Kapitola 8. Aproximace funkcí - II

Aproximace funkcí

- Aproximace na okolí bodu - aproximujeme chování funkce „v malém okolí bodu“ ✓
- Interpolace - tabulkou danými body prokládáme polynom, tj. požadujeme-li, aby aproximace přesně procházela zadanými body. ✓
- L_2-aproximace - použijeme, hledáme-li funkční závislost mezi tabulkou danými body (získaných například měřením), kde nutně nevyžadujeme, aby aproximace danými body procházela. Důvodem můžou být např. chyby, se kterými jsme hodnoty naměřili.

- určíme systém jednoduchých **základních (bázových) funkcí** (ne nutně polynomů) φ_0, φ_1, φ_2, ..., φ_n a funkci f aproximujeme lineární kombinací základních funkcí

$$\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x)$$

- Otázka výběru aproximace se tedy převede na určení hodnot parametrů c_0, c_1, ..., c_n podle nějakého kritéria vhodného pro konkrétní úlohu.

Poznámka: Velmi často budeme za základní funkce volit funkce 1, x, x^2, ..., x^n, tj. aproximaci φ budeme hledat ve třídě polynomů nejvýše n-tého stupně.

Úvod d diskrétní L_2-aproximace

Myšlenka

Chceme aproximovat funkci, která je dána tabulkou $\{[x_i, f(x_i)],\ i = 0, 1, \ldots, n\}$.
V případě, kdy jsou $f(x_i)$ zatíženy chybou (např. výsledky měření) nebo pokud je bodů „mnoho“, není vhodné provádět interpolaci.
Aproximaci φ hledáme ve tvaru

$$\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_m\varphi_m(x),$$

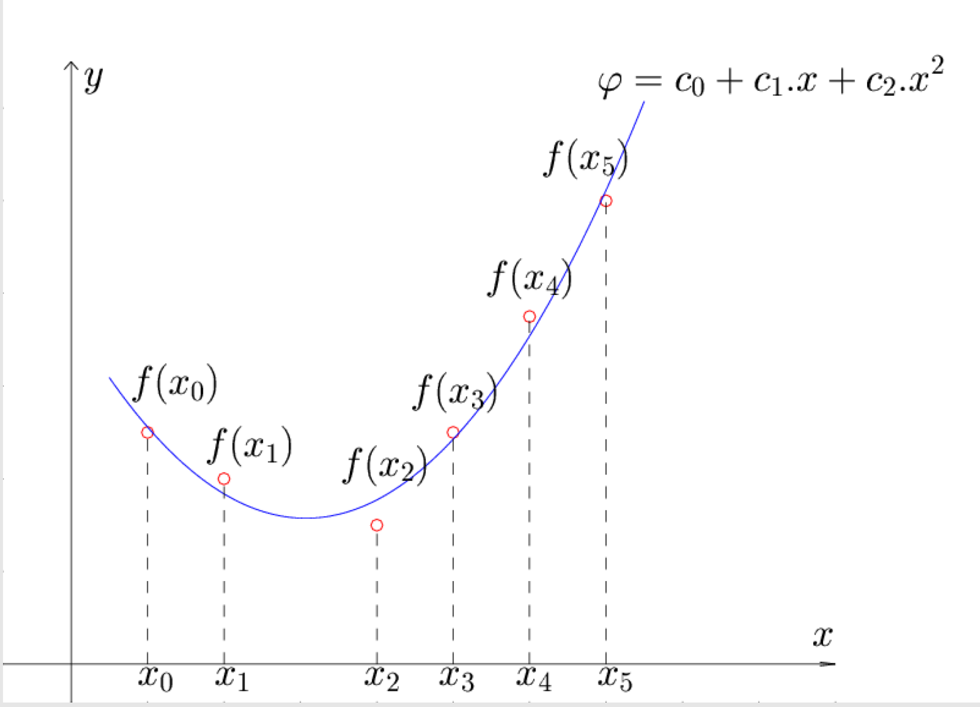
kde φ_i jsou zadané funkce a c_i hledané parametry.

– počet bázových funkcí φ_i je menší než počet zadaných bodů $(m < n)$

– v případě rovnosti se může jednat o interpolaci (záleží na zvolených bázových funkcích)

– o interpolaci se může jednat i pokud je $m < n$

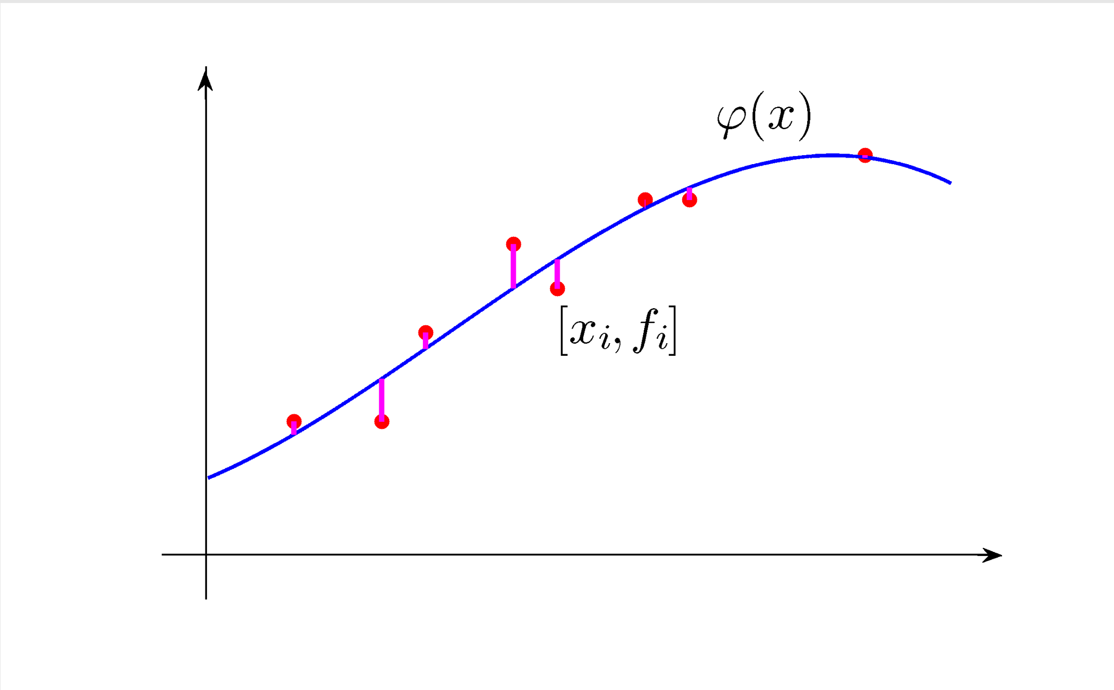
Naším cílem je minimalizovat „odchylku“ funkce φ od zadaných dat.



U interpolace jsme požadovali, aby aproximace přímo procházela zadanými body, tj. chyba

$$\boxed{e_i = f(x_i) - \varphi(x_i) = 0}$$

Nyní na tomto netrváme, pouze chceme tuto chybu v nějakém smyslu minimalizovat.



Jakou použít normu pro měření chyby e ?

- $\max\limits_{0 \le i \le n} \{|f(x_i) - \varphi(x_i)|\}$
- $\dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{i=0}^{n} |f(x_i) - \varphi(x_i)|$
- $\sqrt{\dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{i=0}^{n} |f(x_i) - \varphi(x_i)|^2}$

Cílem je chybu minimalizovat $\Rightarrow$ vybereme tu normu, která umožní nejsnažší postup.

Uvažujme příklad:

x_i	1	2	3
$f(x_i)$	1	2	2

; $\varphi(x) = c_0 + c_1 x$

Jak by vypadala minimalizace s užitím předchozích norem?

- $\min\limits_{c_0,c_1\in\mathbb{R}} \max\{|1-c_0-c_1|, |2-c_0-2c_1|, |2-c_0-3c_1|\}$ ... pro počítání nevhodné
- $\min\limits_{c_0,c_1\in\mathbb{R}} \frac{1}{3}(|1-c_0-c_1| + |2-c_0-2c_1| + |2-c_0-3c_1|)$ ... opět nevhodné
- $\min\limits_{c_0,c_1\in\mathbb{R}} \sqrt{\frac{1}{3}[(1-c_0-c_1)^2 + (2-c_0-2c_1)^2 + (2-c_0-3c_1)^2]}$ zjednodušíme

(Nezáporná funkce f nabývá svého minima ve stejném bodě jako nabývá minima funkce $\sqrt{f}$)

$$\min_{c_0,c_1\in\mathbb{R}} \underbrace{\left[(1-c_0-c_1)^2 + (2-c_0-2c_1)^2 + (2-c_0-3c_1)^2\right]}_{(*)}$$

$(*)$ ... kvadratická funkce proměnných c_0, c_1 (konvexní) $\Rightarrow$ je hladká, snadno se derivuje

Formulace

Je dána funkce f tabulkou hodnot v $n+1$ bodech $x_0, x_1, \ldots, x_n$

x_i	...
$f(x_i)$	...

.

Zvolíme tvar aproximující funkce

$$\boxed{\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_m\varphi_m(x)}$$

s počtem parametrů c_i nejvýše rovným $n+1$.

Diskrétní L_2-aproximací funkce f je potom taková lineární kombinace bázových funkcí $\varphi_i(x)$, jejíž koeficienty splňují podmínku, že L_2 norma chyby je minimální, tj.

$$\boxed{R(f,\varphi) = \sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - \varphi(x_i)]^2 = \sum_{i=0}^{n}\left[f(x_i) - \sum_{j=0}^{m} c_j\varphi_j(x_i)\right]^2}$$

je minimální.

Poznámka:

Tato nejlepší aproximace má velmi dobré statistické vlastnosti a vyrovnává vliv náhodných chyb v zadaných (naměřených) funkčních hodnotách.

Diskrétní L_2-aproximace lineárním polynomem

Úkolem je stanovit diskrétní L_2-aproximaci funkce f dané tabulkou $\{x_i, f_i\}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ lineárním polynomem, tj. zvolíme např. $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$.

Tedy

$$\boxed{\varphi(x) = c_0 + c_1 x}.$$

Minimalizujeme funkci

$$\boxed{R = \sum_{i=0}^{n} [f_i - c_0 - c_1 x_i]^2}.$$

Nutná a postačující podmínka minima je

$$\frac{\partial R}{\partial c_0} = -2\sum_{i=0}^{n}\left[f_i - c_0 - c_1 x_i\right] = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial c_1} = -2\sum_{i=0}^{n}\left[f_i - c_0 - c_1 x_i\right] x_i = 0$$

Koeficienty c_0 a c_1 nalezneme jako řešení soustavy

$$(n+1)\,c_0 + \Big(\sum_{i=0}^{n} x_i\Big)\,c_1 = \sum_{i=0}^{n} f_i$$

$$\Big(\sum_{i=0}^{n} x_i\Big)\,c_0 + \Big(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\Big)\,c_1 = \sum_{i=0}^{n} f_i x_i$$

Maticově zapsáno

$$\boxed{\mathbf{Pc} = \mathbf{q}},\quad \text{kde } \mathbf{P} \text{ je symetrická, pozitivně definitní.}$$

<u>Jiný postup:</u>

Užijeme metodu pro řešení „neřešitelných soustav“.
Platí (mělo by):

$$\boxed{c_0 + c_1 x_i = f_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Maticově zapsáno

$$\boxed{\mathbf{Qc} = \mathbf{F}}.$$

Soustava $\mathbf{Qc} = \mathbf{F}$ je neřešitelná. Provádíme minimalizaci $\underline{\mathbf{r}^T\mathbf{r}}$, kde $\underline{\mathbf{r} = \mathbf{F} - \mathbf{Qc}}$ je reziduum soustavy.
Dosadíme-li, pak platí:

$$\mathbf{r}^T\mathbf{r} = (\mathbf{F} - \mathbf{Qc})^T(\mathbf{F} - \mathbf{Qc}) = \mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{c}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{F} - \mathbf{F}^T\mathbf{Qc} + \mathbf{c}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{Qc} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} - 2\mathbf{c}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{F} + \mathbf{c}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{Qc},$$

protože $\underbrace{(\mathbf{c}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{F})^T}_{\text{číslo}} = \underbrace{(\mathbf{F}^T\mathbf{Qc})}_{\text{číslo}}$.

Matice $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}$ je symetrická, pozitivně definitní. Nutná a postačující podmínka minima:

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{Qc} - \mathbf{Q}^T\mathbf{F} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\mathbf{Q}^T\mathbf{Qc} = \mathbf{Q}^T\mathbf{F}}$$

tzv. **soustava normálních rovnic**.
Platí:

$$\boxed{\mathbf{P} = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q}} \quad \text{a} \quad \boxed{\mathbf{q} = \mathbf{Q}^T\mathbf{F}}.$$

Diskrétní L_2-aproximace kvadratickým polynomem

Funkci f aproximujeme kvadratickým polynomem

$$\boxed{\varphi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2}.$$

Minimalizujeme veličinu

$$\boxed{R = \sum_{i=0}^{n} \left[f_i - c_0 - c_1 x_i - c_2 x_i^2\right]^2}.$$

Z nutných a postačujících podmínek minima

$$\boxed{\frac{\partial R}{\partial c_0} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial c_2} = 0}$$

dostaneme soustavu ve tvaru

$$\begin{aligned}
(n+1)c_0 + \left(\sum x_i\right) c_1 + \left(\sum x_i^2\right) c_2 &= \sum f_i \\
\left(\sum x_i\right) c_0 + \left(\sum x_i^2\right) c_1 + \left(\sum x_i^3\right) c_2 &= \sum f_i x_i \\
\left(\sum x_i^2\right) c_0 + \left(\sum x_i^3\right) c_1 + \left(\sum x_i^4\right) c_2 &= \sum f_i x_i^2
\end{aligned}$$

Stejnou soustavu dostaneme i postupem, kdy řešíme neřešitelnou soustavu pomocí minimalizace kvadrátu rezidua.

Poznámka: V případě, že některé hodnoty chceme eliminovat, např. důsledkem špatného měření, je vhodné použít váhy, tj. minimalizujeme

$$R(f, \varphi, w_i) = \sum_{i=0}^{n} \left[f(x_i) - \varphi(x_i)\right]^2 w_i,$$

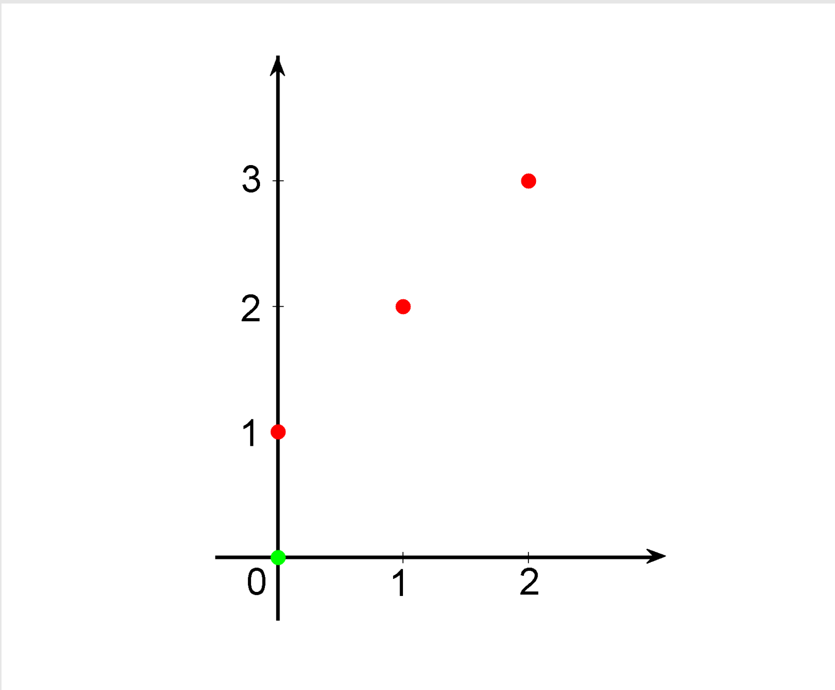
kde w_i ... váha uzlu x_i.

Příklad

Aproximujte funkci f, která je dána tabulkou

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	1	2	3

pomocí funkce $\boxed{\varphi(x) = c_0 x + c_1 x^2 + c_2 x^3}$.



$$\mathbf{Q}\mathbf{c} = \mathbf{F}, \qquad \mathbf{Q} \ \ldots \ \text{singulární matice}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

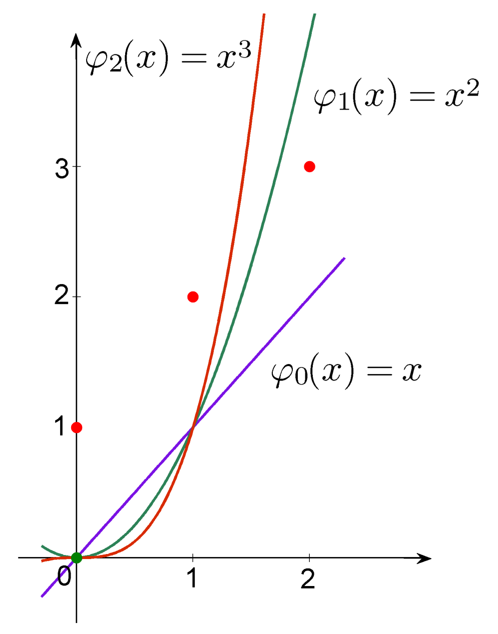
- první rovnici nelze splnit $\Rightarrow$ <u>soustava nemá řešení</u>
- řešíme metodou nejmenších čtverců

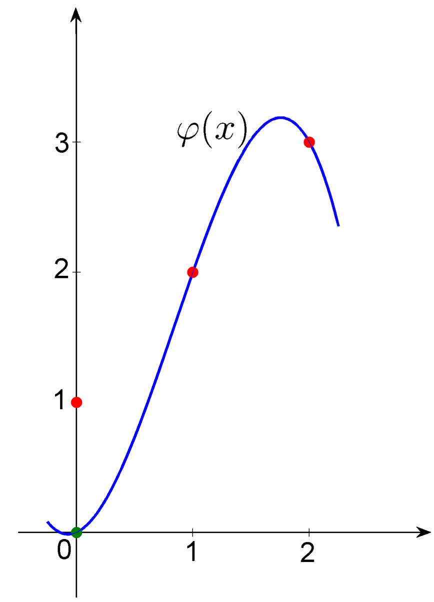
$$\mathbf{Q}^T \cdot / \qquad \mathbf{Q}\mathbf{c} = \mathbf{F} \quad \to \quad \mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{c} = \mathbf{Q}^T\mathbf{F}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 9 & 17 \\ 9 & 17 & 33 \\ 17 & 33 & 65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \\ 26 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{c_0 = 0{,}4}, \quad \underline{c_1 = 2{,}65}, \quad \underline{c_2 = -1{,}05}$$

$$\boxed{\varphi(x) = 0{,}4\,x + 2{,}65\,x^2 - 1{,}05\,x^3}$$





$$\varphi_0(0) = \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(0) = 0$$

Řešitelnost úlohy diskrétní L_2-aproximace

Definice: Řekneme, že systém funkcí $\varphi_j(x)$, $j = 0, 1, \ldots, m$, definovaných na $\langle a, b\rangle \supset \text{int}\,(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ je **diskrétně lineárně nezávislý**, jsou-li vektory

$$[\varphi_0(x_0), \varphi_0(x_1), \ldots, \varphi_0(x_n)]^T$$

$$[\varphi_1(x_0), \varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_1(x_n)]^T$$

$$\vdots$$

$$[\varphi_m(x_0), \varphi_m(x_1), \ldots, \varphi_m(x_n)]^T$$

lineárně nezávislé.

Poznámka:

Tato definice říká, že hodnost matice $\Phi = [\varphi_j(x_i)]_{j=0,1,\ldots,m}^{i=0,1,\ldots,n}$ je rovna $(m+1)$.
Platí, že $m \leq n$.

Podmíněnost úlohy diskrétní L_2-aproximace

Budeme-li aproximovat na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ funkci f a zvolíme-li ekvidistantní dělení a bázové funkce budeme volit $\varphi_j = x^j$, bude matice $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q}$ soustavy normálních rovnic blízká Hilbertově matici, která je velmi špatně podmíněná.

Řešení: Za funkce $\varphi_j(x)$ volíme ortogonální polynomy (např. Gramovy polynomy).

Poznámka: Ze systému n-lineárně nezávislých funkcí g_i lze pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu zkonstruovat systém ortogonálních funkcí.

Spojitá L_2-aproximace

Definice:

Mějme funkci $w = w(x)$, která je definována na $\langle a, b\rangle$ a je kladná a omezená. Množinu reálných funkcí $f = f(x)$ definovaných na (a, b) takových, že

$$\boxed{\int_a^b w(x)\big[f(x)\big]^2\,dx < \infty}$$

označíme $L_2(a, b)$. Skalárním součinem dvou funkcí $f, g \in L_2(a, b)$ nazýváme číslo

$$\boxed{(f, g) = \int_a^b w(x)f(x)g(x)\,dx}.$$

Číslo

$$\boxed{\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \left(\int_a^b w(x)\big[f(x)\big]^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}}$$

nazýváme normou funkce f v $L_2(a, b)$.

Funkce f, g se nazývají ortogonální, platí-li

$$\boxed{(f, g) = 0}.$$

Chceme tedy minimalizovat veličinu

$$\boxed{R(f, \varphi) = \left(f - \sum_{j=0}^{m} c_j\varphi_j, f - \sum_{j=0}^{m} c_j\varphi_j\right)}.$$

Nutné a postačující podmínky minima mají tvar

$$\boxed{\frac{\partial R}{\partial c_k} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m}.$$

Derivováním a jednoduchými úpravami dostaneme

$$R(f, \varphi) = (f, f) - 2(f, \sum_{j=0}^{m} c_j\varphi_j) + (\sum_{i=0}^{m} c_i\varphi_i, \sum_{j=0}^{m} c_j\varphi_j)$$

$$\frac{\partial R}{\partial c_k} = 0 - 2(f, \varphi_k) + 2(\varphi_k, \sum_{j=0}^{m} c_j\varphi_j) = 0$$

$$\sum_{j=0}^{m}(\varphi_k, c_j\varphi_j) = (f, \varphi_k)$$

$$\sum_{j=0}^{m} c_j(\varphi_k, \varphi_j) = (f, \varphi_k)$$

Zapsáním všech podmínek dostaneme soustavu

$$(\varphi_0, \varphi_0)c_0 + (\varphi_0, \varphi_1)c_1 + \cdots + (\varphi_0, \varphi_m)c_m = (\varphi_0, f)$$
$$(\varphi_1, \varphi_0)c_0 + (\varphi_1, \varphi_1)c_1 + \cdots + (\varphi_1, \varphi_m)c_m = (\varphi_1, f)$$

$$\vdots$$
$$(\varphi_m, \varphi_0)c_0 + (\varphi_m, \varphi_1)c_1 + \cdots + (\varphi_m, \varphi_m)c_m = (\varphi_m, f)$$

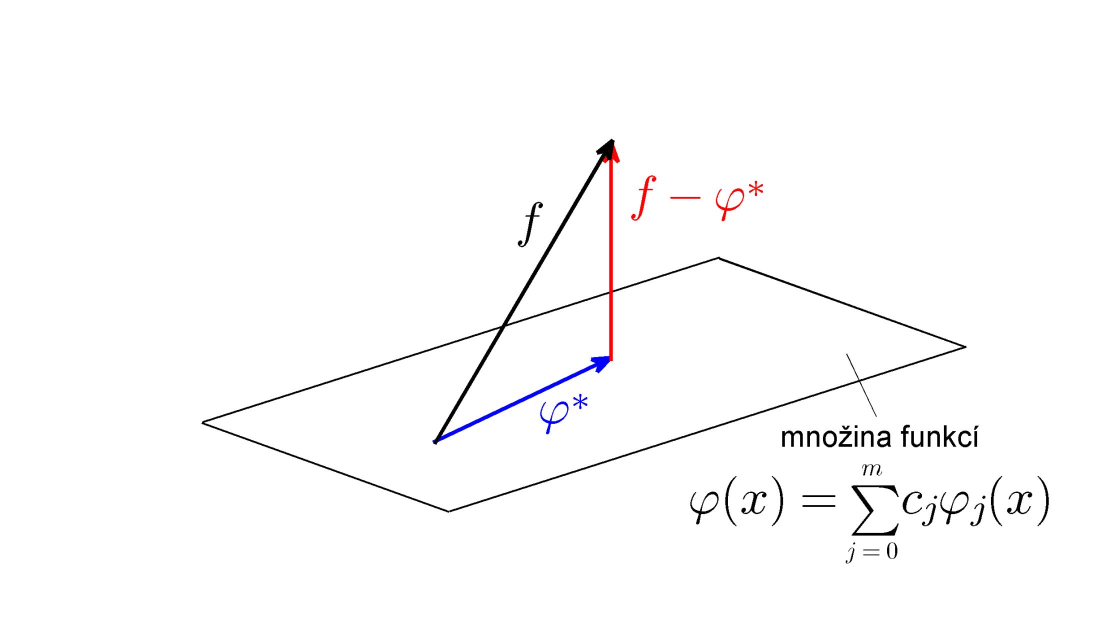
Věta

Jsou-li funkce $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ lineárně nezávislé, má úloha spojité L_2-aproximace jediné řešení. Koeficienty c_j^* jsou řešením normální soustavy a platí:

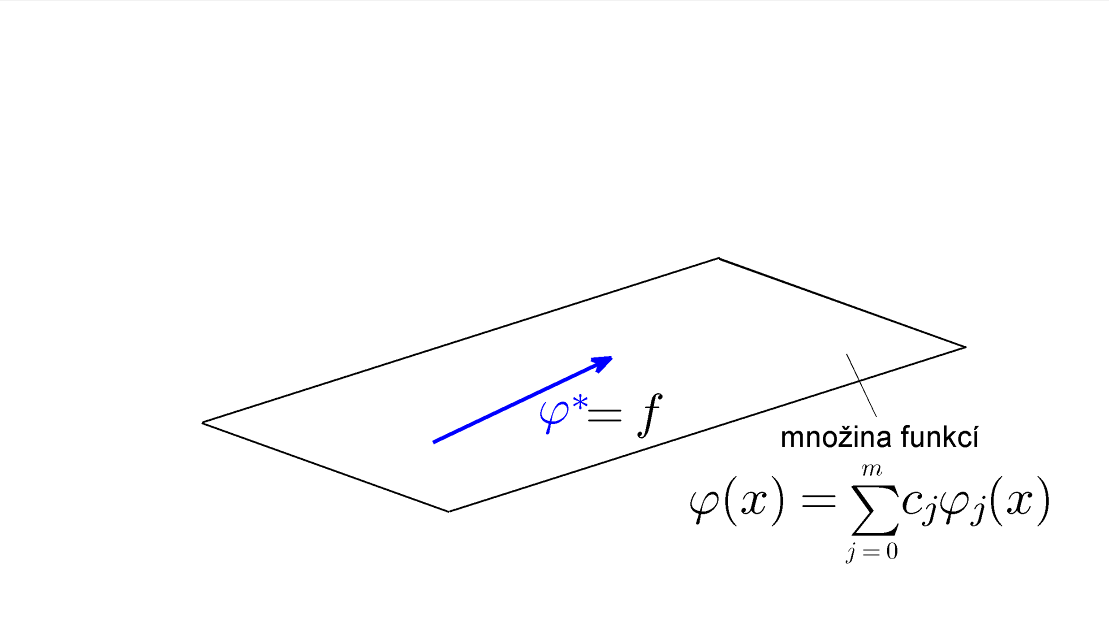
$$\boxed{(f - \varphi^*, \varphi_j) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, m},$$

tj. funkce $f - \varphi^*$ je ortogonální ke všem funkcím φ_j.

Geometrická interpretace



Pokud leží funkce f v množině funkcí $\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_m\varphi_m(x)$, potom



Příklad

Stanovte spojitou L_2-aproximaci funkce $f(x) = \ln x$ na $\langle 1, \mathrm{e} \rangle$ lineární funkcí $\varphi(x) = c_1 x + c_0$.

Minimalizujeme funkci

$$r(c_0, c_1) = \int_1^{\mathrm{e}} |f(x) - \varphi(x)|^2\, dx = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x - c_0 - c_1 x)^2\, dx$$

Podmínky minima

$$\frac{\partial r}{\partial c_0} = -2 \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x - c_0 - c_1 x)\, dx = 0$$

$$\frac{\partial r}{\partial c_1} = -2 \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x - c_0 - c_1 x) x\, dx = 0$$

$$c_0 \int_1^{\mathrm{e}} 1\, dx + c_1 \int_1^{\mathrm{e}} x\, dx = \int_1^{\mathrm{e}} \ln x\, dx$$

$$c_0 \int_1^{\mathrm{e}} x\, dx + c_1 \int_1^{\mathrm{e}} x^2\, dx = \int_1^{\mathrm{e}} x \ln x\, dx$$

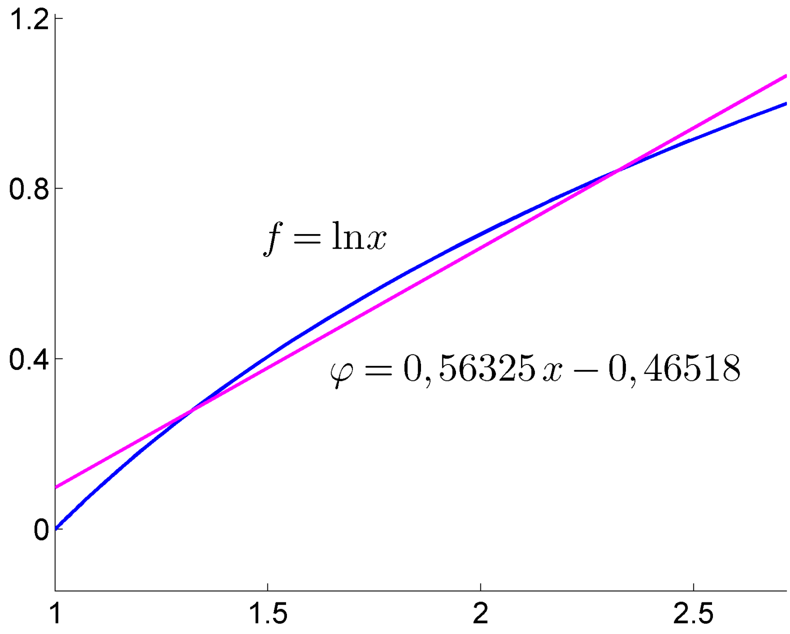
$$\begin{bmatrix} \mathrm{e} - 1 & \frac{1}{2}(\mathrm{e}^2 - 1) \\ \frac{1}{2}(\mathrm{e}^2 - 1) & \frac{1}{3}(\mathrm{e}^3 - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\mathrm{e}^2 + 1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\int_1^{\mathrm{e}} \underbrace{\ln x}_{v} \underbrace{1}_{u'}\, dx = \begin{vmatrix} v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \\ u' = 1 & u = x \end{vmatrix} = \big[x \ln x\big]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} 1\, dx = \mathrm{e} - \mathrm{e} + 1 = 1$$

$$\int_1^{\mathrm{e}} \underbrace{x}_{u'} \underbrace{\ln x}_{v}\, dx = \begin{vmatrix} v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \\ u' = x & u = \frac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \Big[\frac{x^2}{2} \ln x\Big]_1^{e} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^2}{2} \frac{1}{x}\, dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}(e^2 - 1) = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

Řešení: $c_0 \doteq -0,46518, \quad c_1 \doteq 0,56325$

$$\boxed{\varphi(x) = 0,56325\, x - 0,46518}.$$



Podmíněnost úlohy spojité L_2-aproximace

Příklad: Volíme-li váhu $w(x) \equiv 1$ a aproximujeme-li funkci $f = f(x)$ na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ funkcí $\varphi = \varphi(x)$ ve tvaru

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_m x^m,$$

tj. $\boxed{\varphi_j(x) = x^j}$, platí

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_0^1 x^i x^j \, dx = \frac{1}{i + j + 1}.$$

Soustava normálních rovnic $\mathbf{Pc} = \mathbf{g}$ je opět špatně podmíněná, protože $\mathbf{P}$ je Hilbertova matice.

Řešení problému: Volíme funkce $\varphi_j(x)$, $j = 0, 1, \ldots, m$, ortogonální ve smyslu skalárního součinu

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b w(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\, dx.$$

Potom platí: $(\varphi_i, \varphi_j) = 0$ pro $i \neq j$ a soustava normálních rovnic má diagonální matici. Pak lze psát:

$$\boxed{c_j^* = \frac{(f, \varphi_j)}{(\varphi_j, \varphi_j)}, \quad j = 0, 1, \ldots, m}$$

c_j^* ... **Fourierovy koeficienty**.

Gram-Schmidtův ortogonalizační proces

Jsou dány lineárně nezávislé funkce $g_1, g_2, \ldots, g_n$ (prvky jistého prostoru).
Hledáme funkce (prvky téhož prostoru), které jsou navzájem po dvou ortogonální.

$\boxed{f_1 = g_1}$

f_2 hledáme ve tvaru $\boxed{f_2 = g_2 + \kappa_{21} f_1}$ a použijeme $(f_1, f_2) = 0$

$$\underbrace{(f_2, f_1)}_{=0} = (g_2, f_1) + \kappa_{21}(f_1, f_1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\kappa_{21} = -\frac{(g_2, f_1)}{(f_1, f_1)}}$$

f_3 hledáme ve tvaru $\boxed{f_3 = g_3 + \kappa_{31} f_1 + \kappa_{32} f_2}$ a použijeme $(f_3, f_1) = 0$
a $(f_3, f_2) = 0$

$$\underbrace{(f_3, f_1)}_{=0} = (g_3, f_1) + \kappa_{31}(f_1, f_1) + \kappa_{32}\underbrace{(f_2, f_1)}_{=0}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\kappa_{31} = -\frac{(g_3, f_1)}{(f_1, f_1)}}$$

$$\underbrace{(f_3, f_2)}_{=0} = (g_3, f_2) + \kappa_{31}\underbrace{(f_1, f_2)}_{=0} + \kappa_{32}(f_2, f_2)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\kappa_{32} = -\frac{(g_3, f_2)}{(f_2, f_2)}}$$

Obecně f_k hledáme ve tvaru $\boxed{f_k = g_k + \kappa_{k1} f_1 + \kappa_{k2} f_2 + \cdots + \kappa_{k,k-1} f_{k-1}}$

a $\boxed{\kappa_{kj} = -\frac{(g_k, f_j)}{(f_j, f_j)}}$

$j = 1, 2, \ldots, k-1$

Příklad

Najděte ortogonální bázi prostoru polynomů do stupně 2 na $\langle 0, 10 \rangle$.

Vyjdeme z báze $g_0 = 1,\ g_1 = x,\ g_2 = x^2$.

$\boxed{f_0 = 1}$

$f_1 = x + \varkappa_{10} f_0$

$$\varkappa_{10} = -\frac{(x, 1)}{(1, 1)} = -\frac{\int_0^{10} x\,dx}{\int_0^{10} 1\,dx} = -\frac{50}{10}$$

$\boxed{f_1 = x - 5}$

$f_2 = x^2 + \varkappa_{20} 1 + \varkappa_{21}(x - 5)$

$$\varkappa_{20} = -\frac{(x^2, 1)}{(1, 1)} = -\frac{\int_0^{10} x^2\,dx}{\int_0^{10} 1\,dx} = -\frac{\frac{1000}{3}}{10} = -33{,}\overline{3}$$

$$\varkappa_{21} = -\frac{(x^2, x-5)}{(x-5, x-5)} = -\frac{\int_0^{10} x^3 - 5x^2\,dx}{\int_0^{10} (x-5)^2\,dx} = -\frac{\frac{10000}{4} - 5\cdot\frac{1000}{3}}{\frac{5^3}{3} + \frac{5^3}{3}} = -\frac{30000-20000}{250\cdot 4} = -10$$

$f_2 = x^2 - 33{,}\overline{3} - 10(x-5)$

$\boxed{f_2 = x^2 - 10x + 16{,}\overline{6}}$

Příklad

Určete ortogonální bázi prostoru polynomů do stupně 2 pro uzlové body
$x_0 = 0$; $x_1 = 0{,}2$; $x_2 = 0{,}4$; $x_3 = 0{,}6$; $x_4 = 0{,}8$; $x_5 = 1$

Opět použijeme jako výchozí bázi

$g_0 = 1$ tj. $[1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1]$

$g_1 = x$ tj. $[0;\ 0{,}2;\ 0{,}4;\ 0{,}6;\ 0{,}8;\ 1]$

$g_2 = x^2$ tj. $[0;\ 0{,}04;\ 0{,}16;\ 0{,}36;\ 0{,}64;\ 1]$

$\boxed{f_0 = g_0 = 1}$

$f_1 = g_1 + \varkappa_{10} f_0$

$$\varkappa_{10} = -\frac{(g_1, f_0)}{(f_0, f_0)} = -\frac{0+0,2+0,4+0,6+0,8+1}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$\boxed{f_1 = x - \frac{1}{2}}$

$f_2 = g_2 + \varkappa_{20} f_0 + \varkappa_{21} f_1$

$$\varkappa_{20} = -\frac{(g_2, f_0)}{(f_0, f_0)} = -\frac{0+0,04+0,16+0,36+0,64+1}{6} = -\frac{2,2}{6} = -\frac{1,1}{3}$$

$$\varkappa_{21} = -\frac{(g_2, f_1)}{(f_1, f_1)} = -\frac{[0; 0,04; 0,16; 0,36; 0,64; 1]^T\,[-0,5; -0,3; -0,1; 0,1; 0,3; 0,5]}{0,25+0,09+0,01+0,01+0,09+0,25} =$$

$$= -\frac{0-0,012-0,016+0,036+0,192+0,5}{0,7} = -\frac{0,7}{0,7} = -1$$

$f_2 = x^2 - \frac{1,1}{3} - x + \frac{1}{2}$

$\boxed{f_2 = x^2 - x + \frac{2}{15}} = x^2 - x + 0{,}1\overline{3}$

Poznámka

Pokud bychom zvolili jiné uzlové body x_i, dostali bychom i obecně jiný systém ortogonálních bázových funkcí.

Např. pro $x_0 = 0$; $x_1 = 0{,}125$; $x_2 = 0{,}25$; $x_3 = 0{,}375$; $x_4 = 0{,}5$; $x_5 = 0{,}625$; $x_6 = 0{,}75$; $x_7 = 0{,}875$; $x_8 = 1$

bychom získali následující ortogonální bázi prostoru polynomů do stupně 2:

$\boxed{f_0 = 1}$, $\boxed{f_1 = x - \frac{1}{2}}$, $\boxed{f_2 \doteq x^2 - x + 0{,}1458}$ ... Ověřte (D.cv.).

Poznámka:

Uvažujme úlohu (spojité) L_2-aproximace, kde za aproximující funkci volíme polynom stupně n.

Jak máme volit stupeň polynomu ?

Pokud nemáme další informace, je vhodné řešit normální rovnice postupně pro $m = 0, 1, 2, \dots$ a sledovat hodnotu

$$\boxed{\sigma_m^2 = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} (f(x_i) - \varphi(x_i))^2}{n - m}},$$

kde φ ... polynom stupně m.

Pokud σ_m^2 s rostoucím m významně klesá, pokračujeme, jinak hodnota po níž nenásleduje výrazný pokles σ_m^2 je ze statistických důvodů vhodným stupněm polynomu.

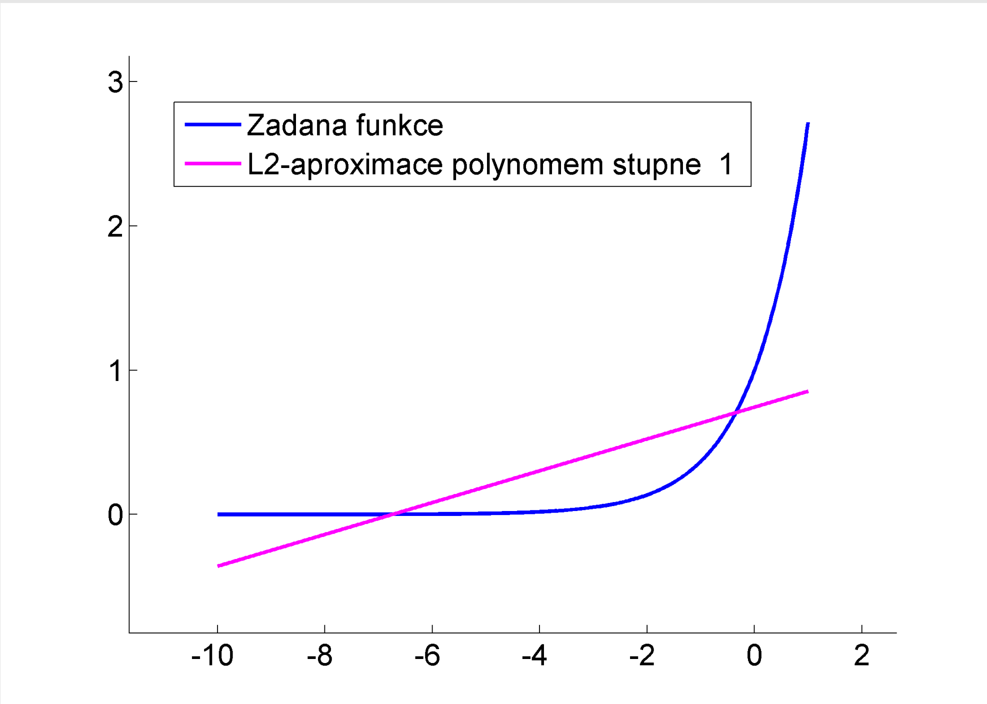
Volíme-li za $\varphi_j = x^j$

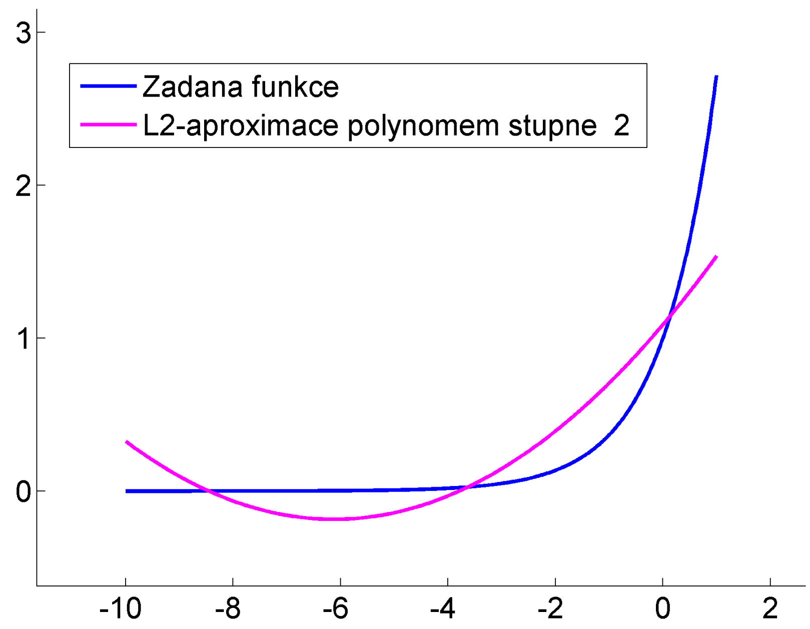
1. musíme řešit soustavu normálních rovnic pro každý stupeň m znovu,
2. špatná podmíněnost

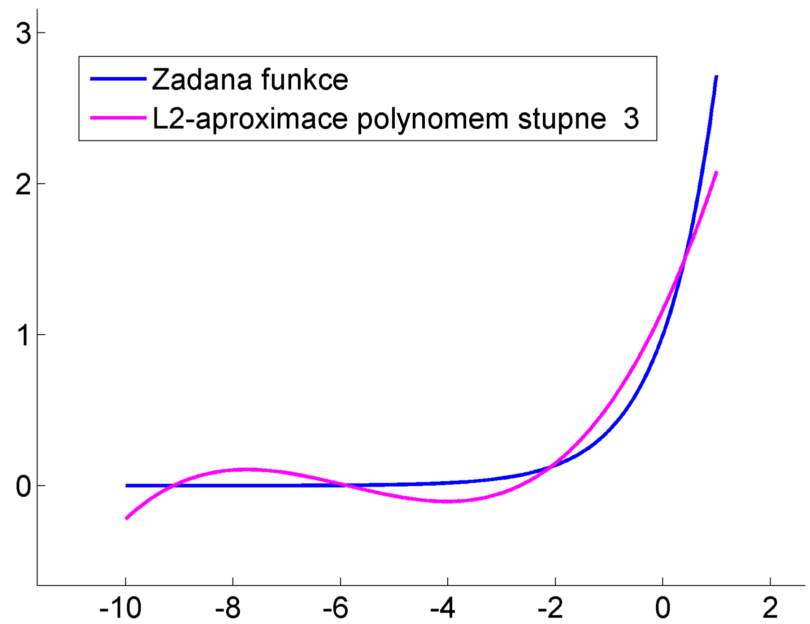
Řešení: Použijeme ortogonální polynomy $\to$ potom stačí vždy dopočítat pouze 1 koeficient.

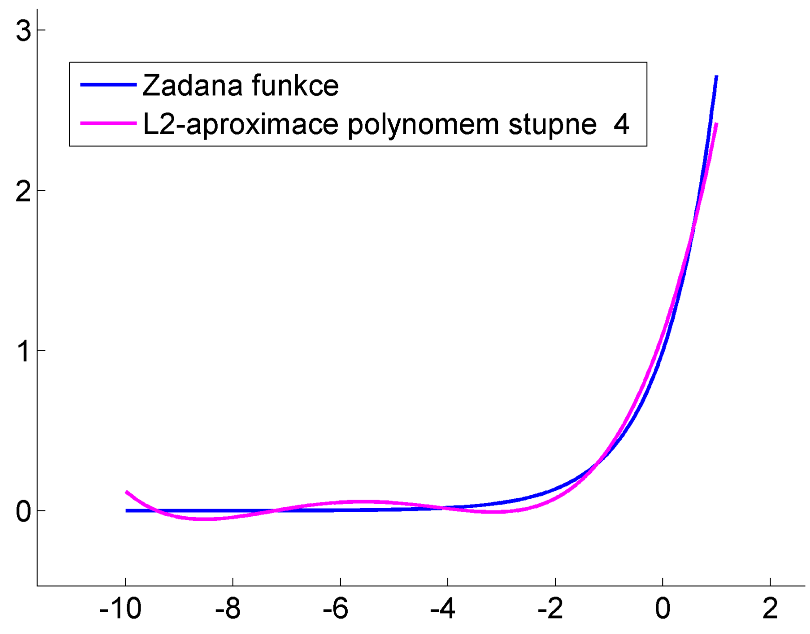
Příklad

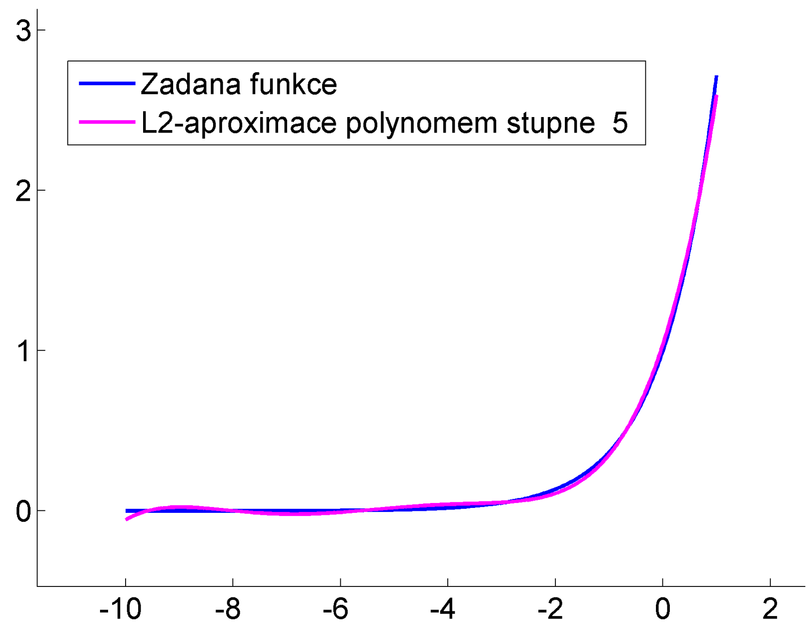
Určete spojitou L_2-aproximaci funkce $f(x) = e^x$ na $\langle -10; 1 \rangle$ pomocí polynomů stupně nejvýše 1, 2, 3, 4 a 5.




Zadana funkce
L2-aproximace polynomem stupne 2
3
2
1
0
-10
-8
-6
-4
-2
0
2


Zadana funkce
L2-aproximace polynomem stupne 3
3
2
1
0
-10
-8
-6
-4
-2
0
2





Nelineární aproximace metodou nejmenších čtverců

Např. volíme-li $$\boxed{\varphi(x) = Ce^{Ax}} \qquad (*)$$

- 1. přístup je metoda linearizace dat: $(*)$ zlogaritmujeme

$$\underbrace{\ln \varphi}_{\Phi} = \underbrace{\ln C}_{B} + Ax$$

$$\boxed{\Phi = Ax + B}$$

(původní body $[x_i, f_i]$ je třeba transformovat na body $[x_i, \ln f_i]$)

získáme A, B a z B vypočteme $C = \mathrm{e}^B$.

- 2. přístup minimalizujeme L_2 normu chyby přímo

$$R(A,C) = \sum_{i=0}^{n} \left(f_i - C\mathrm{e}^{Ax_i}\right)^2$$

parciální derivace:

$$\frac{\partial R}{\partial A} = 2\sum_{i=0}^{n} \left(f_i - C\mathrm{e}^{Ax_i}\right)\left(Cx_i\mathrm{e}^{Ax_i}\right) = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial C} = 2\sum_{i=0}^{n} \left(f_i - C\mathrm{e}^{Ax_i}\right)\left(\mathrm{e}^{Ax_i}\right) = 0$$

soustava normálních rovnic:

1. rovnice:

$$\sum_{i=0}^{n} \left(f_i - C\mathrm{e}^{Ax_i}\right)\left(Cx_i\mathrm{e}^{Ax_i}\right) = 0$$

$$C\sum_{i=0}^{n} f_i x_i \mathrm{e}^{Ax_i} - C^2 \sum_{i=0}^{n} x_i \mathrm{e}^{2Ax_i} = 0 \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{C} \neq 0$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} f_i x_i \mathrm{e}^{Ax_i} - C \sum_{i=0}^{n} x_i \mathrm{e}^{2Ax_i} = 0}$$

2. rovnice:

$$\sum_{i=0}^{n} \left(f_i - C\mathrm{e}^{Ax_i}\right)\left(\mathrm{e}^{Ax_i}\right) = 0$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} f_i \mathrm{e}^{Ax_i} - C \sum_{i=0}^{n} \mathrm{e}^{2Ax_i} = 0}$$

... soustava nelineárních rovnic, pro řešení lze použít např. Newtonovu metodu.

Příklad

Určete diskétní L_2-aproximaci funkce f zadané tabulkou

x_i	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	1,5	2,5	3,5	5	7,5

funkcí ve tvaru $\boxed{\varphi(x) = C\mathrm{e}^{Ax}}$.

Pro řešení použijeme oba předchozí přístupy.

---

1. přístup

script v MATLABu

```
x=0:4
f=[1.5 2.5 3.5 5 7.5]
F=log(f)'
Q=[x.^0' x.^1']
P=Q'*Q
g=Q'*F
koef=P\g
A=koef(2)
C=exp(koef(1))
```

výsledky v MATLABu

```
x =
     0     1     2     3     4
f =
    1.5000    2.5000    3.5000    5.0000    7.5000
F =
    0.4055
    0.9163
    1.2528
    1.6094
    2.0149
Q =
     1     0
     1     1
     1     2
     1     3
     1     4
P =
     5    10
    10    30
g =
    6.1989
   16.3097
koef =
    0.4574
    0.3912
A =
    0.3912
C =
    1.5799
```

$$\boxed{\Rightarrow \quad \varphi_1(x) \doteq 1,5799\,\mathrm{e}^{0,3912\,x}}$$

2. přístup

script v MATLABu

```
koef=fminsearch('R',[1 1]);
AA=koef(1)
CC=koef(2)

%-------------------------------------------------------------
function out=R(koef);
 A=koef(1);
 C=koef(2);
 out=(C-1.5).^2+(C.*exp(A)-2.5).^2+(C.*exp(2*A)-3.5).^2+ ...
     (C.*exp(3*A)-5).^2+(C.*exp(4*A)-7.5).^2;
```

výsledky v MATLABu

```
AA =
    0.3836
CC =
    1.6109
```

$$\boxed{\Rightarrow \quad \varphi_2(x) \doteq 1,6109\,\mathrm{e}^{0,3836\,x}}$$

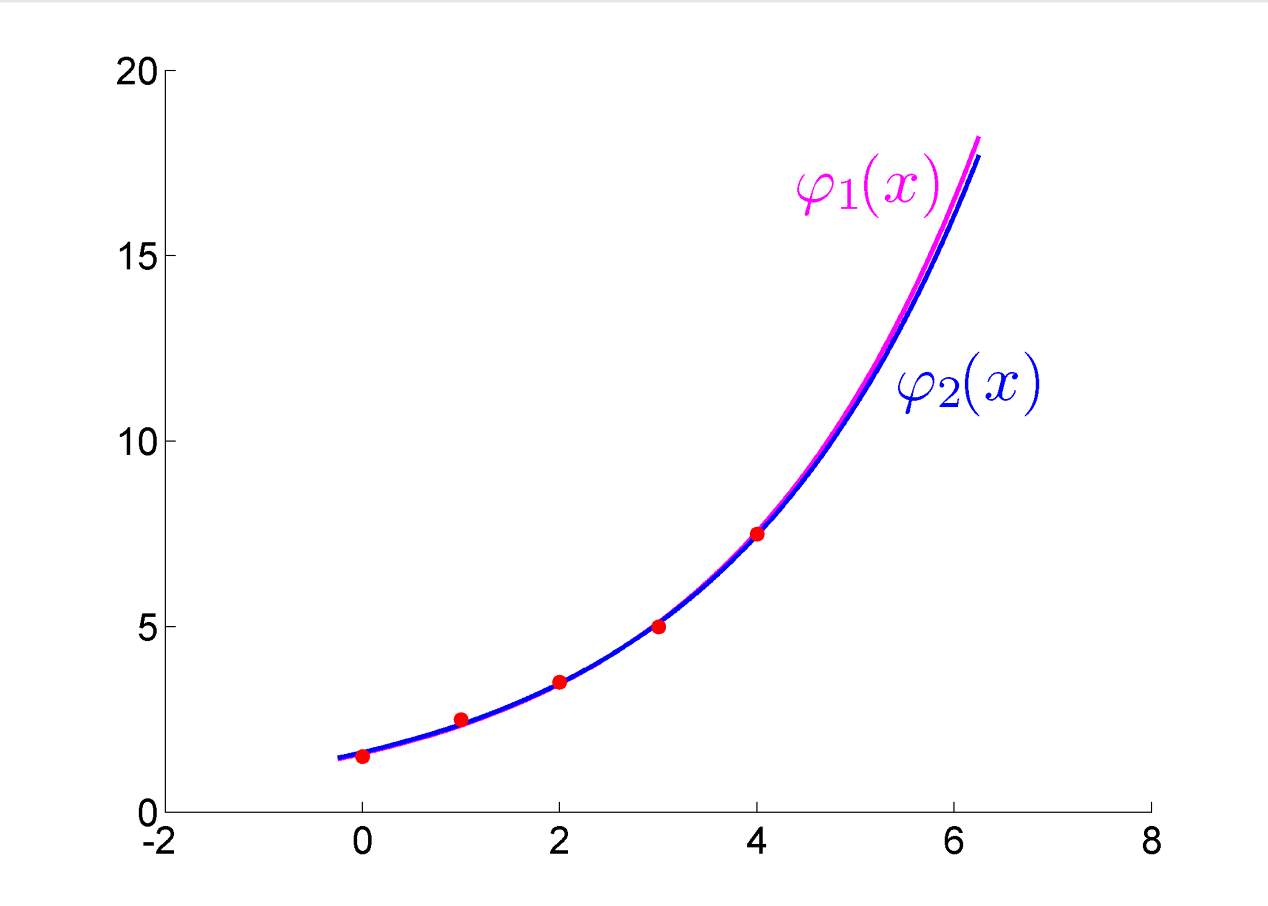


Table 5.6 Change of Variable(s) for Data Linearization

Function, $y = f(x)$	Linearized form, $Y = Ax + B$	Change of variable(s) and constants
$y = \frac{A}{x} + B$	$y = A\frac{1}{x} + B$	$X = \frac{1}{x}$, $Y = y$
$y = \frac{D}{x + C}$	$y + \frac{-1}{C}(xy) + \frac{D}{C}$	$X = xy$, $Y = y$ $C = \frac{-1}{A}$, $D = \frac{-B}{A}$
$y = \frac{1}{Ax + B}$	$\frac{1}{y} = Ax + B$	$X = x$, $Y = \frac{1}{y}$
$y = \frac{x}{Ax + B}$	$\frac{1}{y} = A\frac{1}{x} + B$	$X = \frac{1}{x}$, $Y = \frac{1}{y}$
$y = A\ln(x) + B$	$y = A\ln(x) + B$	$X = \ln(x)$, $Y = y$
$y = Ce^{Ax}$	$\ln(y) = Ax + \ln(C)$	$X = x$, $Y = \ln(y)$ $C = e^B$
$y = Cx^A$	$\ln(y) = A\ln(x) + \ln(C)$	$X = \ln(x)$, $Y = \ln(y)$ $C = e^B$
$y = (Ax + B)^{-2}$	$y^{-1/2} = Ax + B$	$X = x$, $Y = y^{-1/2}$
$y = Cxe^{-Dx}$	$\ln\left(\frac{y}{x}\right) = -Dx + \ln(C)$	$X = x$, $Y = \ln\left(\frac{y}{x}\right)$ $C = e^B$, $D = -A$
$y = \frac{L}{1 + Ce^{Ax}}$	$\ln\left(\frac{L}{y} - 1\right) = Ax + \ln(C)$	$X = x$, $Y = \ln\left(\frac{L}{y} - 1\right)$ $C = e^B$ and L is a constant that must be given

Fourierova analýza

Do této chvíle jsme se zabývali aproximacemi funkce hlavně pomocí polynomů. V úvodu jsme uvedli, že za bázové funkce můžeme volit libovolné funkce. Například pro aproximaci periodických funkcí není vhodné použít polynomy (a to jak ve smyslu interpolace tak ve smyslu L_2-aproximace). Pro aproximaci periodických funkcí je vhodné použít nějaký systém periodických bázových funkcí, např. systém tzv. trigonometrických polynomů:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= 1 \quad \left(\text{nebo } \frac{1}{2}\right) \\ \varphi_{2k-1}(x) &= \cos\frac{2\pi kx}{T} \qquad k = 1, 2, \dots \\ \varphi_{2k}(x) &= \sin\frac{2\pi kx}{T} \qquad k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

kde T představuje periodu zadané funkce (vzdálenost prvního a posledního uzlu v diskrétním případě, resp. délku zadaného intervalu ve spojitém případě).

Pro jednoduchost uvažujeme ekvidistantní uzly (v diskrétním případě).

Počet uvažovaných bázových funkcí volíme buď menší než je počet zadaných bodů (ve smyslu L_2-aproximace), nebo roven počtu zadaných bodů (ve smyslu interpolace).

Jednoduchým cvičením je ukázat, že systém trigonometrických polynomů je ortogonální jak v diskrétním (pozor na počet) tak ve spojitém případě. Ověřte!

Úlohu najít koeficienty c_i u bázových funkcí φ_i z vyjádření

$$\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x).$$

nazýváme v tomto případě **Fourierovou analýzou**.

Formálně pouze přeznačíme koeficienty c_i, tj.

u bázové funkce $\varphi_0(x) = 1$ použijeme koeficient A_0,

u bázových funkcí $\varphi_{2k-1}(x) = \cos(2\pi kx)/T$ použijeme ... A_k

u bázových funkcí $\varphi_{2k}(x) = \sin(2\pi kx)/T$ použijeme ... B_k

Následující jednoduchý příklad ukáže princip Fourierovy analýzy.

Příklad

Aproximujte 2π-periodickou funkci zadanou tabulkou za použití maximálního počtu bázových funkcí (tj. ve smyslu interpolace).

x_i	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$f(x_i)$	12	-4	0	4

Řešení

Ze zadání je zřejmé, že perioda zadané funkce je 2π. Aproximující trigonometrický polynom budeme tedy volit ve tvaru

$$\varphi(x) = A_0 + A_1\cos x + B_1\sin x + A_2\cos 2x.$$

Zapíšeme interpolační podmínky

$$\varphi(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, 2, 3,$$

tj.

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos x_0 & \sin x_0 & \cos 2x_0 \\ 1 & \cos x_1 & \sin x_1 & \cos 2x_1 \\ 1 & \cos x_2 & \sin x_2 & \cos 2x_2 \\ 1 & \cos x_3 & \sin x_3 & \cos 2x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{bmatrix},$$

tj.

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos 0 & \sin 0 & \cos 0 \\ 1 & \cos\pi/2 & \sin\pi/2 & \cos\pi \\ 1 & \cos\pi & \sin\pi & \cos 2\pi \\ 1 & \cos 3\pi/2 & \sin 3\pi/2 & \cos 3\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

tj.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}} \underbrace{\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ A_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 12 \\ -4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}}.$$

tj.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}^T\,\mathbf{Q}} \underbrace{\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ A_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 12 \\ 12 \\ -8 \\ 12 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}^T\,\mathbf{F}}.$$

$\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}$ je diagonální, protože funkce $\varphi_0(x) = \frac{1}{2}$, $\varphi_1(x) = \cos x$, $\varphi_2(x) = \sin x$ jsou diskrétně ortogonální ve smyslu skalárního součinu

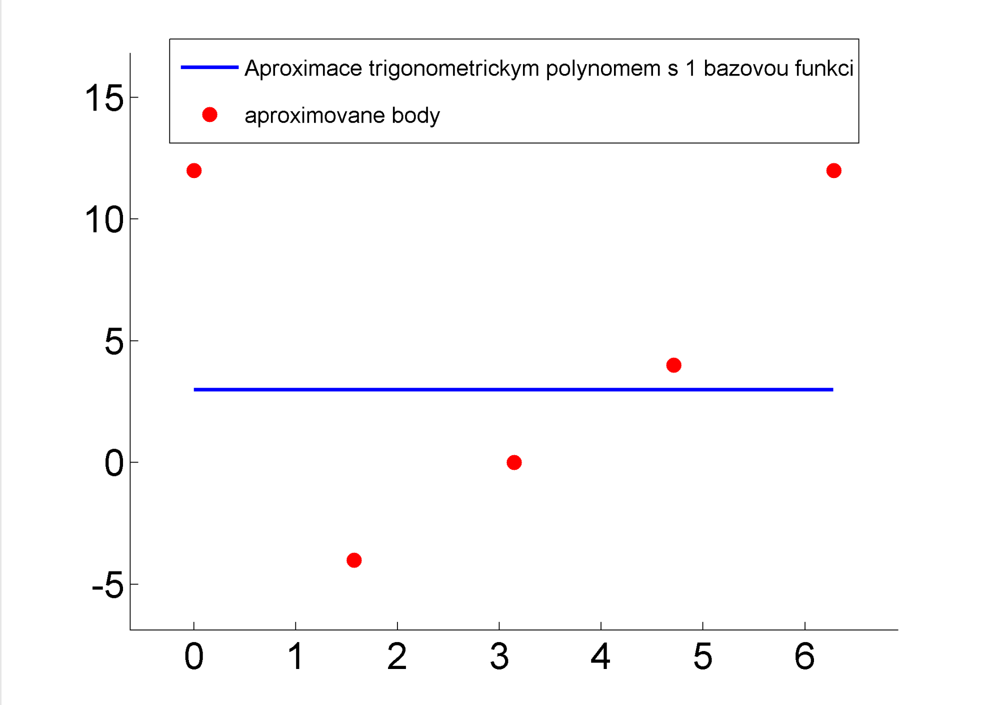
$$(\varphi, \psi) = \sum_{j=0}^{2} \varphi(x_j)\psi(x_i) \qquad x_j = \frac{2\pi j}{N}, \quad N = 3$$

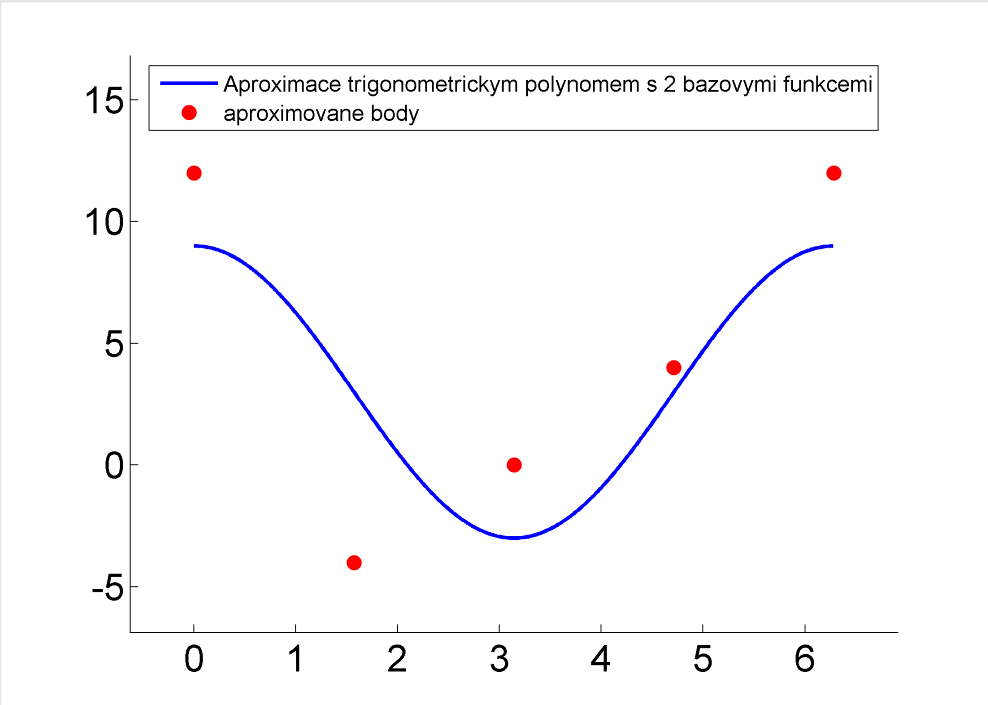
<u>D.cv:</u>

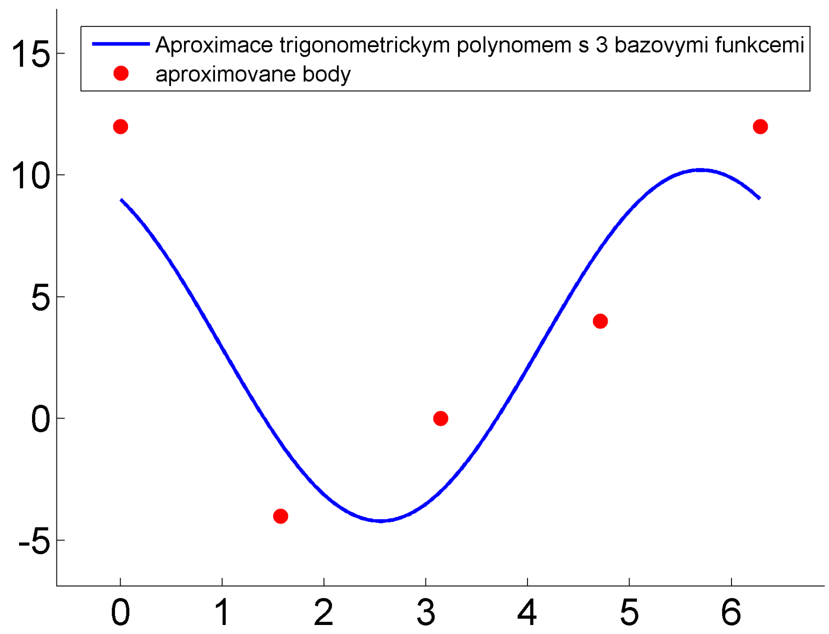
$$\left(\frac{1}{2}, \cos x\right) = \cdots = 0$$
$$\left(\frac{1}{2}, \sin x\right) = \cdots = 0$$
$$\Big(\cos x, \sin x\Big) = \cdots = 0$$

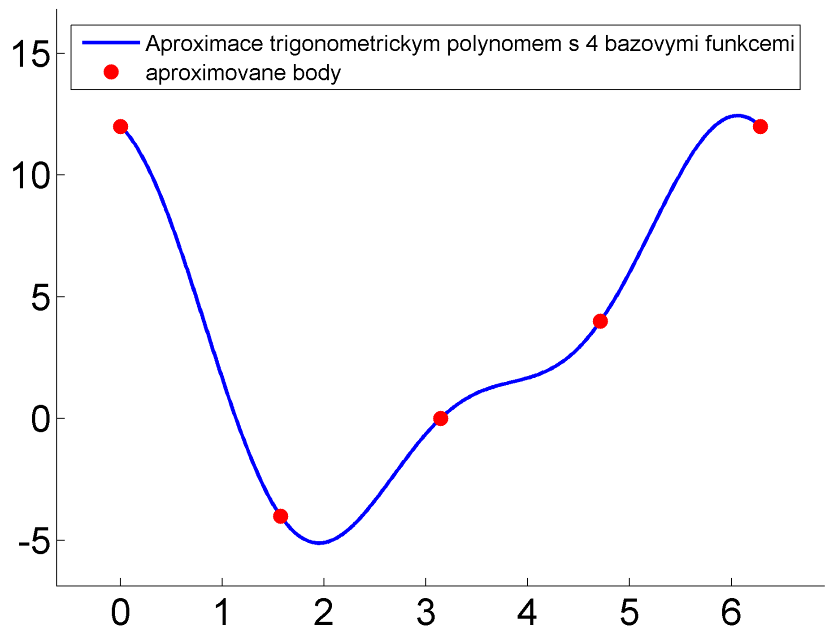
Vyřešením soustavy získáme hledané koeficienty $A_0 = 3$, $A_1 = 6$, $B_1 = -4$, $A_2 = 3$ a tím i aproximující trigonometrický polynom

$$\underline{\varphi(x) = 3 + 6\cos x - 4\sin x + 3\cos 2x.}$$


Aproximace trigonometrickym polynomem s 1 bazovou funkci
aproximovane body
15
10
5
0
-5
0
1
2
3
4
5
6


Aproximace trigonometrickym polynomem s 2 bazovymi funkcemi
aproximovane body
15
10
5
0
-5
0
1
2
3
4
5
6





Úloha diskrétní Fourierovy analýzy

Řadu T periodických funkcí (integrovatelných) lze vyjádřit ve tvaru **Fourierovy řady**

$$\boxed{f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{2\pi kx}{T}+b_k\sin\frac{2\pi kx}{T}\right)}$$

nebo

$$\boxed{f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}r_k\sin\left(\frac{2\pi kx}{T}+v_k\right),\quad \text{kde}\quad r_k^2=a_k^2+b_k^2,\quad v_k=\operatorname{arctan}\frac{a_k}{b_k}}$$

Položili jsme $a_k=r_k\sin v_k,\quad b_k=r_k\cos v_k,$

$$a\cos\alpha + b\sin\alpha = r\sin v\cos\alpha + r\cos v\sin\alpha = r(\sin v\cos\alpha + \cos v\sin\alpha) = r\sin(\alpha + v).$$

Fourierovou (harmonickou) analýzou rozumíme úlohu určit amplitudy r_k a fáze v_k tzv. harmonických složek $r_k \sin\dfrac{2\pi k r}{T} + v_k$, je-li dána funkce $f(x)$.

Fourierovou (harmonickou) syntézou rozumíme úlohu určit funkci f, jsou-li dány fáze v_k a amplitudy r_k.

Tuto úlohu můžeme řešit několika způsoby:

(i) Vyjdeme z úlohy spojité Fourierovy analýzy a numericky vypočteme Fourierovy koeficienty, které jsou dány:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2\pi k x}{T}\,dx$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{2\pi k x}{T}\,dx$$

Užijeme např. lichoběžníkové pravidlo (viz další přednáška). Pozor, pro velká k integrandy oscilují!

(ii) Funkci f aproximujeme (interpolace, diskrétní L_2-aproximace) přímo vhodnou funkcí φ, která má tvar trigonometrického polynomu.

Použijeme přístup (ii) realizovaný v příkladu.

Diskrétní Fourierova analýza - ve smyslu interpolace

Věta Trigonometrický polynom

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{L}(A_k\cos kx + B_k\sin kx), \qquad N = 2L+1 \quad (N \text{ liché})}$$

resp.

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{L-1}(A_k\cos kx + B_k\sin kx) + \frac{A_L}{2}\cos Lx, \qquad N = 2L \quad (N \text{ sudé})}$$

splňuje interpolační podmínky

$$\varphi(x_j) = f(x_j), \quad x_j = \frac{2\pi j}{N}, \qquad j = 0, 1, \ldots, N-1,$$

právě když koeficienty polynomu $\varphi(x)$ jsou dány pomocí vzorců

$$\boxed{\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_j\cos kx_j, \qquad k = 0, 1, \ldots, L \\ B_k &= \frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_j\sin kx_j, \qquad k = (0,)1, 2, \ldots, L \end{aligned}}$$

$$\left(A_0 = \frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_j\right)$$

Důkaz:

$$(\varphi(x), \cos kx) \to A_k, \qquad (\varphi(x), \sin kx) \to B_k \quad \text{a využijeme ortogonality.}$$

Z těchto vzorců vychází algoritmus diskrétní Fourierovy analýzy.

Úlohu a řešení Fourierovy analýzy lze formulovat elegantně použitím komplexní proměnné.

Uvažujme pro jednoduchost lichý počet bázových funkcí ($N = 2L + 1$) a periodu dané funkce 2π. Potom má aproximující funkce tvar

$$\varphi(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{L}(A_k \cos kx + B_k \sin kx). \tag{$*$}$$

Pomocí Eulerova vzorce

$$\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i \sin x$$

lze pro funkce $\sin x$ a $\cos x$ odvodit vztahy

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}\ , \quad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i} = -\frac{1}{2}\,i\left(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}\right)$$

a tedy

$$\varphi(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{L}\left(\frac{1}{2}\,A_k\left(\mathrm{e}^{ikx} + \mathrm{e}^{-ikx}\right) - \frac{1}{2}\,i\,B_k\left(\mathrm{e}^{ikx} - \mathrm{e}^{-ikx}\right)\right) =$$

$$= A_0 + \sum_{k=1}^{L}\left(\frac{1}{2}\left(A_k - i\,B_k\right)\mathrm{e}^{ikx} + \frac{1}{2}\left(A_k + i\,B_k\right)\mathrm{e}^{-ikx}\right).$$

Označíme-li

$$C_0 = A_0\ , \quad C_k = \frac{1}{2}\left(A_k - i\,B_k\right)\ , \quad C_{-k} = \frac{1}{2}\left(A_k + i\,B_k\right)$$

dostaneme

$$\boxed{\varphi(x) = \sum_{k=-L}^{L} C_k\,\mathrm{e}^{ikx}}.$$

Pro koeficienty dostaneme vynásobením ($*$) jednotlivými bázovými funkcemi, využitím jejich ortogonality a interpolačních podmínek předpisy:

$$A_0 = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)$$

$$A_k = \frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\,\cos kx_j$$

$$B_k = \frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\,\sin kx_j$$

$$C_{\pm k} = \frac{1}{2}\left(A_k \mp i\, B_k\right) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\,\cos kx_j \;\mp\; i\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\,\sin kx_j =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\underbrace{\left(\cos kx_j \mp i\sin kx_j\right)}_{\mathrm{e}^{\mp ikx_j}}$$

$$\boxed{C_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\,\mathrm{e}^{-ikx_j}, \qquad k = -L, \dots, L}$$

Poznámka

Vezmeme-li aproximující polynom o menším počtu bázových funkcí než je počet zadaných bodů, jedná se o aproximaci ve smyslu metody nejmenších čtverců, tj. diskrétní L_2-aproximaci. Potom obecně nemohou být splněny interpolační podmínky přesně (jen ve speciálních případech).

Výpočet koeficientů C_k představuje sčítání konečné řady.

$$\boxed{C_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\,\mathrm{e}^{-ikx_j}, \qquad k = -L, \dots, L}$$

Uvažujeme-li počet aproximujících bázových funkcí N jako mocninu čísla 2 (tj. $N = 2^M$), lze odvodit velmi rychlý a efektivní algoritmus pro výpočet koeficientů C_k.

Tento algoritmus se potom nazývá **rychlá Fourierova transformace (Fast Fourier transform - FFT)**.

Princip metody si ukážeme na následujícím příkladě.

Příklad

Uvažujme následující zadání funkce f pro $N = 2^2 = 4$ ekvidistantní uzlové body.

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = \frac{\pi}{2}$	$x_2 = \pi$	$x_3 = \frac{3\pi}{2}$
$f(x_i)$	f_0	f_1	f_2	f_3

Počítáme koeficienty C_k.

Platí:

$$\boxed{C_k = \frac{1}{4}\left(f_0 + f_1 e^{-ik\frac{\pi}{2}} + f_2 e^{-ik\pi} + f_3 e^{-ik\frac{3\pi}{2}}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3}.$$

Označme

$$\boxed{w = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}}, \qquad \boxed{F_k = \frac{1}{4} f_k \quad k = 0, 1, 2, 3}.$$

Potom

$$\boxed{C_k = F_0 + F_1 w^k + F_2 w^{2k} + F_3 w^{3k}, \qquad k = 0, 1, 2, 3}$$

Uvědomme si, že platí

$$w^4 = 1 \qquad (\text{obecně } \; w^N = 1).$$

$$C_0 = \underbrace{(F_0 + F_2)}_{R_0} + \underbrace{(F_1 + F_3)}_{S_0}$$

$$C_1 = \underbrace{(F_0 + w^2 F_2)}_{R_1} + w\,\underbrace{(F_1 + w^2 F_3)}_{S_1}$$

$$C_2 = (F_0 + F_2) + w^2(F_1 + F_3)$$

$$C_3 = (F_0 + w^2 F_2) + w^3(F_1 + w^2 F_3)$$

Výpočetní náročnost:

na R_k, S_k ... $4S + 2N$

na C_k ... $4S + 3N$

$\sum$ ... $8S + 5N$

Příklad

Aproximujte periodickou funkci f (perioda $T = 31$) zadanou tabulkou pomocí trigonometrického polynomu (ve smyslu L_2-aproximace, až při použití plného počtu bázových funkcí ve smyslu interpolace).

$$\begin{aligned} x_k &= 1, 2, \ldots, 32 \\ f(x_k) &= 1 && \text{pro} \quad k = 1, 2, \ldots, 15 \\ &= 0 && \text{pro} \quad k = 16 \\ &= -1 && \text{pro} \quad k = 17, 18, \ldots, 31 \\ &= 1 && \text{pro} \quad k = 32 \end{aligned}$$

Řešení

výsledky v MATLABu

```
koeficient A(0)  = 0.000000    u bazove funkce phi(0)  = 1
koeficient A(1)  = 0.128701    u bazove funkce phi(1)  = cos(2*pi*1*x/31-1)
koeficient B(1)  = 1.265623    u bazove funkce phi(2)  = sin(2*pi*1*x/31-1)
koeficient A(2)  = 0.001321    u bazove funkce phi(3)  = cos(2*pi*2*x/31-1)
koeficient B(2)  = 0.006426    u bazove funkce phi(4)  = sin(2*pi*2*x/31-1)
koeficient A(3)  = 0.126074    u bazove funkce phi(5)  = cos(2*pi*3*x/31-1)
koeficient B(3)  = 0.401825    u bazove funkce phi(6)  = sin(2*pi*3*x/31-1)
koeficient A(4)  = 0.005229    u bazove funkce phi(7)  = cos(2*pi*4*x/31-1)
koeficient B(4)  = 0.012184    u bazove funkce phi(8)  = sin(2*pi*4*x/31-1)
koeficient A(5)  = 0.120926    u bazove funkce phi(9)  = cos(2*pi*5*x/31-1)
koeficient B(5)  = 0.217866    u bazove funkce phi(10) = sin(2*pi*5*x/31-1)
koeficient A(6)  = 0.011564    u bazove funkce phi(11) = cos(2*pi*6*x/31-1)
koeficient B(6)  = 0.016614    u bazove funkce phi(12) = sin(2*pi*6*x/31-1)
koeficient A(7)  = 0.113468    u bazove funkce phi(13) = cos(2*pi*7*x/31-1)
koeficient B(7)  = 0.132175    u bazove funkce phi(14) = sin(2*pi*7*x/31-1)
koeficient A(8)  = 0.020067    u bazove funkce phi(15) = cos(2*pi*8*x/31-1)
koeficient B(8)  = 0.019075    u bazove funkce phi(16) = sin(2*pi*8*x/31-1)
koeficient A(9)  = 0.104007    u bazove funkce phi(17) = cos(2*pi*9*x/31-1)
koeficient B(9)  = 0.080507    u bazove funkce phi(18) = sin(2*pi*9*x/31-1)
koeficient A(10) = 0.030389    u bazove funkce phi(19) = cos(2*pi*10*x/31-1)
koeficient B(10) = 0.018942    u bazove funkce phi(20) = sin(2*pi*10*x/31-1)
koeficient A(11) = 0.092929    u bazove funkce phi(21) = cos(2*pi*11*x/31-1)
koeficient B(11) = 0.045584    u bazove funkce phi(22) = sin(2*pi*11*x/31-1)
koeficient A(12) = 0.042109    u bazove funkce phi(23) = cos(2*pi*12*x/31-1)
koeficient B(12) = 0.015596    u bazove funkce phi(24) = sin(2*pi*12*x/31-1)
koeficient A(13) = 0.080687    u bazove funkce phi(25) = cos(2*pi*13*x/31-1)
koeficient B(13) = 0.020891    u bazove funkce phi(26) = sin(2*pi*13*x/31-1)
koeficient A(14) = 0.054747    u bazove funkce phi(27) = cos(2*pi*14*x/31-1)
koeficient B(14) = 0.008387    u bazove funkce phi(28) = sin(2*pi*14*x/31-1)
koeficient A(15) = 0.067784    u bazove funkce phi(29) = cos(2*pi*15*x/31-1)
koeficient B(15) = 0.003438    u bazove funkce phi(30) = sin(2*pi*15*x/31-1)

Aproximace je dana predpisem :

----------------------------------------------------------------------------
                L
 phi = A(0) + suma [ A(k)*phi(2k-1) + B(k)*phi(2k) ]
               k=1
                                 pro pocet bazovych funkci N=2L+1
----------------------------------------------------------------------------

----------------------------------------------------------------------------
               L-1
 phi = A(0) + suma [ A(k)*phi(2k-1) + B(k)*phi(2k) ] + A(L)*phi(2L-1)
               k=1
                                 pro pocet bazovych funkci N=2L
----------------------------------------------------------------------------
```