),$$

tudíž

$$\frac{5 - n0,05}{\sqrt{n0,05 \cdot 0,95}} \leqq u_{0,2} = -0,84$$

a $\sqrt{n}_{1,2} = 1,83 \pm 10,167$, neboli $n \geqq 144$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.7.15)

Z řešení 7.16. [121]

Počet šestek v n hodech má $\mathrm{Bi}(n, 1/6) \dot{\sim} \mathrm{N}(n/6, 5n/36)$. Tudíž (i s opravou na celočíselnost)

$$0{,}995 \leqq 1 - \Phi\left(\frac{9{,}5 - n/6}{\sqrt{5n/36}}\right),$$

tj.

$$\frac{9{,}5 - n/6}{\sqrt{5n/36}} \leqq u_{0{,}005} = -2{,}576,$$

tedy

$$n - 2{,}576\sqrt{5}\sqrt{n} - 6 \cdot 9{,}5 \geqq 0$$

a

$$\sqrt{n}_{1,2} = \frac{5{,}76 \pm \sqrt{33{,}178 + 288}}{2},$$

neboli $n \geqq 10{,}960\,5^2 = 120{,}13$. (bez opravy na celočíselnost je $n = 125$). (2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.7.16)

K ZADÁNÍ

Z řešení 7.17. [77]

Počet výskytů jevu má $\mathrm{Bi}(n, 0,2) \stackrel{\sim}{\sim} \mathrm{N}(0,2n, 0,2 \cdot 0,8n)$. S opravou na celočíselnost

$$0,95 \leqq 1 - \Phi\left(\frac{9,5 - 0,2n}{\sqrt{0,16n}}\right),$$

tedy

$$\frac{9,5 - 0,2n}{\sqrt{0,16n}} \leqq u_{0,05} = -u_{0,95} = -1,645,$$

tj.

$$0,2n - 1,645 \cdot 0,4\sqrt{n} - 9,5 \geqq 0$$

a

$$\sqrt{n}_{1,2} = \frac{0,658 \pm \sqrt{0,433 + 7,6}}{2 \cdot 0,2},$$

neboli $n \geqq 8,7306^2 = 76,22$ (bez opravy na celočíselnost $n = 80$).
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.7.17)

8. Odhady parametrů

Z řešení 8.1. $[\overline{X}]$

Hledáme maximum (přes všechna μ) věrohodnostní funkce (sdružené hustoty)

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-(x_i-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

— derivujeme podle μ:

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu) = 0,$$

tj. $n\mu = \sum X_i$ a $\widehat{\mu} = \overline{X}_n$.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.1)

K ZADÁNÍ

Z řešení 8.2. □

Díky tomu, že pro náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ z $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ platí

$$\overline{X}_n \sim \mathrm{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n}), \quad \frac{s_n^2(n-1)}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \quad \text{a} \quad \frac{\overline{X}_n - \mu}{s_n}\sqrt{n} \sim t_{n-1},$$

kde

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 = \frac{\sum X_i^2 - n\overline{X}^2}{n-1}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.2)

K ZADÁNÍ

Z řešení 8.3. [(211,1, 217,7)]
$n = 9$, $\sigma^2 = 25$, $\overline{X} = 214,4$, tudíž interval spolehlivosti pro střední hodnotu při známém rozptylu je
$$\overline{X} \pm u_{0,975}\sigma/\sqrt{n} = 214,4 \pm 1,960 \cdot 5/3 = 214,4 \pm 3,27 = (211,1,\ 217,7).$$
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.3)

Z řešení 8.4. [(993,1, 1 002,1), (18,4, 129,8)]
$n = 10$, $\sum X_i = 9\,976$, $\overline{X} = 997,6$, $\sum X_i^2 = 9\,952\,408$, tudíž

$$s_n^2 = \frac{\sum X_i^2 - n\overline{X}^2}{n-1} = 38,93.$$

Interval spolehlivosti jsou

$$\overline{X} \pm t_{0.975}(n-1)s_n/\sqrt{n} = 997,6 \pm 2,262 \cdot 6,240/\sqrt{10} = 997,6 \pm 4,463 = (993,1,\ 1\,002,1),$$

$$\left(\frac{s_n^2(n-1)}{\chi^2_{0,975}(n-1)}, \frac{s_n^2(n-1)}{\chi^2_{0,025}(n-1)}\right) = \left(\frac{38,93 \cdot 9}{19,02}, \frac{38,93 \cdot 9}{2,70}\right) = (18,42,\ 129,8).$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.4)

K ZADÁNÍ

Z řešení 8.5. [(41,9, 46,1)]
$I = 44 \pm t_{0,95}(11)4/\sqrt{12} = 44 \pm 2,074 = (41,9,\ 46,1).$
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.5)

K ZADÁNÍ

Z řešení 8.6. [(149,22, 150,78)]
Velký rozsah, tj. přibližná normalita

$$150 \pm u_{0,975}\sqrt{16}/\sqrt{100} = 150 \pm 0,784 = (149,216,\ 150,784).$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.6)

K ZADÁNÍ

Z řešení 8.7. $\boxed{X}$

Hledáme maximum (přes p) sdružené hustoty

$$\prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}[X_i = x_i] = p^{\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i},$$

což je totéž jako maximalizovat její logaritmus

$$\sum x_i \ln p + \left(n - \sum x_i\right) \ln(1-p).$$

Derivace podle p se má anulovat:

$$\frac{\sum x_i}{p} - \frac{n - \sum x_i}{1-p} = 0,$$

tj.

$$\sum x_i - p \sum x_i - np + p \sum x_i = 0,$$

což splňuje odhad

$$\widehat{p} = \sum x_i / n = \overline{X}_n.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.7)

K ZADÁNÍ

Z řešení 8.8. [0,38, (0,23, 0,53)]

Při výběru z $\mathrm{Alt}(p)$ je maximálně věrohodným odhadem

$$\widehat{p} = \overline{X} = \frac{16}{42} \doteq 0,38.$$

Přesnost tohoto nestranného odhadu měřená jeho rozptylem je

$$\operatorname{var}\widehat{p} = \operatorname{var}\overline{X} = \frac{\operatorname{var} X_1}{n} = \frac{p(1-p)}{n} \doteq \frac{16}{42}\frac{26}{42}/42 = 0,005\,61$$

při nahrazení p jeho odhadem. Každopádně určitě

$$\operatorname{var}\overline{X} \leq \frac{\max(p(1-p))}{n} \leq \frac{1/4}{n} = 0,005\,95.$$

Přibližný 95% intervalový odhad pro p je

$$\frac{16}{42} \pm u_{0,975}\sqrt{\frac{16}{42}\frac{26}{42}}/\sqrt{42} = 0,381 \pm 1,960 \cdot 0,485\,6/6,480\,7 = \\ = 0,381 \pm 0,147 = (0,23,\ 0,53).$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.8)

Verze 2004-09-03

K ZADÁNÍ

Z řešení 8.9. $[0,3 \pm 0,071,\ 2400 \pm 568]$

$$\widehat{p} = \frac{48}{160} = 0,3,$$

tedy 2400 zaměstnanců.

$$I = \widehat{p} \pm u_{0,975}\sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p})/160} = 0,3 \pm 1,96 \cdot 0,0362 = (0,229,\ 0,371),$$

pro počet zaměstnanců $8000I = (1832, 2968)$.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.9)

Z řešení 8.10. [(0,56, 0,68)]
Jde o výběr z Alt(p), takže
$(n\overline{X} - np)/\sqrt{n\widehat{p}(1-\widehat{p})} \to \mathrm{N}(0,1)$.
Přibližný interval spolehlivosti je ($\widehat{p} = 140/225 = 0{,}622\,2$)
$\widehat{p} \pm u_{1-0{,}05/2}\sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p})}/\sqrt{n} = 0{,}622\,2 \pm 1{,}960 \cdot 0{,}484\,8/15 =$
$= 0{,}622\,2 \pm 0{,}063\,4 \doteq (0{,}56,\ 0{,}69)$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.10)

K ZADÁNÍ

Z řešení 8.11. [(0,056, 0,184)]
Jde o výběr z $\mathrm{Alt}(p)$, takže

$$(n\overline{X} - np)/\sqrt{n\widehat{p}(1-\widehat{p})} \to \mathrm{N}(0,1).$$

Přibližný interval spolehlivosti je ($\widehat{p} = 12/100 = 0,12$)

$$\widehat{p} \pm u_{1-0,05/2}\sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p})}/\sqrt{n} = 0,12 \pm 1,960 \cdot 0,325\,0/10 = \\ = 0,12 \pm 0,063\,7 \doteq (0,056,\ 0,184).$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.11)

K ZADÁNÍ

Z řešení 8.12. []

Maximálně věrohodný odhad maximalizuje věrohodnostní funkci (sdruženou hustotu výběru)

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 1/\theta^n, \quad \text{je-li} \quad 0 < x_i < \theta \forall_i$$

(pak $\theta \geqq \max_i x_i$), a 0 jinak. Tudíž (θ musí být co nejmenší, ale alespoň tak velké jako $\max x_i$), což splňuje $\widehat{\theta} = \max x_i$.

Jeho distribuční funkce je

$$\mathrm{P}[\max X_i \leqq x] = \prod \mathrm{P}[X_i \leqq x] = (\frac{x}{\theta})^n,$$

je-li $0 < x < \theta$ (0 pro $x < 0$ a 1 pro $x > \theta$), a tedy hustota $\max X_i$ je

$$f_{\max X_i}(x) = \frac{n}{\theta}(\frac{x}{\theta})^{n-1},$$

je-li $0 < x < \theta$.

$$\mathrm{E}_\theta \max X_i = n\theta \int_0^\theta \frac{x^n}{\theta^{n+1}} = \frac{n\theta}{n+1}(1-0),$$

$$\mathrm{E}_\theta (\max X_i)^2 = n\theta^2 \int_0^\theta \frac{x^{n+1}}{\theta^{n+2}} = \frac{n}{n+2}\theta^2,$$

$$\mathrm{var}_\theta \max X_i = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}\theta^2,$$

tedy $\widehat{\theta}$ není nestranný odhad.

Verze 2004-09-03

Nestranným odhadem pro $\mathrm{E}\, X_1 = \theta/2$ může (dle předchozího) být
$\bar{\theta} = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n}\hat{\theta} = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n}\max X_i$,
jehož rozptyl $\frac{\theta^2}{4n(n+2)}$ je pro $n > 1$ menší než $\frac{\theta^2}{12n} = \operatorname{var} \overline{X}$, a tudíž je (z hlediska MSE) lepším (nestranným) odhadem $\mathrm{E}\, X_1$ než $\overline{X}$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.12)

Z řešení 8.13. $[(\frac{\max X_i}{\sqrt[n]{1-\alpha/2}}, \frac{\max X_i}{\sqrt[n]{\alpha/2}})]$

Pro dolní mez $D = g(\max X_i)$ (g rostoucí) požadujeme

$$\alpha/2 = \mathrm{P}[D > \theta] = \mathrm{P}[\max X_i > g_{-1}(\theta)] = 1 - (g_{-1}(\theta)/\theta)^n,$$

tedy

$$g_{-1}(\theta) = \theta \sqrt[n]{1-\alpha/2}$$

a

$$D = g(\max X_i) = \max X_i / \sqrt[n]{1-\alpha/2}.$$

Pro horní mez $H = g(\max X_i)$ (g rostoucí) požadujeme

$$\alpha/2 = \mathrm{P}[H < \theta] = \mathrm{P}[\max X_i < g_{-1}(\theta)] = (g_{-1}(\theta)/\theta)^n,$$

tedy

$$g_{-1}(\theta) = \theta \sqrt[n]{\alpha/2}$$

a

$$H = g(\max X_i) = \max X_i / \sqrt[n]{\alpha/2}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.13)

K ZADÁNÍ

Z řešení 8.14. []

$n = 10$, $\max X_i = 10$, $\sum X_i = 58$, $\overline{X} = 5,8$, $\sum X_i^2 = 412$, $s_n^2 = 8,4$. V minulých příkladech diskutované odhady jsou:

$$2\overline{X} = 11,6, \quad 2\,\mathrm{med}\,X = 2\tfrac{7+6}{2} = 13,$$

max. věrohodný

$$\widehat{\theta} = 10\tfrac{11}{10} = 11,$$

95% intervalový

$$(10/\sqrt[10]{0,975}, 10/\sqrt[10]{0,025}) = (10,0,\ 14,5),$$

zatímco přibližný intervalový odhad by byl $(8,0,\ 14,4)$, neboť intervalový odhad $\mathrm{E}\,X_1 = \theta/2$ je

$$5,8 \pm u_{0,975}\sqrt{8,4}/\sqrt{10} = 5,8 \pm 1,960 \cdot 2,898/\sqrt{10} = 5,8 \pm 1,8 = (4,0,\ 7,2).$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.14)

K ZADÁNÍ

Z řešení 8.15. [(21,2, 21,7)]
$n = 9$, $\sum X_i = 193$, $\overline{X} = 21,44$, $\sum X_i^2 = 4\,139,72$, tudíž

$$s_n^2 = \frac{\sum X_i^2 - n\overline{X}^2}{n-1} = 0,117\,8$$

a interval spolehlivosti pro střední hodnotu při neznámém rozptylu je

$$\overline{X} \pm t_{0,975}(n-1)s_n/\sqrt{n} = 21,44 \pm 2,306 \cdot 0,343\,2/3 = 21,44 \pm 0,263\,8 = = (21,2,\ 21,7).$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.15)

K ZADÁNÍ

Z řešení 8.16. [(177,3, 185,3)]
$n = 26$, $\sum X_i = 4\,714,5$, $\overline{X} = 181,33$, $\sum X_i^2 = 857\,197,25$, tudíž

$$s_n^2 = \frac{\sum X_i^2 - n\overline{X}^2}{n-1} = 93,26$$

a interval spolehlivosti pro střední hodnotu při neznámém rozptylu je

$$\overline{X} \pm t_{0,975}(n-1)s_n/\sqrt{n} = 181,33 \pm 2,060 \cdot 9,657/5 = 181,33 \pm 3,979 = \\ = (177,3,\ 185,3).$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.16)

K ZADÁNÍ

Z řešení 8.17. [(63,63, 66,37), (0,156, 0,324)]
Přibližně normalita (n velké), tedy průměrná rychlost

$$65 \pm u_{0,975} 7/\sqrt{100} = 65 \pm 1,37 = (63,63,\ 66,37).$$

$np(1-p) > 9$, podíl překračujících

$$0,24 \pm u_{0,975} \frac{\sqrt{0,24 \cdot 0,76}}{10} = 0,24 \pm 0,084 = (0,156,\ 0,324).$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.17)

K ZADÁNÍ

Z řešení 8.18. [600]
Výběr bude mít velký rozsah, a tak odhad
$d = \overline{X} - \mu \sim \mathrm{N}(0, 2500^2/n)$,
tj.
$$0,05 = \mathrm{P}[|d| > 200] = 2(1 - \Phi(\frac{200}{2500}\sqrt{n}))$$
a
$$n = (u_{0,975}\frac{2500}{200})^2 = 24,5^2 = 600,25$$
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.18)

K ZADÁNÍ

Z řešení 8.19. [1067, 683]

$d = \overline{X} - \widehat{p} \stackrel{\cdot}{\sim} \mathrm{N}(0, \sigma^2/n)$.

Chceme

$0,05 = \mathrm{P}[|d| > 0,03] = 2(1 - \Phi(\frac{0,03}{\sigma}\sqrt{n}))$,

tj.

$\sqrt{n} = u_{0,975}\sigma/0,03$.

Přinejhorším $\sigma^2 = 0,25$, $n = 1067$.

Je-li $p > 0,8$, je $\sigma^2 < 0,16$ a $n = 683$.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.8.19)

9. Testování hypotéz

K ZADÁNÍ

Z řešení 9.1. [8,2%, 52,8%]
Testuje se H_0: $p = 0,1$ (kterou zamítáme při velkém počtu uhynulých) proti H_1: $p = 0,3$.

$p_1 = \mathrm{P}_{0,1}[\text{zam. } H_0] = 1 - (0,9^5 + 5 \cdot 0,1^1 0,9^4) = 0,0815,$

$p_2 = \mathrm{P}_{0,3}[\text{nezam. } H_0] = 0,7^5 + 5 \cdot 0,3^1 0,7^4 = 0,5282,$

čili pro 5% hladinu testu by bylo třeba zamítat až při více uhynulých (ale to by zase hodně vzrostla chyba p_2).
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.1)

K ZADÁNÍ

Z řešení 9.2. [Ano]

Kdyby přiřazoval názvy náhodně, byla by pravděpodobnost právě k nesprávně umístěných prvků v n-tici (zde $n = 8$)

$$p_k = \binom{n}{k} P_k/n!, \quad \text{kde} \quad P_0 = 0, P_1 = 0, P_2 = 1$$

a

$$P_k = (k-1)(P_{k-1} + P_{k-2}), \quad k > 2,$$

je počet k-tic, kde žádný prvek není na svém místě (prvek k se přidává ke $k-1$-tici s žádným správným a s jedním si prohodí místo, nebo ke $k-1$-tici s právě 1 správným a s tím si prohodí místo).

Pravděpodobnost poznání aspoň 5 vín při náhodném přiřazování by byla

$$\sum_0^3 p_k = 0{,}003\,50,$$

tedy malá, zamítáme tedy hypotézu o náhodném hádání — jde asi o znalce. (Ještě i uhádnout 4 a více nastane jen v 1,9% případů, ale 3 a více už v 8%.) (2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.2)

Verze 2004-09-03

K ZADÁNÍ

Z řešení 9.3. []

X = počet zmetků ve vzorku $\sim \mathrm{HG}(10\,000, k, 500)$, kde k neznáme. Při nejhorší, ale ještě přípustné zmetkovitosti je $k = 100$, budeme tedy testovat

$H_0 : k = 100 \quad \text{proti} \quad H_1 : k > 100.$

$p = n/m = 0{,}01 < 0{,}1$, tudíž $X \dot\sim \mathrm{Bi}(n, p)$; $n > 30, p < 0{,}1$, tudíž

$X \dot\sim \mathrm{Po}(\lambda), \quad \text{kde} \quad \lambda = np = 5.$

a) Hledáme co nejmenší číslo j takové, aby

$\mathrm{P}[X \geqq j] \leqq 0{,}05$

(kritickým oborem testu na 5% hladině bude $X \geqq j$ — v tom případě zamítáme), čili zamítneme H_0 při $X \geqq 10$ ($\mathrm{P}[\mathrm{Po}(5) \leqq 8] = 0{,}93$, $\mathrm{P}[\mathrm{Po}(5) \leqq 9] = 0{,}97$).

b) Na hladině významnosti 0,01 bychom zamítali při $X \geqq 12$ ($\mathrm{P}[\mathrm{Po}(5) \leqq 10] = 0{,}986$, $\mathrm{P}[\mathrm{Po}(5) \leqq 11] = 0{,}995$).

Při skutečné zmetkovitosti $p = 2\%$ je

$X \dot\sim \mathrm{Po}(np) = \mathrm{Po}(10).$

Při testu a) se chyby 2. druhu dopustíme, když vyjde $X \leqq 9$, tedy s pravděpodobností

$\mathrm{P}[\mathrm{Po}(10) \leqq 9] = 0{,}46.$

Při testu b) je pravděpodobnost chyby 2. druhu

$\mathrm{P}[\mathrm{Po}(10) \leqq 11] = 0{,}70.$

Při skutečné zmetkovitosti $p = 3\%$ je

$$X \dot\sim \mathrm{Po}(15) \dot\sim \mathrm{N}(15, 15)$$

(nemáme-li tabulky pro Po(15)). Při testu a) dojde k chybě 2. druhu, když $X \leqq 9$, tedy s pravděpodobností

$$\mathrm{P}[X < 10] = \mathrm{P}[X < 9,5] \doteq \Phi\left(\frac{9,5 - 15}{\sqrt{15}}\right) = \Phi(-1,42) = 1 - \Phi(1,42) = 0,08.$$

Při testu b) pak s pravděpodobností

$$\mathrm{P}[X < 12] \doteq 1 - \Phi(0,90) = 0,18.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.3)

Z řešení 9.4. [Nejspíše ano. Nepopřeme.]
Předpokládáme, že jde o výběr z $N(\mu, \sigma^2)$. $n = 11$, $\sum X_i = 98,1$, $\sum X_i^2 = 875,49$, tudíž $\overline{X} = 8,918$, $s^2 = 0,061\,636$.

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s}\sqrt{n} = \frac{8,918 - 8,8}{0,248\,267}\sqrt{11} = 1,579 < t_{0,975}(10) = 2,228,$$

tudíž nezamítáme $H_0 : \mu = \mu_0 = 8,8$ (p-hodnota příslušná spočtenému T je 14,54 %).

$$\chi^2 = \frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2} = \frac{0,061\,636 \cdot 10}{0,1} = 6,164,$$

což je mezi

$$\chi^2_{0,025}(10) = 3,25 \quad \text{a} \quad \chi^2_{0,975}(10) = 20,48,$$

tudíž nezamítáme $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0,1$ na 5% hladině významnosti.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.4)

K ZADÁNÍ

Z řešení 9.5. [Ano]
Statistika

$$\chi^2 = (n-1)s^2/\sigma_0^2 \doteq 34 \in (12{,}4,\ 39{,}36) = (\chi^2_{0{,}025}(24), \chi^2_{0{,}975}(24)),$$

takže těsně nezamítáme H_0: $\sigma = \sigma_0^2 = 300^2$ na 5% hladině významnosti.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.5)

Z řešení 9.6. [Je]
$n = 16$, $\sum X_i = 62,56$, $\sum X_i^2 = 264,8216$, tudíž $\overline{X} = 3,91$, $s^2 = 1,347$.

$$\chi^2 = \frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2} = \frac{1,347 \cdot 15}{0,36} = 155,96 > \chi^2_{0,95}(15) = 25,00,$$

tudíž zamítáme $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0,36$ proti jednostranné $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ na 5% hladině významnosti (kontrolujeme mylné podezření při dostatečné kvalitě).
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.6)

K ZADÁNÍ

Z řešení 9.7. []

H_0 zamítáme, když $|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}| > u_{1-\alpha/2}$, takže pravděpodobnost chyby 2. druhu při $\mu \neq \mu_0$ je

$$\beta(\mu) = \mathrm{P}_\mu[\text{nezam. } H_0] = \mathrm{P}_\mu[\overline{X} \in \mu_0 \pm u_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}] =$$
$$= \Phi\Big(\frac{(\mu_0 + u_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}) - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\Big) - \Phi\Big(\frac{(\mu_0 - u_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}) - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\Big) =$$
$$= \Phi\Big(\frac{\mu_0 - \mu}{\sigma}\sqrt{n} + u_{1-\alpha/2}\Big) - \Phi\Big(\frac{\mu_0 - \mu}{\sigma}\sqrt{n} - u_{1-\alpha/2}\Big).$$

Silofunkce je $1 - \beta(\mu)$, např. pro $n = 9$, $\alpha = 0,05$ a

$$\mu = \mu_0 + \sigma, \quad \mu_0 + \frac{1}{2}\sigma, \quad \mu_0 + 2\sigma$$

je 0,85, 0,32 a téměř 1.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.7)

K ZADÁNÍ

Z řešení 9.8. [Není, 385]

Testujeme H_0: $p = p_0$ (=0,5), $\widehat{p} = 22/40 = 0,55$, $n = 40$.

$|U| = |\widehat{p} - p_0|\sqrt{n}/\sqrt{p_0(1-p_0)} = |0,632| < 1,960 = u_{0,975}$, takže nezamítáme H_0 na 5%.

Hledáme, kdy $|U| > u_{0,975} = 1,960$, tj.

$n > (1,960\sqrt{0,5 \cdot 0,5}/0,05) = 384,16$, tj. pro $n \geqq 385$.

Pokud bychom ve jmenovateli statistiky U použili p_0 místo $\widehat{p}$, vyšlo by $n > 380,1$, tedy $n \geqq 381$.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.8)

K ZADÁNÍ

Z řešení 9.9. [Ano]
Párový test, $n = 6$. Pro rozdíl je $\overline{Z} = 0{,}083$, $\sum Z_i^2 = 0{,}23$, tedy $s^2 = 0{,}0377$.

$$|T| = \frac{|\overline{Z}|}{s}\sqrt{n} = |1{,}05| \not> 2{,}571 = t_{0{,}975}(n-1),$$

takže nezamítáme H_0: $\delta_0 = 0$ na 5%.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.9)

K ZADÁNÍ

Z řešení 9.10. [Ano]
Nepárový test, předp. nezávislost. $n_1 = 6$, $\overline{A} = 57$, $\sum A_i^2 = 19\,558$, tj. $s_A^2 = 12{,}8$; $n_2 = 5$, $\overline{B} = 51{,}6$, $\sum B_i^2 = 13\,342$, tj. $s_B^2 = 7{,}3$.

$$|T| = \frac{|\overline{A} - \overline{B}|}{\sqrt{(n_1-1)s_A^2 + (n_2-1)s_B^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}} =$$
$$= |2{,}771| > t_{0{,}975}(n_1+n_2-2) = 2{,}262,$$

takže zamítáme H_0: $\mu_A = \mu_B$ na 5% hladině významnosti.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.10)

K ZADÁNÍ

Z řešení 9.11. [Ne]
Za H_0: $p_1 = p_2 = 1/2$ má veličina χ^2 asymptoticky χ^2_{2-1}, nejmenší teoretická četnost $111\,394 \cdot 0,5 > 5$,

$$\chi^2 = \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(X_2 - np_2)^2}{np_2} = \frac{(117\,137 - 228\,531 \cdot 0,5)^2}{228\,531 \cdot 0,5} + \\ + \frac{(111\,394 - 228\,531 \cdot 0,5)^2}{228\,531 \cdot 0,5} = 144,32 > \chi^2_{0,95}(1) = 3,84,$$

takže zamítáme H_0 na 5% hladině významnosti (p-hodnota je prakticky nulová).
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.11)

K ZADÁNÍ

Z řešení 9.12. [Ne, je dávána]
Za H_0: $p_i = p = 1/10$, $i = 0, \dots, 9$ má veličina χ^2 asymptoticky χ^2_{10-1}, nejmenší teoretická četnost $200 \cdot 0{,}1 > 5$,

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^{9} \frac{X_i^2}{np_i} - n = \frac{1}{np} \sum_{i=0}^{9} X_i^2 - n = 1/(200 \cdot 0.1)(35^2 + 16^2 + \cdots + 24^2) - \\ - 200 = 0{,}05 \cdot 4498 - 200 = 24{,}9 > \chi^2_{0{,}95}(9) = 16{,}92,$$

takže zamítáme H_0 na 5% hladině významnosti (aktuální p-hodnota je jen 0,31 %).
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.12)

K ZADÁNÍ

Z řešení 9.13. [Není]

Očekávané četnosti

956,7	43,3
478,3	21,7

Za hypotézy nezávislosti počtu nekvalitních na technologii má veličina χ^2 asymptoticky $\chi^2_{(2-1)(2-1)}$, z tabulky očekávaných četností je nejmenší z nich $500 \cdot 65/1\,500 = 21,7 > 5$,

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(n_{ij} - n_{i.}n_{.j}/n)^2}{n_{i.}n_{.j}/n} = \frac{(-6,7)^2}{956,7} + \frac{6,7^2}{43,3} + \frac{6,7^2}{478,3} + \\ + \frac{(-6,7)^2}{21,7} \doteq 3,25 < \chi^2_{0,95}(1) = 3,84,$$

takže nezamítáme H_0 na 5% hladině významnosti (p-hodnota vychází 7,14 %).
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.13)

K ZADÁNÍ

Z řešení 9.14. [Ano]
Za hypotézy nezávislosti hladiny alkoholu a reakce má veličina χ^2 asymptoticky $\chi^2_{(3-1)(2-1)}$, nejmenší očekávaná četnost je $15 \cdot 40/100 = 6 > 5$,

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{n_{ij}^2}{n_{i.} n_{.j}} - n = 36,383 > \chi^2_{0,95}(2) = 5,991,$$

takže zamítáme H_0 na 5% hladině významnosti. Ve skutečnosti p-hodnota tohoto testu je $1,258 \cdot 10^{-8}$.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.14)

K ZADÁNÍ

Z řešení 9.15. [Je]
Za hypotézy nezávislosti známek z chování a z matematiky má veličina χ^2 asymptoticky $\chi^2_{(2-1)(3-1)}$, nejmenší očekávaná četnost je $20 \cdot 30/100 = 6 > 5$,

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{n_{ij}^2}{n_{i.} n_{.j}} - n = 11,458 > \chi^2_{0,95}(2) = 5,991,$$

takže zamítáme H_0 na 5% hladině významnosti. P-hodnota je 0,33 %.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.15)

Z řešení 9.16. [Ano]

Za hypotézy nezávislosti stavů snoubenců má statistika χ^2 asymptoticky $\chi^2_{(3-1)(3-1)}$, nejmenší teoretická četnost je $2\,318 \cdot 3\,072/91\,059 > 5$,

$\chi^2 = 22\,829,1 > \chi^2_{0,95}(4) = 9,488$,

takže zamítáme nezávislost na 5% hladině významnosti (a p-hodnota je prakticky nulová).

Z velikostí jednotlivých sčítanců v χ^2

230,9	719,0	1 289,4
693,3	<u>8 747,1</u>	1 267,6
987,4	708,6	<u>8 207,1</u>

je vidět, že hlavním zdrojem závislosti je, že ovdovělý si bere ovdovělou a rozvedený rozvedenou.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.16)

Z řešení 9.17. [Závislé]
Některé teoretické četnosti jsou malé, je proto třeba slučovat pole, např. řádku $i = 3$ s $i = 4$, sloupec $j = 1$ s $j = 2$ a $j = 3$ s $j = 4$ — dostaneme $\begin{smallmatrix} 9 & 3 \\ 8 & 5 \\ 4 & 11 \end{smallmatrix}$ s nejmenší očekávanou četností $19 \cdot 12/40 = 5,7 > 5$.

$$\chi^2 = n \sum_{i,j} \frac{n_{ij}^2}{n_{i.} n_{.j}} - n = 6,779 > \chi^2_{0,95}(2 \cdot 1) = 5,99,$$

takže zamítáme nezávislost známek. P-hodnota vychází 3,73 %.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.17)

Z řešení 9.18. [Neúspěšný]
Testujeme H_0: $\sigma^2 = 0,14^2$ proti jednostranné H_1: $\sigma^2 < 0,14^2$ (závažnou chybou by bylo přijmout nekvalitního laboranta — chceme přísně detekovat malé hodnoty rozptylu). $\overline{X} = 6,475$, $\sum X_i^2 = 251,6$, takže $s^2 = 0,0062$ a

$$\chi^2 = (n-1)s^2/\sigma_0^2 = 5 \cdot 0,0062/0,14^2 = 1,569 \not< \chi^2_{0,05}(5) = 1,15,$$

takže nezamítáme H_0 a laborant ještě není dost dobrý.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.18)

K ZADÁNÍ

Z řešení 9.19. [Ano]
$|U| = |\overline{X} - \mu_0|\sqrt{n}/s = |-1{,}886| < 1{,}960 = u_{0{,}975}$,
tedy nezamítáme H_0: $\mu = \mu_0 = 10\,000$ na 5% hladině významnosti.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.19)

Z řešení 9.20. [Ano]
Testujeme H_0: $p = 0,15$, $\widehat{p} = 150/900 = 1/6$.
$|U| = |\widehat{p} - 0,15|\sqrt{900}/\sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p})} = |1,4| < 1,960 = u_{0,975}$,
takže nezamítáme H_0 na 5%.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.20)

K ZADÁNÍ

Z řešení 9.21. [nebude]

Představujeme si $X_i = 1$, je-li i-tý občan pro starostu, 0 jinak, a $\widehat{p} = \overline{X} = 0,48$.

$$|U| = |\frac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p})}}\sqrt{n}| = |\frac{0,48 - 0,6}{\sqrt{0,48 \cdot 0,52}}\sqrt{100}| = |-2,402| > u_{0,975} = 1,960,$$

tudíž zamítáme $H_0 : p = p_0 = 0,6$ na 5% hladině významnosti.

Stejně tak bychom zamítali i při testování $H_0 : p_1 = 0,6, p_2 = 0,4$ pomocí χ^2-testu dobré shody:

$$\chi^2 = \frac{(48-60)^2}{60} + \frac{(52-60)^2}{60} = 2,4 + 3,6 = 6 > \chi^2_{0,95}(1) = 3,841.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.21)

K ZADÁNÍ

Z řešení 9.22. [Není důvod]
Máme $X_i = 1$, padne-li v i-tém hodu rub, 0 jinak, a $\widehat{p} = \overline{X} = 0,45$.

$$|U| = \left|\frac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p})}}\sqrt{n}\right| = \left|\frac{0,45 - 0,5}{\sqrt{0,45 \cdot 0,55}}\sqrt{200}\right| = |-1,421| < u_{0,975} = 1,960,$$

tudíž nezamítáme $H_0 : p = p_0 = 0,5$ na 5% hladině významnosti.

Stejně tak bychom nezamítali ani při testování $H_0 : p_1 = 0,5, p_2 = 0,5$ pomocí χ^2-testu dobré shody:

$$\chi^2 = \frac{(90-100)^2}{100} + \frac{(110-100)^2}{100} = 1 + 1 = 2 < \chi^2_{0,95}(1) = 3,841.$$

Odpovídající p-hodnota je 15,73 %.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.22)

Z řešení 9.23. [Nemá]
Při nezávislosti v kontingenční tabulce $\begin{smallmatrix} 58 & 42 \\ 134 & 66 \end{smallmatrix}$ má statistika χ^2 rozdělení $\chi^2_{(2-1)(2-1)}$,

$$\chi^2 = \frac{(n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21})^2 n}{n_{1.}n_{2.}n_{.1}n_{.2}} = 2,344 < \chi^2_{0,95}(1) = 3,841,$$

takže nezamítáme nezávislost postřiku a kvality. P-hodnota je 12,58 %.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.23)

K ZADÁNÍ

Z řešení 9.24. [Ne, nezávisí to]
Máme tabulku

$$\begin{array}{cc|c} 15 & 8 & 23 \\ 20 & 17 & 37 \\ \hline 35 & 25 & 60 \end{array}$$

Za hypotézy nezávislosti kouření na pohlaví má veličina χ^2 asymptoticky $\chi^2_{(2-1)(2-1)}$, nejmenší očekávaná četnost je $25 \cdot 23/60 = 9{,}58 > 5$,

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{n_{ij}^2}{n_{i.} n_{.j}} - n = 60\left(\frac{15^2}{23 \cdot 35} + \frac{8^2}{23 \cdot 25} + \frac{20^2}{37 \cdot 35} + \frac{17^2}{37 \cdot 25}\right) - 60 = \\ = 0{,}727 < \chi^2_{0{,}95}(1) = 3{,}841,$$

takže nezamítáme H_0 na 5% hladině významnosti (také p-hodnota je vysoká, 39,39 %).
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.24)

Z řešení 9.25. [Ano]
Za hypotézy nezávislosti průběhu na očkování má veličina χ^2 asymptoticky $\chi^2_{(2-1)(2-1)}$, nejmenší očekávaná četnost je $14 \cdot 15/31 = 6,77 > 5$,

$$\chi^2 = n\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{n_{ij}^2}{n_{i.}n_{.j}} - n = 31\left(\frac{11^2}{14\cdot 16}+\frac{3^2}{14\cdot 15}+\frac{5^2}{17\cdot 16}+\frac{12^2}{17\cdot 15}\right)-31 =$$
$$= 7,429 > \chi^2_{0,95}(1) = 3,841,$$

takže zamítáme H_0 na 5% hladině významnosti (a p-hodnota je 0,64 %).
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.25)

K ZADÁNÍ

Z řešení 9.26. [Ano]
Za hypotézy nezávislosti barev očí otce a syna má statistika χ^2 asymptoticky $\chi^2_{(4-1)(4-1)}$, nejmenší teoretická četnost je $180 \cdot 137/1\,000 > 5$,

$$\chi^2 = 270,35 > \chi^2_{0,95}(9) = 16,92,$$

takže zamítáme nezávislost na 5% hladině významnosti (a s prakticky nulovou p-hodnotou).
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.9.26)

10. Korelace a regrese

K ZADÁNÍ

Z řešení 10.1. [Záv.]

Za hypotézy nezávislosti v N_2 (což je ekvivalentní $\varrho = 0$) má statistika T rozdělení t_{9-2},

$$r = \left(\sum U_i V_i - n\overline{U}\overline{V}\right) / \left[\left(\sum U_i^2 - n\overline{U}^2\right)\left(\sum V_i^2 - n\overline{V}^2\right)\right]^{1/2} =$$

$$= \frac{2,184 - 9 \cdot 0,457 \cdot 0,510}{\sqrt{(1,996 - 9 \cdot 0,457^2)(2,446 - 9 \cdot 0,510^2)}} = \frac{0,086}{\sqrt{0,119 \cdot 0,105}} = 0,769.$$

$$|T| = \left|\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2}\right| = \left|\frac{0,769}{\sqrt{1-0,769^2}}\sqrt{7}\right| = |3,295| > 2,365 = t_{0,975}(7),$$

takže zamítáme hypotézu nezávislosti mezi pracovníky.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.10.1)

Verze 2004-09-03

K ZADÁNÍ

Z řešení 10.2. []

V modelu

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + e_i$$

získáme odhady $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}$ jako ty hodnoty α, β, ve kterých je $\sum_i e_i^2$ minimální. Derivace podle α a β pokládáme rovny 0:

$$-2\sum Y_i - (\alpha + \beta x_i) = 0$$

a

$$-2\sum (Y_i - (\alpha + \beta x_i))x_i = 0,$$

tedy

$$\widehat{\alpha} = \overline{Y} - \widehat{\beta}\overline{X}$$

z první rovnice, a po dosazení do druhé

$$\widehat{\beta} = \frac{\sum (Y_i x_i - \overline{Y} x_i)}{\sum (x_i^2 - x_i \overline{x})} = \frac{\sum x_i (Y_i - \overline{Y})}{\sum x_i (x_i - \overline{x})} = \frac{n\sum x_i Y_i - \sum x_i \sum Y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.10.2)

K ZADÁNÍ

Z řešení 10.3. []

Máme model

$$Y_i = kx_i + e_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

a budeme hledat to k, které minimalizuje $\sum(Y_i - kx_i)^2$. Derivaci (podle k) tohoto výrazu položíme rovnou nule

$$-2\sum(Y_i - kx_i)x_i = 0, \qquad \text{tj.} \qquad \widehat{k} = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2}.$$

(Výsledek je jiný než v modelu $Y_i = a + bx_i$.)

Zapsáno maticově, v modelu $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}$ s $\mathbf{X} = (x_1, \ldots, x_n)'$ a $\boldsymbol{\beta} = (k)$ máme odhad

$$\widehat{k} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \left(\sum x_i^2\right)^{-1} \sum x_i Y_i,$$

odhadem rozptylu e_i je $s^2 = S_e/(n-1) = (\sum Y_i^2 - \widehat{k}\sum x_i Y_i)/(n-1)$.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.10.3)

Verze 2004-09-03

K ZADÁNÍ

Z řešení 10.4. []

Máme model

$$Y_i = ax_i + b + c/x_i + e_i, \qquad i = 1, \dots, n,$$

graf této funkce má (jako hyperbola) 2 větve s asymptotami $y = ax + b$ a osou y. Budeme hledat ta (a, b, c), která minimalizují $\sum(Y_i - (ax_i + b + c/x_i))^2$. Derivace (podle a, b a c) tohoto výrazu položíme rovny nule

$$\begin{array}{lcl} 2\sum(Y_i - (ax_i + b + \frac{c}{x_i}))(-x_i) = 0 & & a\sum x_i^2 + b\sum x_i + cn = \sum x_i Y_i \\ 2\sum(Y_i - (ax_i + b + \frac{c}{x_i}))(-1) = 0 & \text{tj.} & a\sum x_i + bn + c\sum \frac{1}{x_i} = \sum Y_i \\ 2\sum(Y_i - (ax_i + b + \frac{c}{x_i}))\frac{1}{x_i^2} = 0 & & an + b\sum \frac{1}{x_i} + c\sum \frac{1}{x_i^2} = \sum Y_i \frac{1}{x_i} \end{array}$$

Vyjádříme-li z poslední rovnice $c = (\sum x_i Y_i - a\sum x_i^2 - b\sum x_i)/n$ a dosadíme do prvních dvou, máme

$$a\Big(\sum x_i - \frac{\sum \frac{1}{x_i} \sum x_i^2}{n}\Big) + b\Big(n - \frac{\sum \frac{1}{x_i} \sum x_i}{n}\Big) = \sum Y_i - \frac{\sum \frac{1}{x_i} \sum x_i Y_i}{n}$$

$$a\Big(n - \frac{\sum \frac{1}{x_i^2} \sum x_i^2}{n}\Big) + b\Big(\sum \frac{1}{x_i} - \frac{\sum \frac{1}{x_i^2} \sum x_i}{n}\Big) = \sum Y_i \frac{1}{x_i} - \frac{\sum \frac{1}{x_i^2} \sum x_i Y_i}{n},$$

Verze 2004-09-03

z čehož např.

$$\widehat{a}=\frac{\left\{\begin{array}{l} n\sum x_iY_i\sum\frac{1}{x_i^2}+n\sum Y_i\sum\frac{1}{x_i}+\sum Y_i\frac{1}{x_i}\sum x_i\sum\frac{1}{x_i} \\ \qquad -\sum x_iY_i(\sum\frac{1}{x_i})^2-\sum Y_i\sum x_i\sum\frac{1}{x_i^2}-\sum Y_i\frac{1}{x_i}n^2 \end{array}\right\}}{n(\sum x_i^2\sum\frac{1}{x_i^2}+2\sum x_i\sum\frac{1}{x_i})-n^3-(\sum\frac{1}{x_i})^2\sum x_i^2-(\sum x_i)^2\sum\frac{1}{x_i^2}}=$$

$$\frac{\sum x_iY_i\sum\frac{1}{x_i}(\frac{1}{x_i}-\overline{(\frac{1}{x_i})})+\sum Y_i\sum\frac{1}{x_i^2}(x_i-\overline{x}_i)-\sum Y_i\frac{1}{x_i}\sum\frac{1}{x_i}(x_i-\overline{x_i})}{\sum x_i^2\sum\frac{1}{x_i}(\frac{1}{x_i}-\overline{(\frac{1}{x_i})})+\sum x_i\sum\frac{1}{x_i^2}(x_i-\overline{x}_i)-n\sum\frac{1}{x_i}(x_i-\overline{x_i})},$$

kde jsme při úpravě použili

$$n\sum u_iv_i-\sum u_i\sum v_i=n\sum u_i(v_i-\overline{v_i}).$$

Soustavu těchto dvou rovnic šlo řešit také pomocí determinantů, např.

$$\widehat{a}=\frac{\left\{\begin{array}{l} \left(\sum x_iY_i(\frac{1}{x_i}-\overline{(\frac{1}{x_i})})\right)\left(\sum\frac{1}{x_i^2}(x_i-\overline{x_i})\right) \\ \qquad -\left(\sum x_iY_i(\frac{1}{x_i^2}-\overline{(\frac{1}{x_i^2})})\right)\left(\sum\frac{1}{x_i}(x_i-\overline{x_i})\right) \end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l} \left(\sum x_i^2(\frac{1}{x_i}-\overline{(\frac{1}{x_i})})\right)\left(\sum\frac{1}{x_i^2}(x_i-\overline{x_i})\right) \\ \qquad -\left(\sum x_i^2(\frac{1}{x_i^2}-\overline{(\frac{1}{x_i^2})})\right)\left(\sum\frac{1}{x_i}(x_i-\overline{x_i})\right) \end{array}\right\}}.$$

Maticově jsme už hned na začátku mohli psát

$$\begin{pmatrix} \widehat{a} \\ \widehat{b} \\ \widehat{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i & n \\ \sum x_i & n & \sum \frac{1}{x_i} \\ n & \sum \frac{1}{x_i} & \sum \frac{1}{x_i^2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum x_i Y_i \\ \sum Y_i \\ \sum Y_i \frac{1}{x_i} \end{pmatrix},$$

koeficient determinace lze vyjádřit

$$R^2 = \frac{\widehat{\mathbf{Y}}'\mathbf{Y} - n\overline{Y}^2}{\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\overline{Y}^2} = \frac{\sum Y_i(\widehat{a}x_i + \widehat{b} + \widehat{c}\frac{1}{x_i}) - \overline{Y}\sum Y_i}{\sum Y_i^2 - n\overline{Y}} =$$

$$= \frac{\widehat{a}\sum x_i Y_i + \widehat{c}\sum \frac{1}{x_i} Y_i + (\widehat{b} - \overline{Y})\sum Y_i}{\sum Y_i^2 - n\overline{Y}}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.10.4)

Z řešení 10.5. []

Máme model

$$Y_i = ax_i^2 + bx_i + c + e_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Maticově můžeme ihned psát

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_i^4 & \sum x_i^3 & \sum x_i^2 \\ \sum x_i^3 & \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i^2 & \sum x_i & n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum x_i^2 Y_i \\ \sum x_i Y_i \\ \sum Y_i \end{pmatrix},$$

což je řešení normálních rovnic

$$a\sum x_i^4 + b\sum x_i^3 + c\sum x_i^2 = \sum x_i^2 Y_i$$

$$a\sum x_i^3 + b\sum x_i^2 + c\sum x_i = \sum x_i Y_i$$

$$a\sum x_i^2 + b\sum x_i + cn = \sum Y_i.$$

Explicitní výsledky lze dostat, když např. ze třetí rovnice vyjádříme c, po dosazení do prvních dvou rovnic máme

$$a\Big(\sum x_i^4 - \frac{\sum x_i^2 \sum x_i^2}{n}\Big) + b\Big(\sum x_i^3 - \frac{\sum x_i^2 \sum x_i}{n}\Big) = \sum x_i^2 Y_i - \frac{\sum x_i^2 \sum Y_i}{n}$$

$$a\Big(\sum x_i^3 - \frac{\sum x_i \sum x_i^2}{n}\Big) + b\Big(\sum x_i^2 - \frac{\sum x_i \sum x_i}{n}\Big) = \sum x_i Y_i - \frac{\sum x_i \sum Y_i}{n}.$$

Pomocí determinantů

$$\widehat{a} = \frac{\left\{\begin{aligned}&(n\sum x_i^2Y_i - \sum x_i^2\sum Y_i)(n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)\\ &\qquad - (n\sum x_iY_i - \sum x_i\sum Y_i)(n\sum x_i^3 - \sum x_i^2\sum x_i)\end{aligned}\right\}}{\left\{\begin{aligned}&(n\sum x_i^4 - \sum x_i^2\sum x_i^2)(n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)\\ &\qquad - (n\sum x_i^3 - \sum x_i\sum x_i^2)(n\sum x_i^3 - \sum x_i^2\sum x_i)\end{aligned}\right\}},$$

pak

$$\widehat{b} = \frac{n(\sum x_iY_i - \sum x_iY_i) - \widehat{a}(n\sum x_i^3 - \sum x_i\sum x_i^2)}{n\sum x_i^2 - \sum x_i\sum x_i} = $$

$$= \frac{\sum x_i(Y_i - \overline{Y}) - \widehat{a}\sum x_i(x_i - \overline{x})}{n\sum x_i(x_i - \overline{x})},$$

a konečně $\widehat{c} = (\sum Y_i - \widehat{b}\sum x_i - \widehat{a}\sum x_i^2)/n$.

Koeficient determinace je

$$R^2 = \frac{\widehat{\mathbf{Y}}'\mathbf{Y} - n\overline{Y}^2}{\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\overline{Y}^2} = \frac{\sum Y_i(\widehat{a}x_i^2 + \widehat{b}x_i + \widehat{c}) - \overline{Y}\sum Y_i}{\sum Y_i^2 - n\overline{Y}} =$$

$$= \frac{\widehat{a}\sum x_i^2Y_i + \widehat{b}\sum x_iY_i + (\widehat{c} - \overline{Y})\sum Y_i}{\sum Y_i^2 - n\overline{Y}}.$$

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.10.5)

Z řešení 10.6. $[-2,68 + 0,00224 \cdot T$, ano$]$

V modelu $Y_i = \alpha + \beta x_i + e_i$ jsou odhady parametrů

$$\widehat{\beta} = \frac{n\sum x_i Y_i - (\sum x_i)(\sum Y_i)}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{11 \cdot 7\,098,4 - 15\,400 \cdot 5}{11 \cdot 2\,160\,400 - 15\,400^2} = 0,002\,236,$$

$$\widehat{\alpha} = \overline{Y} - \widehat{\beta}\overline{x} = 5/11 - 0,002\,236 \cdot 1\,400 = -2,6758.$$

Při nezávislosti na teplotě, tj. za H_0: $\beta = 0$ má statistika $T_1 \sim t_{11-2}$,

$$s^2 = \frac{(\sum Y_i^2 - \widehat{\alpha}\sum Y_i - \widehat{\beta}\sum x_i Y_i)}{n-2} =$$

$$= \frac{(2,5136 - (-2,6758) \cdot 5 - 0,002\,236 \cdot 7\,098,4)}{11-2} = 0,002\,313,$$

a tedy

$$|T_1| = |\frac{\widehat{\beta}}{s} \cdot \sqrt{\sum x_i^2 - n\overline{x}^2}| = |\frac{0,002\,236}{\sqrt{0,002\,313}} \cdot \sqrt{21\,600\,400 - 11 \cdot 1\,400}| =$$

$$= |9,755| > 2,262 = t_{0,975}(9),$$

takže zamítáme H_0 na hladině 5%.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.10.6)

K ZADÁNÍ

Z řešení 10.7. $[Y = -1,308 + 0,8543x]$
V modelu $Y_i = \alpha + \beta x_i + e_i$ dostaneme odhady $s^2 = 39,84$, $\widehat{\alpha} = -1,308$, $\widehat{\beta} = 0,8543$.

Testujme H_0: $\beta = 0$ tj. statistika

$|T| = |5,265| > t_{0,975}(6-2) = 2,776,$

takže zamítneme H_0 na hladině 5%.

95% interval spolehlivosti pro β by byl (0,404, 1,305), takže bychom např. nezamítli hypotézu $\beta = 1$.

Závislost Y_i na x_i bychom prokázali i pomocí koeficientu determinace

$R^2 = 1 - S_e/S_t = 1 - 159,4/1264 = 0,8739.$

$$F = \frac{R^2}{1-R^2}\frac{n-k}{k-1} = 27,7 > 12,218 = F_{0,95}(1,4) = 7,709,$$

což vede k zamítnutí H_1: $R^2 = 0$.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.10.7)

K ZADÁNÍ

Z řešení 10.8. $[Y = 11,4 - 2,07x + 0,19x^2]$

Model

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + e_i$$

je zde reprezentován regresní maticí (počítáme v desítkách km/h)

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 10 & 100 \end{pmatrix},$$

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \begin{pmatrix} 26 & -7{,}75 & 0{,}536 \\ -7{,}75 & 2{,}369 & -0{,}167 \\ 0{,}536 & -0{,}167 & 0{,}012 \end{pmatrix},$$

Odhady

$$\widehat{\boldsymbol\beta} = (\widehat\beta_0, \widehat\beta_1, \widehat\beta_2) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} = (11,39,\ -2,07,\ 0,19)',$$

$$s^2 = \frac{\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \widehat{\boldsymbol\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{Y}}{7-3} = 0,05202,$$

$$R^2 = 1 - \frac{S_e}{S_t} = 0,985.$$

Jestliže spotřeba není rychlostí ovlivněna, tj. za H_0^*: $\beta_1 = \beta_2 = 0$, má $F \sim F_{3-1,7-3}$,

$$F = \frac{R^2}{1-R^2}\frac{n-k}{k-1} = \frac{0,985^2}{1-0,985^2}\frac{7-3}{3-1} = 130,04 > F_{0,95}(2,4) = 6,944,$$

tedy zamítáme H_0^*, tj. spotřeba závisí na rychlosti .

Za H_0: $\beta_2 = 0$, tj. jen lin. závislost, má $T_2 \sim t_{7-3}$,
$|T_2| = |\dfrac{\widehat{\beta}_2 - \beta_2}{\sqrt{s^2 v_{22}}}| = |\dfrac{0,19 - 0}{\sqrt{0,052 \cdot 0,012}}| = |7,7| > t_{0,975}(4) = 2,776$,
zamítáme tedy H_0 na hladině významnosti 5%.
(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.10.8)

K ZADÁNÍ

Z řešení 10.9. []

V modelu

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 z_i,$$

popsaném matici

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 2 & 2 & 8 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 4 & 13 \end{pmatrix},$$

vyjde

$$\widehat{Y}_i = -0,174 + 0,328 x_i + 0,283 z_i,$$

$s^2 = 0,1276$, koeficient determinace $R^2 = 0,9657$.

Protože

$$F = 56,2 > F_{0,95}(3-1, 7-3) = 6,944,$$

zamítáme H_0: $R^2 = 0$ a tedy Y_i na (x_i, z_i) závisí.

Protože H_1: $\beta_1 = 0$ nezamítáme ($T_1 = 1,209 < 2,776 = t_{0,975}(4)$), nezávisí výdaje na počtu členů.

H_2: $\beta_2 = 0$ zamítáme ($T_2 = 2,989 > 2,776 = t_{0,975}(4)$), takže závisí výdaje na příjmu.

(2004-09-03.1ad111ppx1cyaq.10.9)

Verze 2004-09-03

Literatura

[1] J. Anděl, *Matematická statistika*, SNTL, Praha, 1985.

[2] J. Brousek a Z. Ryjáček, *Sbírka řešených příkladů z počtu pravděpodobnosti*, skripta, ZČU Plzeň, Plzeň, 1995.

[3] E. Calda a V. Dupač, *Matematika pro gymnázia — Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika*, Prometheus, Praha, 1995.

[4] L. Cyhelský, J. Hustopecký a P. Závodský, *Příklady k základům statistiky*, SNTL, Praha, 1988.

[5] E. I. Gurskij, *Sbornik zadač po teorii verojatnostej i matematičeskoj statistike*, 3. izd., Vyšejšaja škola, Minsk, 1984.

[6] G. V. Jemeljanov a V. P. Skitovič, *Zadačnik po teorii verojatnostej i matematičeskoj statistike*, Izdatelstvo Leningradskogo universiteta, Leningrad, 1967.

[7] J. Štěpán, *Teorie pravděpodobnosti*, Academia, Praha, 1987.