# Kapitola 7. Aproximace funkcí - I

## Motivace

Při numerickém řešení úloh matematické analýzy často nahrazujeme danou funkci $f$, vystupující v řešené matematické úloze, jinou funkcí $\varphi$, která v nějakém vhodném smyslu napodobuje funkci $f$ a snadno se přitom matematicky zpracovává či modeluje na počítači. Tuto funkci $\varphi$ nazýváme **aproximací funkce** $f$.

Poznámka: Aproximaci funkce jsme již používali u řešení nelineární rovnice. Například u Newtonovy metody jsme danou funkci $f$ z řešené rovnice $f(x) = 0$ aproximovali lineární funkcí (tečnou ke grafu funkce $f$); podobně tak tomu bylo u metody sečen.

Poznámka: Již pouhý výpočet funkčních hodnot některých základních funkcí ($\sin x$, $e^x$, $\ln x$, ...) v počítači či na kalkulačce se provádí užitím aproximace těchto funkcí. Tyto aproximace jsou ovšem zabudovány do výpočetního systému a uživatel si často ani neuvědomuje, že píše-li v programu např. `y=sin(x)`, nahrazuje výpočet hodnoty funkce $\sin x$ výpočtem hodnoty jistého polynomu.

Příklady užití:

- numerické metody pro výpočet určitého integrálu
- zpracování výsledků měření

## Formulace (základní aproximační úloha)

Je dána funkce $f = f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$. Zvolíme $(n+1)$ lineárně nezávislých funkcí $\varphi_0, \varphi_1, \dots \varphi_n$ a hledáme funkci $\varphi$ definovanou na $\langle a, b\rangle$, kterou lze vyjádřit ve tvaru lineární kombinace

$$\boxed{\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x)}$$

a která je v nějakém smyslu blízká funkci $f$.

- Tento typ aproximace se nazývá **lineární aproximace**
- Pokud za funkce $\varphi_i(x)$ volíme polynomy, mluvíme o **polynomiální aproximaci**
- Příkladem **nelineární aproximace** je funkce $\varphi(x)$:

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m}{1 + b_1x + \dots + b_nx^n}}$$

V tomto případě mluvíme o **racionální aproximaci**

Přístupy k aproximaci

**Aproximace na okolí bodu** - Použijeme, chceme-li aproximovat chování funkce v malém okolí bodu. Příkladem může být např. vyčíslení hodnoty $\sin\frac{\pi}{4}$ na kalkulačce.

**Interpolace** - Použijeme, chceme-li tabulkou danými body proložit polynom, tj. požadujeme-li, aby aproximace přesně procházela zadanými body.

**$L_2$-aproximace** - Použijeme, hledáme-li funkční závislost mezi tabulkou danými body (získaných například

TRIAL

měřením), kde nutně nevyžadujeme, aby aproximace danými body procházela. Důvodem můžou být např. chyby, se kterými jsme hodnoty naměřili.

## Aproximace na okolí bodu

– mluvíme o **aproximaci Taylorovým polynomem**

Předpokládáme, že daná funkce $f$ má v daném bodě $x_0$ a jeho okolí spojité derivace až do řádu $n$. Podmínky pro funkci, která co nejlépe napodobuje chování funkce $f$ matematicky zapíšeme takto:

$$\varphi^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0), \quad j = 0, 1, \dots, n$$

(Hodnoty derivací funkcí $f$, $\varphi$ v bodě $x_0$ jsou stejné až do řádu $n$.)

Tuto podmínku samozřejmě splňuje Taylorův polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Pro chybu aproximace Taylorovým polynomem platí

$$e(x) = f(x) - T_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \xi \in \mathcal{U}(x_0)$$

umíme-li odhadnout $(n+1)$-ní derivaci funkce $f$ na daném okolí bodu $x_0$, můžeme provést následující odhad chyby aproximace:

$$\text{Platí-li} \quad |f^{(n+1)}(x)| \le M \quad \forall x \in \mathcal{U}(x_0), \quad \text{potom} \quad |e(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}.$$

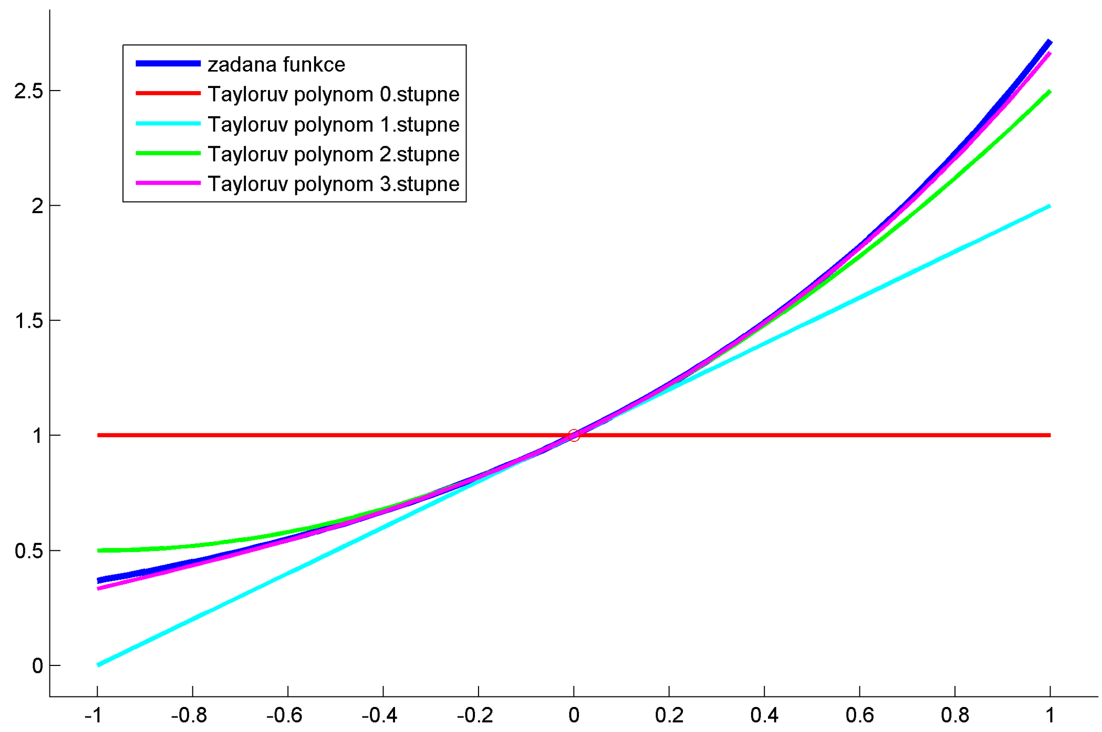
**Příklad** Stanovte odhad chyby aproximace Taylorovým polynomem 10. stupně funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$ v bodě $x_0 = 0$ na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.

---

$$f^{(j)}(x) = \mathrm{e}^x, \; j = 0, 1, \dots; \quad f^{(j)}(0) = 1, \; j = 0, 1, \dots$$

$$\boxed{T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{10}}{10!}}$$

$$e(x) = \mathrm{e}^x - T^{10}(x) = \frac{\mathrm{e}^\xi}{11!}x^{11} \quad \Rightarrow \quad \boxed{|e(x)| \le \frac{\mathrm{e}}{11!} \le 7.10^{-8}}$$




**Příklad** Určete stupeň Taylorova polynomu funkce $f(x) = \sin x$ v bodě $x_0 = 0$ tak, aby jeho chyba na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ byla nejvýše $10^{-5}$, resp. $(10^{-12})$.

---

Pro chybu platí

$$\boxed{e(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)}.$$

Zajímá nás chyba na intervalu délky $2\pi$ $\Rightarrow$ odhad pro $f^{(n+1)}(x)$ je $\left| \underbrace{f^{(n+1)}(x)}_{(*)} \right| \leq 1 \quad \forall x \in \langle -\pi, \pi \rangle$

$(*)$ buď $\pm \sin x$ nebo $\pm \cos x$ - tento odhad je vždy nejmenší možný

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq 10^{-5} \quad \forall x \in \langle -\pi, \pi \rangle$$

$$\frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!} \leq 10^{-5} \quad (\text{resp. } 10^{-12})$$

TRIAL



| $n$ | $\dfrac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}$ | |
|---|---|---|
| 0 | 3.141592653589793 | |
| 1 | 4.934802200544679 | |
| 2 | 5.167712780049969 | |
| 3 | 4.058712126416768 | |
| 4 | 2.550164039877345 | |
| 5 | 1.335262768854589 | |
| 6 | 0.599264529320792 | |
| 7 | 0.235330630358893 | |
| 8 | 0.082145886611128 | |
| 9 | 0.025806891390014 | |
| 10 | 0.007370430945714 | |
| 11 | 0.001929574309404 | |
| 12 | 0.000466302805768 | |
| 13 | 0.000104638104925 | |
| 14 | 0.000021915353448 | |
| **15** | **0.000004303069587** | $< 10^{-5}$ |
| 16 | 0.000000795205400 | |
| 17 | 0.000000138789525 | |
| 18 | 0.000000022948429 | |
| 19 | 0.000000003604731 | |
| 20 | 0.000000000539266 | |
| 21 | 0.000000000077007 | |
| 22 | 0.000000000010518 | |
| 23 | 0.000000000001377 | |
| **24** | **0.000000000000173** | $< 10^{-12}$ |

Jak vypadá Taylorův polynom $T_n(x)$?

$$\begin{array}{lll}
f(x) = \sin x & \qquad & f(0) = 0 \\
f'(x) = \cos x & & f'(0) = 1 \\
f''(x) = -\sin x & & f''(0) = 0 \\
f'''(x) = -\cos x & & f'''(0) = -1 \\
\hline
f^{(4)}(x) = \sin x & & f^{(4)}(0) = 0 \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

$$T_n(x) = \underbrace{f(x_0)}_{\to 0} + \underbrace{f'(x_0)}_{\to 1}(x - \underbrace{x_0}_{\to 0}) + \frac{1}{2!}\underbrace{f''(x_0)}_{\to 0}(x - \underbrace{x_0}_{\to 0})^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - \underbrace{x_0}_{\to 0})^n$$

$$\boxed{T_{15}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} - \frac{x^{15}}{15!}}$$

Má-li kalkulačka vypočítat např. $\sin 0{,}4$ a má povolenou chybu $10^{-5}$, určí $\boxed{\sin 0{,}4 \doteq T_{15}(0{,}4)}$.

Pro dodržení chyby $10^{-12}$ stačí určit $\boxed{\sin 0{,}4 \doteq T_{24}(0{,}4)}$, tj. přičíst další 4 členy.

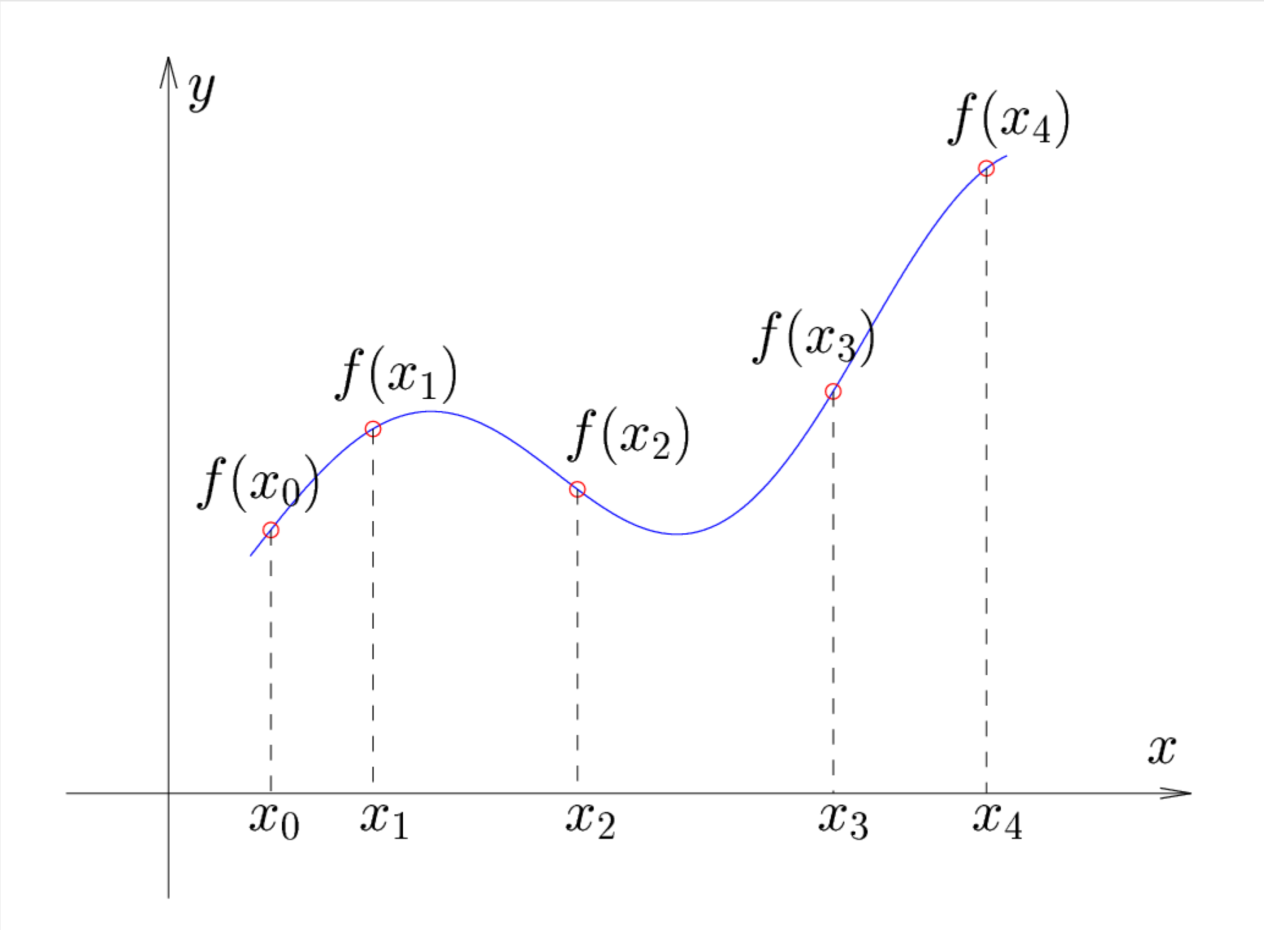
Poznámka:

Stejný postup lze užít i pro výpočet v bodech mimo interval $\langle -\pi, \pi\rangle$. Stačí využít periodičnosti funkce $\sin x$.

## Aproximace interpolačním polynomem

Aproximujeme funkci, která je dána svými hodnotami v $n+1$ bodech $x_i$, $i = 0, 1, \dots, n$ (body $x_i$ nazýváme uzly interpolace), a požadujeme, aby aproximace (interpolačním polynomem) procházela zadanými body.

Aproximace nám potom poslouží k získání přibližné hodnoty zadané funkce v libovolném bodě intervalu $\langle x_0, x_n \rangle$.




Interpolační podmínky

$$\boxed{P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n}$$

Chyba $\quad e(x) = f(x) - P_n(x) \quad$ pak nabývá nulových hodnot v uzlech interpolace.

**Věta** Interpolační úloha má jediné řešení, pokud jsou uzly $x_0, x_1, \dots, x_n$ navzájem různé.

Důkaz: Interpolační polynom uvažujeme ve tvaru

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k}.$$

Dosazením do interpolačních podmínek získáme soustavu $(n+1)$ lineárních rovnic pro koeficienty $a_0, a_1, \dots, a_n$.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k = f(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, n}$$

Matice soustavy (Vandermondova matice):

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}$$

Soustava má právě jedno řešení, pokud $\boxed{\det \mathbf{V} \neq 0}$.

Matici soustavy převedeme na trojúhelníkový tvar

- přičtením násobku řádku k jinému řádku se determinant nezmění
- vynásobíme-li řádek číslem $\alpha$, pak je determinant $\alpha$ násobkem původního

Od 2. až $(n+1)$-ního řádku odečteme 1. řádek.

$$\mathbf{V} \sim \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \dots & x_0^n \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & x_1^3 - x_0^3 & \dots & x_1^n - x_0^n \\ 0 & x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0^2 & x_2^3 - x_0^3 & \dots & x_2^n - x_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_n - x_0 & x_n^2 - x_0^2 & x_n^3 - x_0^3 & \dots & x_n^n - x_0^n \end{bmatrix}$$

Vynormujeme – $(j+1)$-ní řádek vydělíme $(x_j - x_0)$, $j = 1, 2, \dots, n$.

$$\mathbf{V} \sim \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \dots & x_0^n \\ 0 & 1 & \frac{x_1^2 - x_0^2}{x_1 - x_0} & \frac{x_1^3 - x_0^3}{x_1 - x_0} & \dots & \frac{x_1^n - x_0^n}{x_1 - x_0} \\ 0 & 1 & \frac{x_2^2 - x_0^2}{x_2 - x_0} & \frac{x_2^3 - x_0^3}{x_2 - x_0} & \dots & \frac{x_2^n - x_0^n}{x_2 - x_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \frac{x_n^2 - x_0^2}{x_n - x_0} & \frac{x_n^3 - x_0^3}{x_n - x_0} & \dots & \frac{x_n^n - x_0^n}{x_n - x_0} \end{bmatrix}$$

od 3. až $(n+1)$-ního řádku odečteme 2. řádek

$$\mathbf{V} \sim \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \dots & x_0^n \\ 0 & 1 & x_1 + x_0 & x_1^2 + x_1 x_0 + x_0^2 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & x_2 - x_1 & (*) & \dots & \dots \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 & (**) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & x_n - x_1 & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$(*) = \frac{x_2^3 - x_0^3}{x_2 - x_0} - \frac{x_1^3 - x_0^3}{x_1 - x_0} = (x_2^2 + x_2x_0 + x_0^2) - (x_1^2 + x_1x_0 + x_0^2) = x_2^2 - x_1^2 + x_0(x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + x_0)$$

$$(**) = \frac{x_3^3 - x_0^3}{x_3 - x_0} - \frac{x_1^3 - x_0^3}{x_1 - x_0} = (x_3^2 + x_3x_0 + x_0^2) - (x_1^2 + x_1x_0 + x_0^2) = x_3^2 - x_1^2 + x_0(x_3 - x_1) = (x_3 - x_1)(x_3 + x_1 + x_0)$$

$$\vdots$$

Vynormujeme – $(j+1)$-ní řádek vydělíme $(x_j - x_1)$, $j = 2, 3, \ldots, n$.

$$\mathbf{V} \sim \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \ldots & x_0^n \\ 0 & 1 & x_1 + x_0 & x_1^2 + x_1x_0 + x_0^2 & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & x_2 + x_1 + x_0 & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & x_3 + x_1 + x_0 & \ldots & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 1 & x_n + x_1 + x_0 & \ldots & \ldots \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

Získáme trojúhelníkovou matici s jedničkami na diagonále, tj. výsledná matice má determinant roven 1.

Při úpravách jsme dělili $(x_j - x_i)$, $j > i$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\det \mathbf{V} = \prod_{j>i}^{n} (x_j - x_i)}$$

$$\det \mathbf{V} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_i \neq x_j \quad \forall i \neq j$$

□

## Lagrangeův interpolační polynom

Označme si hledaný polynom $n$-tého stupně $L_n(x)$.
Víme, že musí být splněny interpolační podmínky

$$L_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Lagrangeův interpolační polynom hledáme ve tvaru

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot l_i(x)},$$

kde $l_i(x)$ jsou polynomy $n$-tého stupně takové, že platí

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

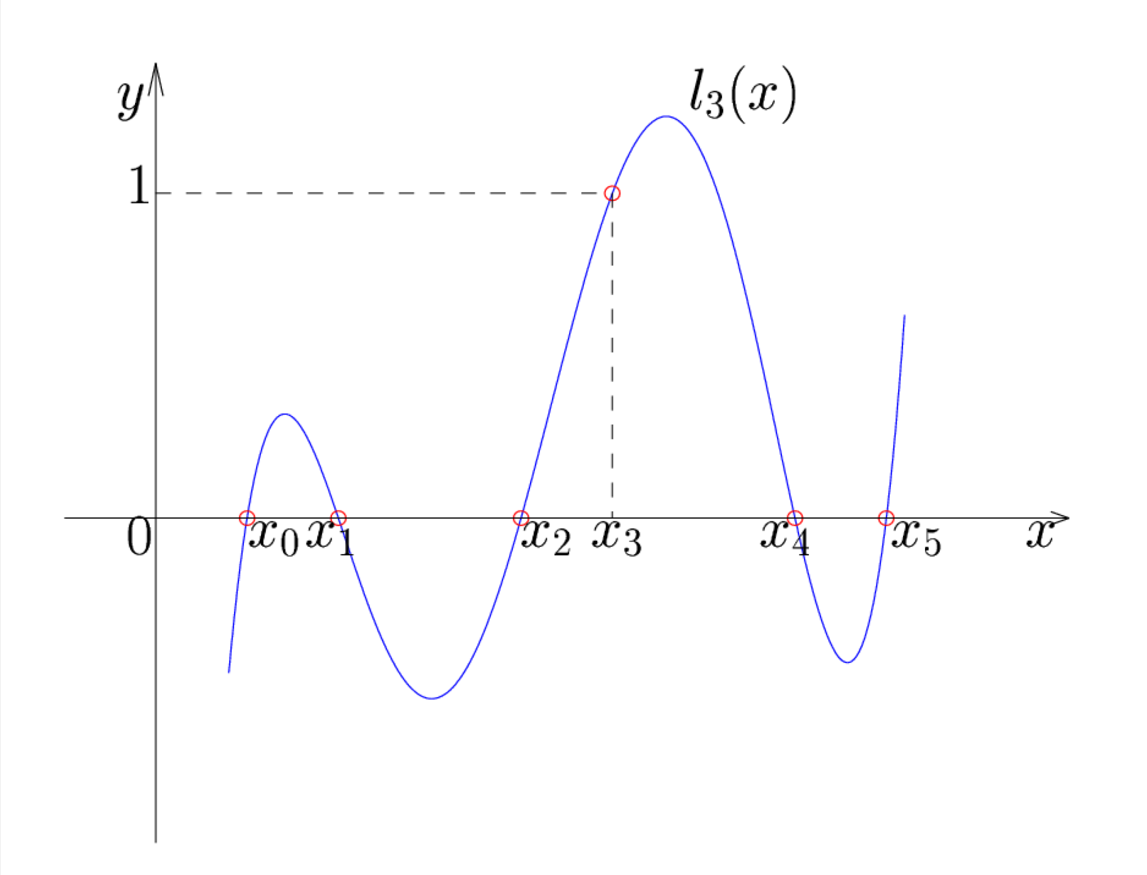
(snadno se přesvědčíte, že dosadíte-li do předpisu pro $L_n(x)$ uzly interpolace, získáte zadané interpolační podmínky).

Konkretizujme nyní dílčí polynomy $l_i(x)$.

Víme, že $l_i(x)$ má kořeny $x_0, x_1, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ a nabývá hodnoty 1 v bodě $x_i$.
Můžeme jej tedy zapsat ve tvaru

$$\boxed{l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}}.$$

Na obrázku je ukázán příklad dílčího polynomu $l_3(x)$:




## Newtonův interpolační polynom

Označme si hledaný polynom $n$-tého stupně $N_n(x)$.
Pro jeho odvození použijeme jinou kontrukci. Polynom volíme ve tvaru

$$\boxed{N_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}.$$

Opět požadujeme splnění interpolačních podmínek

$$N_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Poznámka: Výhodou volby tohoto zdánlivě složitého předpisu je fakt, že přidáme-li další bod interpolace $[x_{n+1}, f(x_{n+1})]$, nemusíme celý výpočet opakovat, ale stačí dopočítat příslušný koeficient $a_{n+1}$ (ostatní koeficienty $a_i$ zůstávají beze změny). Při použití Lagrangeova polynomu bychom museli celý výpočet provést znovu.

Ukažme si, co dostaneme dosazováním interpolačních podmínek do předpisu polynomu:

$$N_n(x_0) = \boxed{a_0 = f(x_0)}$$

$$N_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}$$

$$N_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2)$$

$$\Rightarrow \quad a_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0) - a_1 \overbrace{(x_2 - x_0)}^{x_2 - x_1 + x_1 - x_0}}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} =$$

$$= \frac{f(x_2) - f(x_0) - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_1) - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} =$$

$$= \frac{f(x_2) - f(x_1) - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}}$$

Poznámka:

Počítat koeficienty $a_i$ přímo ze soustavy není praktické, budeme je počítat pomocí tzv. **poměrných diferencí**.

Algoritmus (koeficienty Newtonova polynomu)

Pro $i = 0, 1, \ldots, n$

$\boxed{\mathbf{A}_{i0} = f(x_i)}$

Pro $k = 1, 2, \ldots, i$

$$\boxed{\mathbf{A}_{ik} = \frac{\mathbf{A}_{i,k-1} - \mathbf{A}_{i-1,k-1}}{x_i - x_{i-k}}}$$

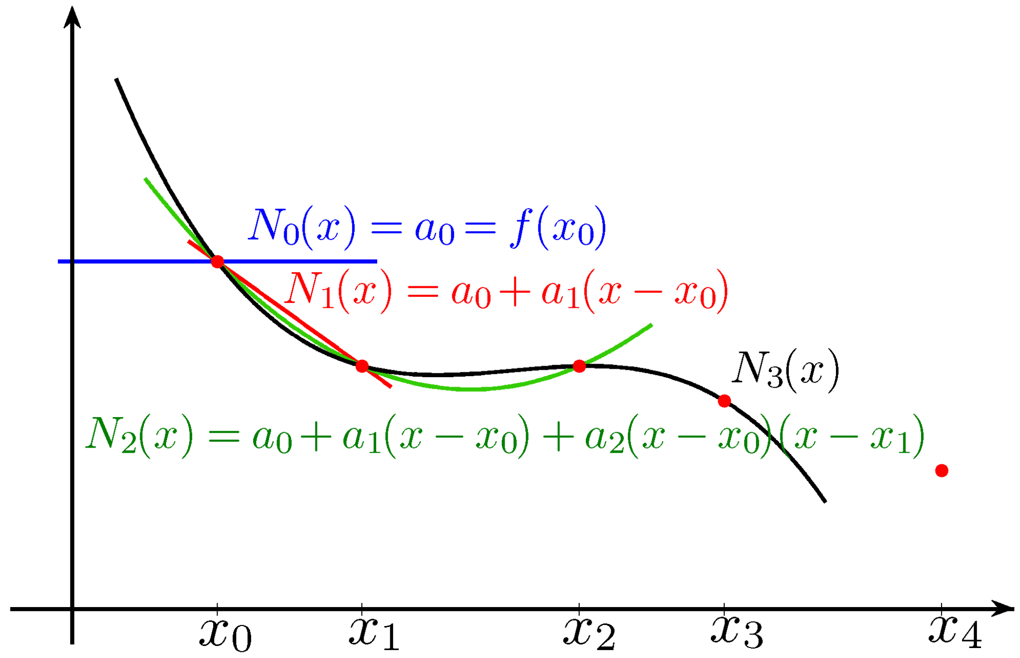
Výstup: $\boxed{a_i = \mathbf{A}_{ii}}$

Schéma algoritmu

$$\begin{array}{c|lllll}
x_0 & f(x_0) = \mathbf{A}_{00} = a_0 & & & & \\
x_1 & f(x_1) = \mathbf{A}_{10} & \mathbf{A}_{11} = a_1 & & & \\
x_2 & f(x_2) = \mathbf{A}_{20} & \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} = a_2 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
x_n & f(x_n) = \mathbf{A}_{n0} & \mathbf{A}_{n1} & \mathbf{A}_{n2} & \ldots & \mathbf{A}_{nn} = a_n
\end{array}$$

Poznámka: Vezmu-li z matice $\mathbf{A}$ pouze prvních $M$ řádků znamená to, že jsem sestavil Newtonův polynom pro pouze prvních $M$ zadaných tabulkových bodů.

TRIAL


$N_0(x) = a_0$ prochází bodem $[x_0, f(x_0)]$

$N_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$

prochází bodem $[x_0, f(x_0)]$ a směrnici má takovou, aby procházel také bodem $[x_1, f(x_1)]$

$N_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$

prochází bodem $[x_0, f(x_0)]$, dále jelikož platí $N_2(x_1) = N_1(x_1)$, prochází i bodem $[x_1, f(x_1)]$ a navíc

prochází bodem $[x_2, f(x_2)]$.

$$N_2(x) = \overbrace{\underbrace{a_0}_{(*)} + \underbrace{a_1(x - x_0)}_{(**)}}^{N_1(x)} + \underbrace{a_2(x - x_0)(x - x_1)}_{(***)}$$

$(*)$ prochází $[x_0, f(x_0)]$

$(**)$ přidáme tento člen tak, aby se zachoval průchod $[x_0, f(x_0)]$ (hodnota pro $x = x_0$ je 0), $a_1$ se určí

tak, aby procházel $[x_1, f(x_1)]$

$(***)$ přidáme tento člen tak, aby se zachoval průchod $[x_0, f(x_0)]$ a $[x_1, f(x_1)]$ (hodnota členu pro

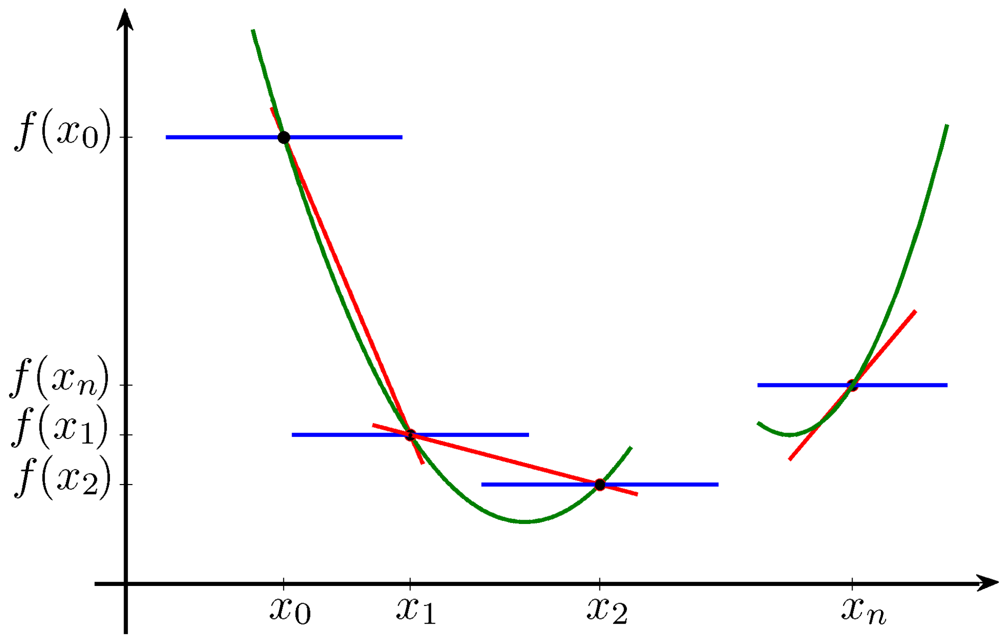
$x = x_0$ a $x = x_1$ je nulová), $a_2$ se určí tak, aby procházel bodem $[x_2, f(x_2)]$

Co znamenají jednotlivá čísla v tabulce?

TRIAL



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $f(x_0) = \mathbf{A}_{00}$ | | | |
| $x_1$ | $f(x_1) = \mathbf{A}_{10}$ | $\mathbf{A}_{11}$ | | |
| $x_2$ | $f(x_2) = \mathbf{A}_{20}$ | $\mathbf{A}_{21}$ | $\mathbf{A}_{22}$ | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | |
| $x_n$ | $f(x_n) = \mathbf{A}_{n0}$ | $\mathbf{A}_{n1}$ | $\mathbf{A}_{n2}$ | |




**Věta** Má-li funkce $f$, k níž přísluší data $f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, spojité derivace v nějakém intervalu $\langle a, b\rangle \supset \operatorname{int}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ do řádu $n$ a derivaci $f^{(n+1)}(x)$ v $(a, b)$, potom $\forall x \in \langle a, b\rangle\ \exists \xi = \xi(x) \in (a, b)$ tak, že pro chybu interpolačního polynomu $P_n(x)$ platí:

$$\boxed{e(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\underbrace{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)}_{\text{polynom } (n+1) \text{ stupně}}} \qquad \circledast$$

(Důkaz pomocí věty o střední hodnotě, viz dále. )

Odhad chyby interpolace

Umíme-li stanovit číslo $M$ takové, že $\forall x \in \langle a, b\rangle$ je $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M$, pak

$$\boxed{|e(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|w(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}\max_{x\in\langle a,b\rangle}|w(x)|},$$

kde jsme označili $w(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$.

$\Rightarrow$ Průběh chyby nezávisí jen na $f^{(n+1)}(x)$, ale i na $w(x)$!

---

Důkaz: Zvolme bod $x \neq x_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$ libovolně. Definujme funkci

$$\boxed{F(t) = f(t) - P_n(t) - \frac{f(x) - P_n(x)}{w_{n+1}(x)} w_{n+1}(t)}. \qquad \circledast\circledast$$

Tato funkce proměnné $t$ má $n + 2$ nulových bodů:

- $x_i,\ \ i = 0, 1, \ldots, n$:

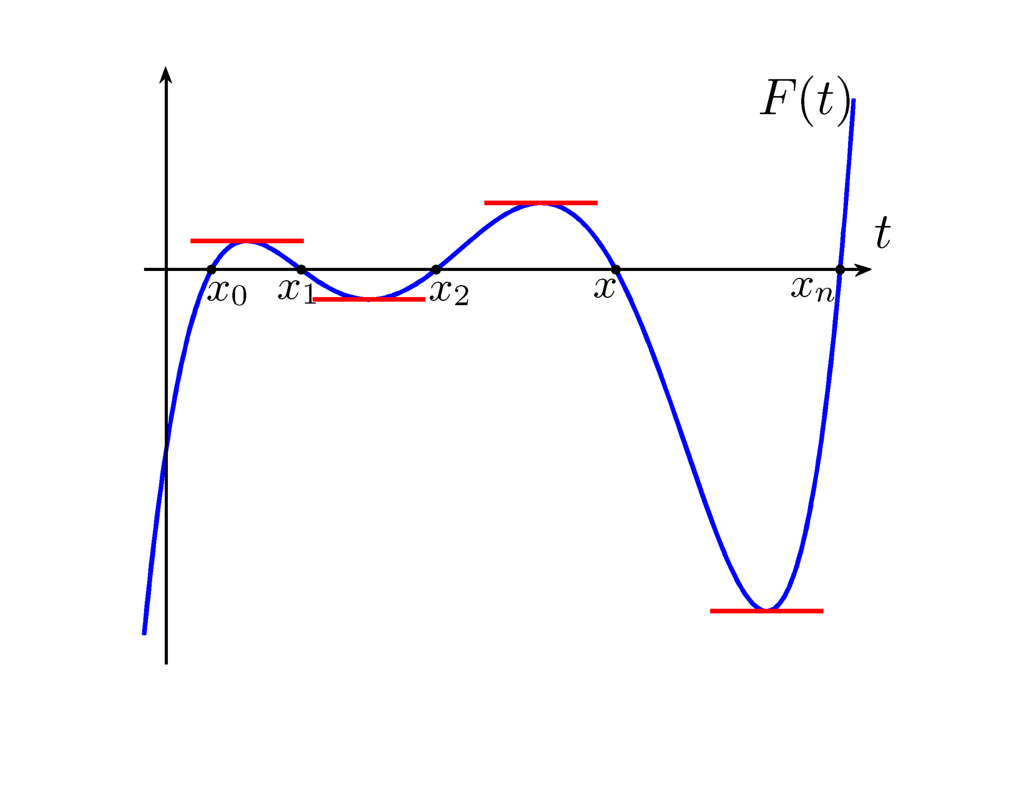
$$F(x_i) = \underbrace{f(x_i) - P_n(x_i)}_{=0} - \frac{f(x) - P_n(x)}{w_{n+1}(x)} \underbrace{w_{n+1}(x_i)}_{=0} = 0$$

- $x$:

$$F(x) = f(x) - P_n(x) - \frac{f(x) - P_n(x)}{w_{n+1}(x)} w_{n+1}(x) = 0$$

Použijeme-li $(n+1)$krát **Rollovu větu** zjistíme, že první derivace $F'(t)$ má v $(a, b)$ alespoň $n+1$ nulových bodů.

**Rollova věta:** Nechť $f(x)$ je v $\langle a, b\rangle$ spojitá a má v $(a, b)$ derivaci. Nechť $f(a) = f(b)$. Pak existuje alespoň 1 bod $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.




Pokračujeme dál a aplikujeme nyní **Rollovu větu** na funkci $F'(t)$ a zjistíme, že $F''(t)$ má v $(a, b)$ alespoň $n$ nulových bodů, atd.

$\vdots$

$F^{(n+1)}(t)$ má v $(a, b)$ alespoň jeden nulový bod a ten označíme $\xi = \xi(x)$.

Vztah ⊛⊛ zderivujeme $(n+1)$ krát podle $t$:

$$\underbrace{F^{(n+1)}(t)}_{(\bullet)} = f^{(n+1)}(t) - \underbrace{P_n^{(n+1)}(t)}_{=0\ (\bullet\bullet)} - \frac{f(x)-P_n(x)}{w_{n+1}(x)}\underbrace{w_{n+1}^{(n+1)}(t)}_{=(n+1)!\ (\bullet\bullet\bullet)}$$

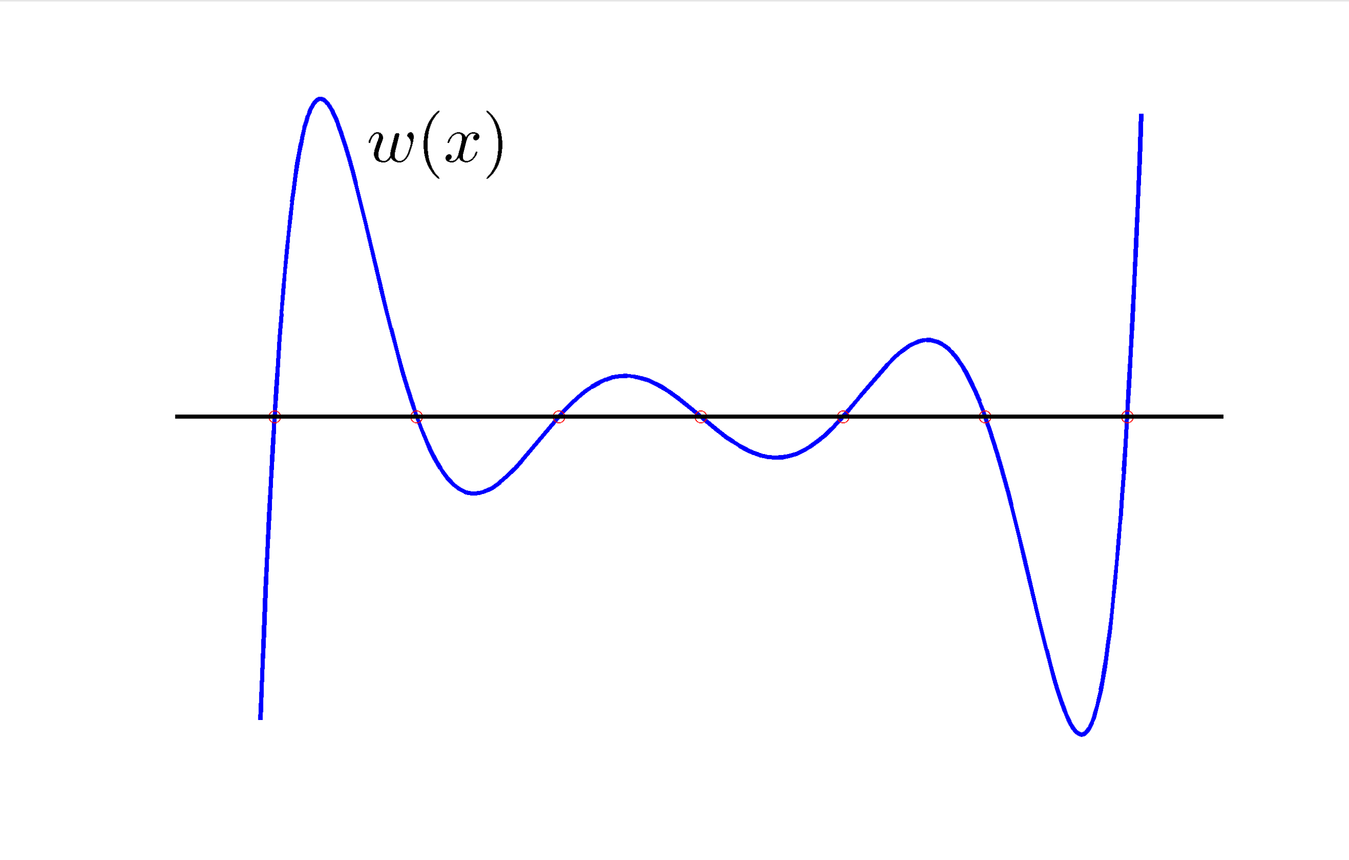
($\bullet$) Víme, že existuje $\xi$ tak, že $F^{(n+1)}(\xi) = 0$
($\bullet\bullet$) $P_n$ ... polynom $n$-tého stupně
($\bullet\bullet\bullet$) $w_{n+1}(t)$ je polynom $(n+1)$ stupně a u $t^{n+1}$ je koeficient 1

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x)-P_n(x)}{w_{n+1}(x)}(n+1)! \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(x)-P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\, w_{n+1}(x)}$$

□

- Pokud interpolujeme funkci zadanou v ekvidistantních uzlech, mohou mít nepřesnosti ve vstupních datech silný vliv na hodnotu výsledku → úloha je špatně podmíněná

  Poznámka: Špatná podmíněnost platí tím více i pro extrapolaci.




- Dobrou strategií je volit $x_i$ tak, aby byly rozloženy stejně jako kořeny Čebyševových polynomů → minimalizuje se tak hodnota $\max|w(x)|$.

Definice (**Čebyševova aproximace**)

K dané spojité funkci $f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, chceme najít mezi všemi polynomy $P_n(x)$ stupně nejvýše $n$ takový polynom $P_n^*(x)$, který splňuje:

TRIAL


$$\boxed{\max_{x \in \langle a,b \rangle} |f(x) - P_n^*(x)| = \min_{P_n(x)} \max_{x \in \langle a,b \rangle} |f(x) - P_n(x)|}.$$

Poznámka:

Při volbě ekvidistantních uzlů byla úloha špatně podmíněná.

Při vhodné volbě uzlů (kořeny tzv. **Čebyševových polynomů** - viz dále ♡) má interpolační proces pro $n \to \infty$ tu vlastnost, že interpolační polynomy **konvergují** na $\langle a,b \rangle$ **stejnoměrně** k aproximované funkci např. v případě, když existuje spojitá první derivace $f'$ na $\langle a,b \rangle$.

**Stejnoměrná konvergence** funkce $f_n$ definované na $\langle a,b \rangle$

- varianta 1: posloupnost $\{f_n\}$ je na $\langle a,b \rangle$ stejnoměrně konvergentní

  $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: stejné $\forall x \in \langle a,b \rangle$ tak, že

$$\forall n > n_0 \text{ a } \forall x \in \langle a,b \rangle : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

- varianta 2: posloupnost $\{f_n\}$ je na $\langle a,b \rangle$ stejnoměrně konvergentní

  $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{x \in \langle a,b \rangle} |f_n(x) - f(x)| = 0$

## Čebyševovy polynomy

$$\boxed{\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_{n+1} &= 2\,x\,T_n(x) - T_{n-1}(x) \qquad \spadesuit \end{aligned}}$$

Užijeme-li substituci $x = \cos\alpha$, $\alpha = \arccos x$ a goniometrické vzorce, dostaneme

$$\boxed{T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad x \in \langle -1, 1 \rangle \qquad \clubsuit}$$

Důkaz:

$$T_0(x) = \cos(0 \arccos x) = 1 \quad \checkmark$$

$$T_1(x) = \cos(1 \arccos x) = x \quad \checkmark$$

$$T_n = \cos(n \arccos x) \quad \dots \quad \text{dosadíme do vztahu } \spadesuit$$

$$\cos(\underbrace{(n+1)\arccos x}_{\alpha}) = 2x\cos(n\arccos x) - \cos(\underbrace{(n-1)\arccos x}_{\beta})$$

Platí:

$$\boxed{\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \quad \checkmark$$

---

Kořeny polynomů jsou

$$\cos(n \arccos x) = 0$$

$$n \arccos x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

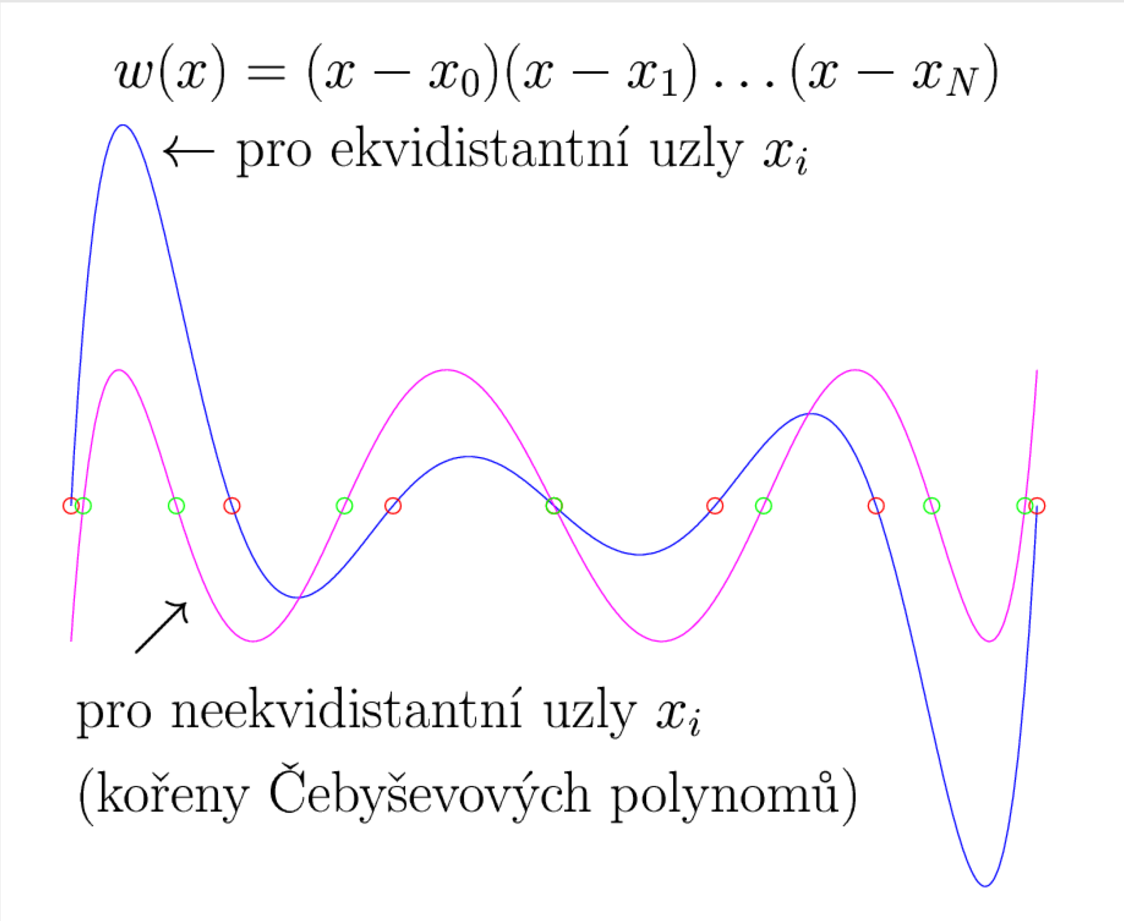
TRIAL


$$\arccos x_k = \frac{2k+1}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{n} \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1} \qquad \heartsuit$$

Poznámka: Pro obecný interval $\langle a, b\rangle$ použijeme transformaci

$$r_k = \frac{b-a}{2} x_k + \frac{a+b}{2}.$$




**Příklad**

Uvažujme funkci $f(x) = \ln(x+1)$ zadanou na intervalu $\langle 0, 5\rangle$.

Pro zvolený počet $n$ uzlových bodů proveďte interpolaci zadané funkce pro uzlové body, které jsou

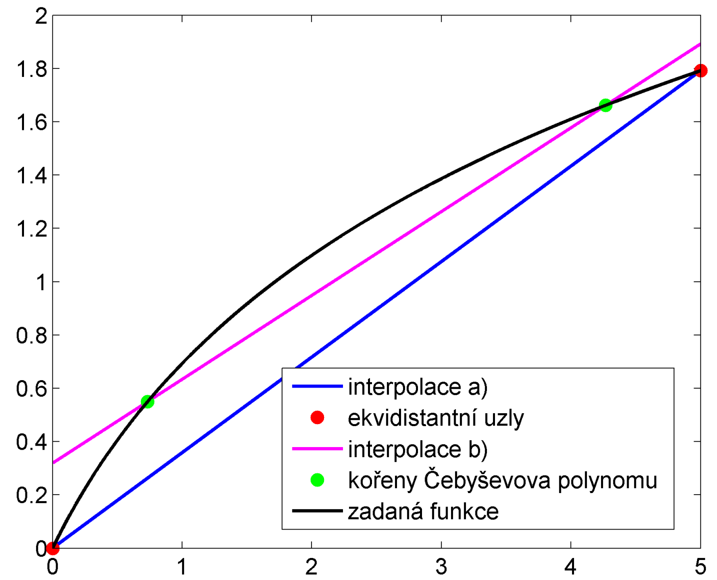
a) ekvidistantní,

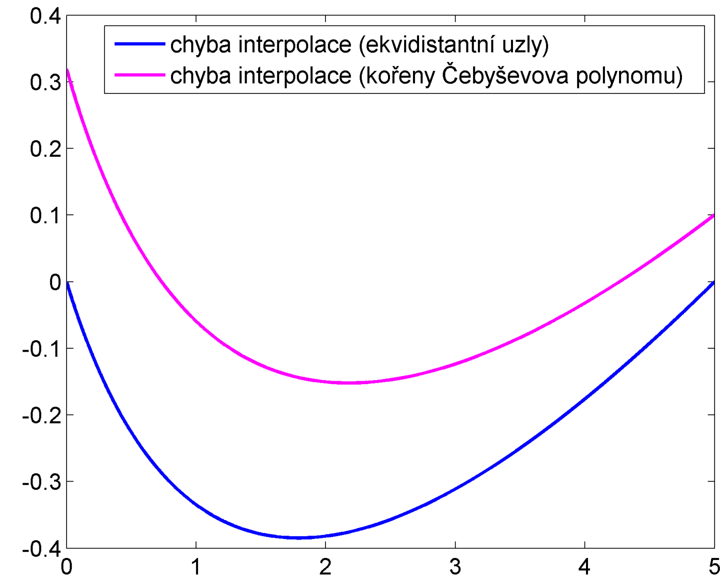
b) kořeny Čebyševových polynomů.

Porovnejte chybu získaných interpolačních polynomů.

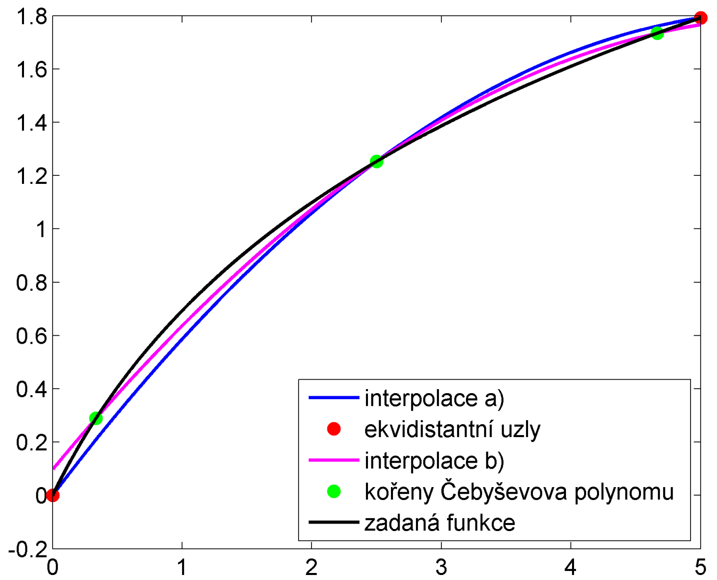
---

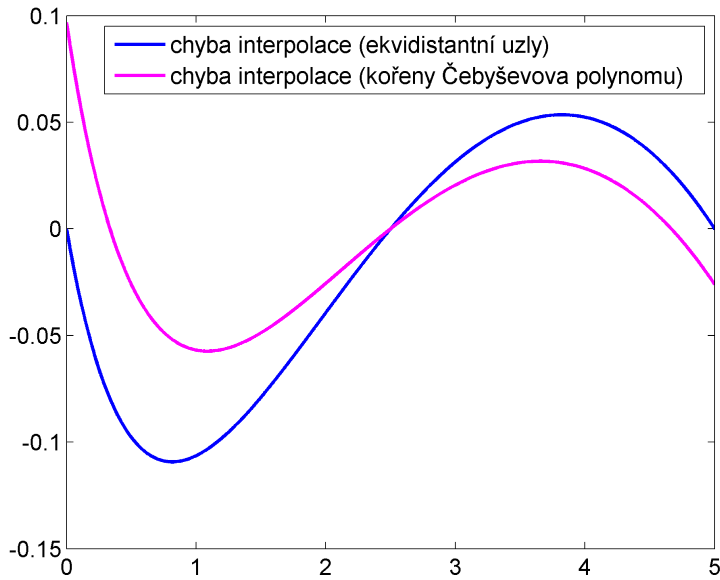
1) $n = 2$


interpolace a)
ekvidistantní uzly
interpolace b)
kořeny Čebyševova polynomu
zadaná funkce

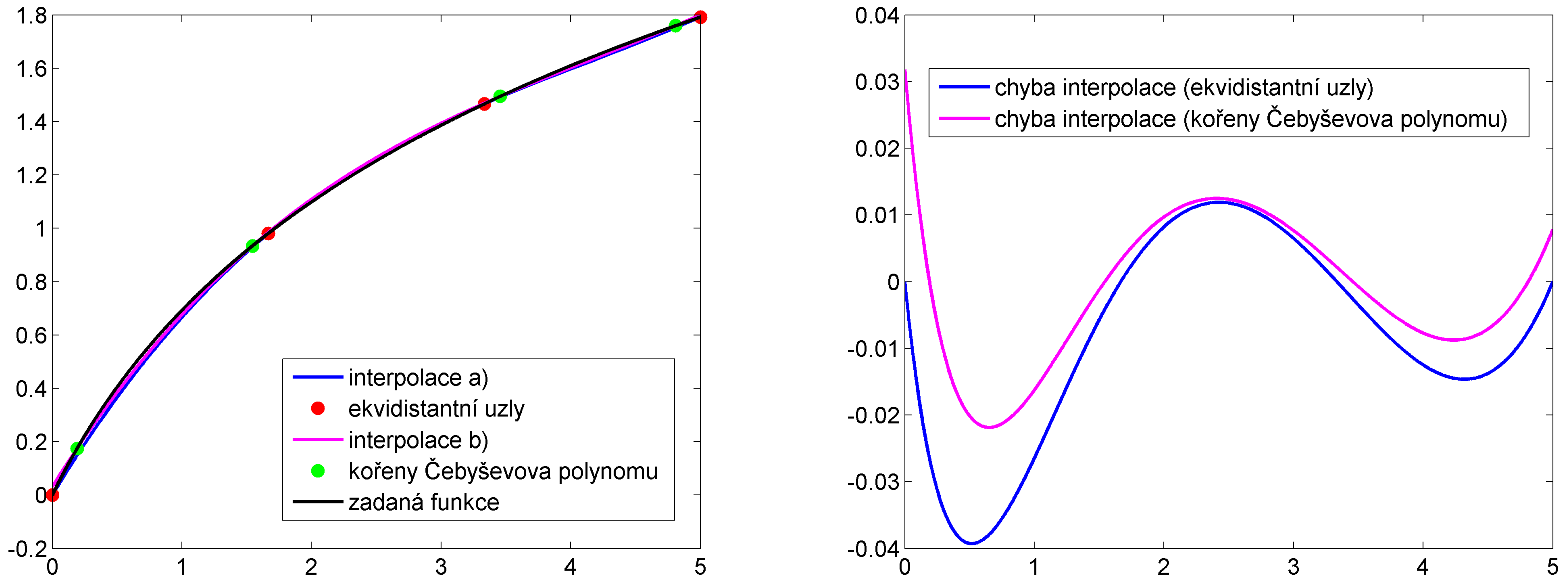

chyba interpolace (ekvidistantní uzly)
chyba interpolace (kořeny Čebyševova polynomu)

2) $n = 3$

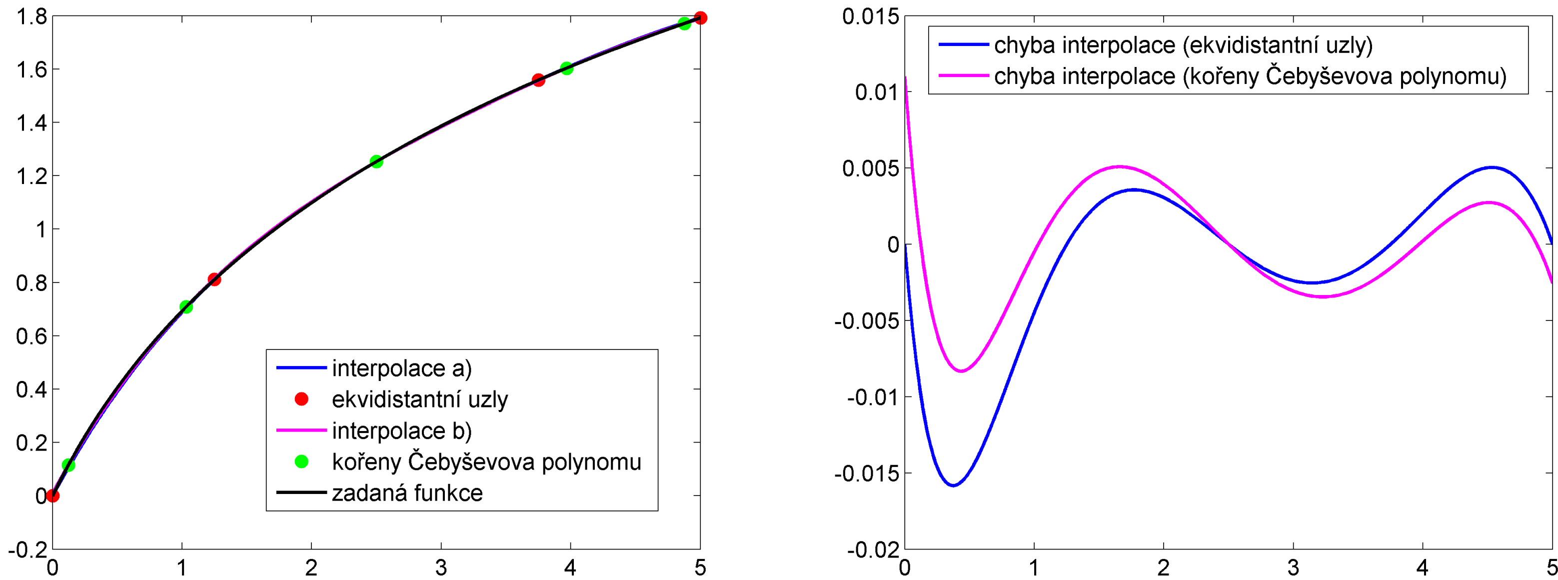

interpolace a)
ekvidistantní uzly
interpolace b)
kořeny Čebyševova polynomu
zadaná funkce


chyba interpolace (ekvidistantní uzly)
chyba interpolace (kořeny Čebyševova polynomu)

3) $n = 4$


interpolace a)
ekvidistantní uzly
interpolace b)
kořeny Čebyševova polynomu
zadaná funkce
chyba interpolace (ekvidistantní uzly)
chyba interpolace (kořeny Čebyševova polynomu)

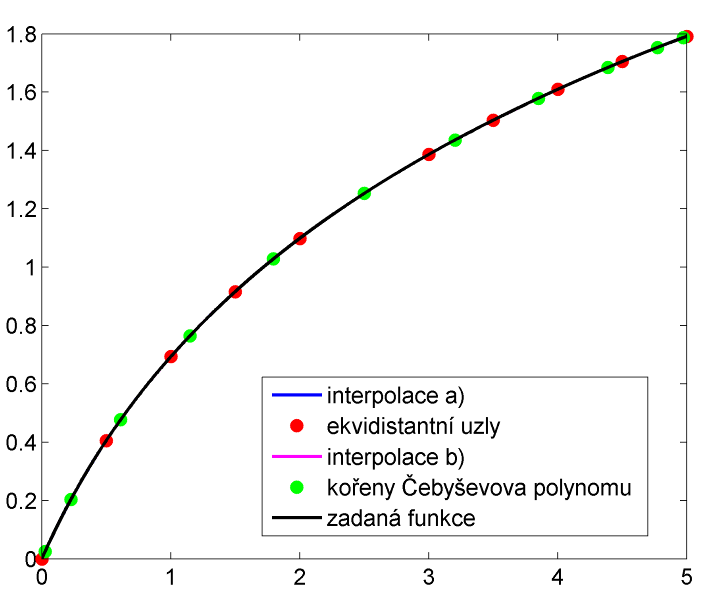
4) $n = 5$

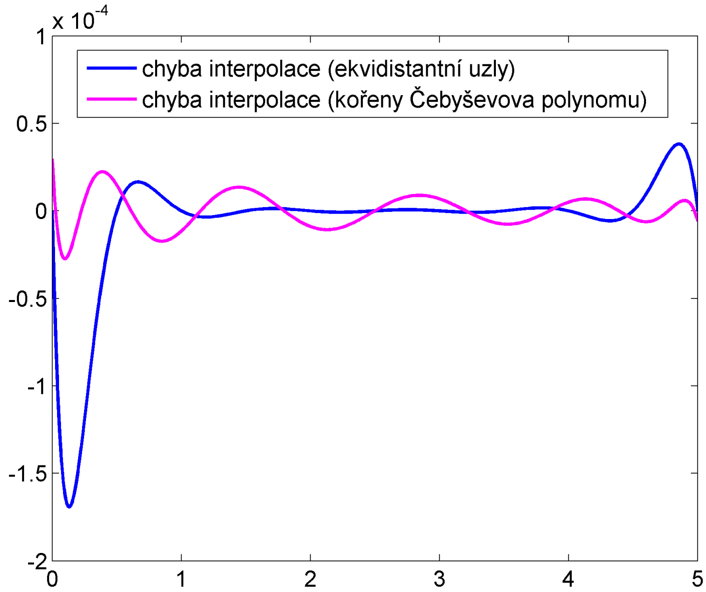

interpolace a)
ekvidistantní uzly
interpolace b)
kořeny Čebyševova polynomu
zadaná funkce
chyba interpolace (ekvidistantní uzly)
chyba interpolace (kořeny Čebyševova polynomu)

5) $n = 11$

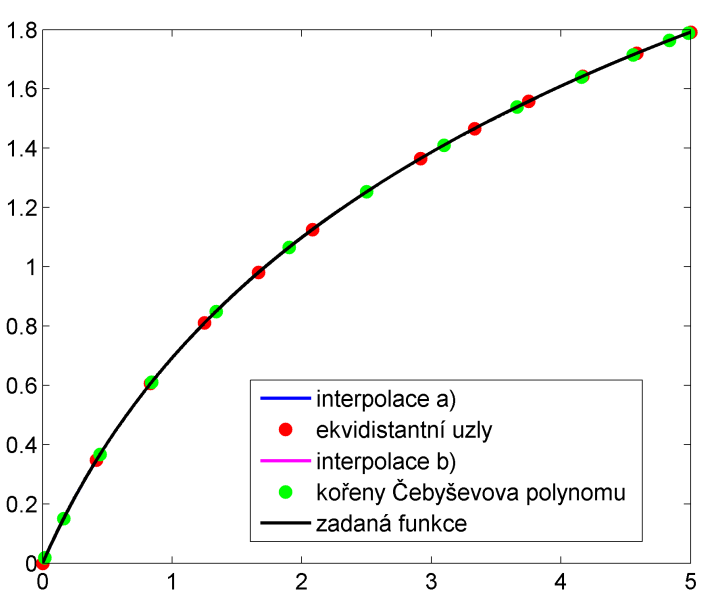
TRIAL

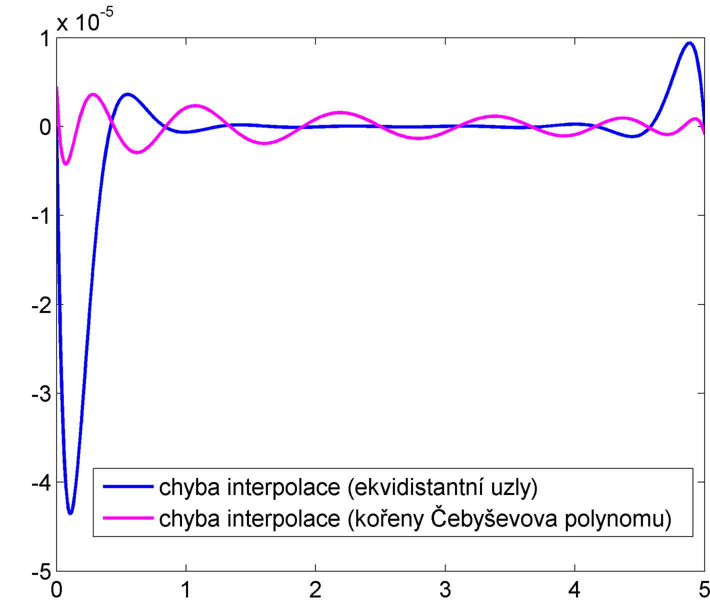




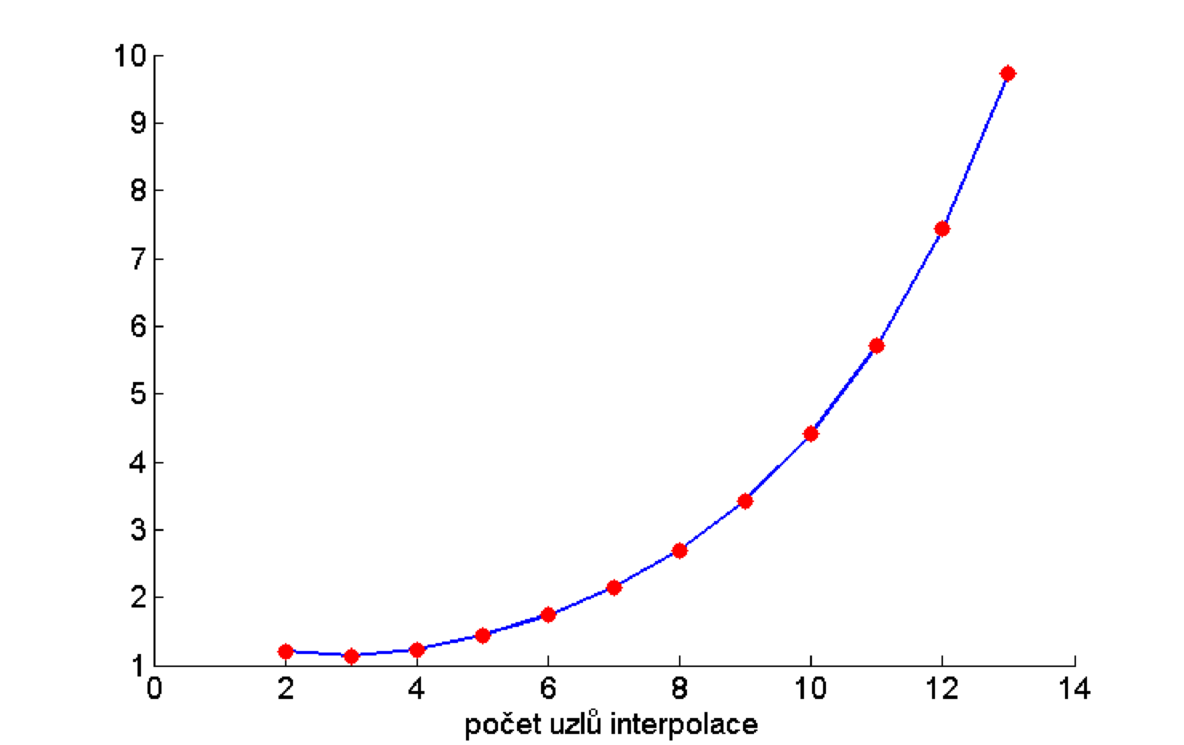




6) $n = 13$



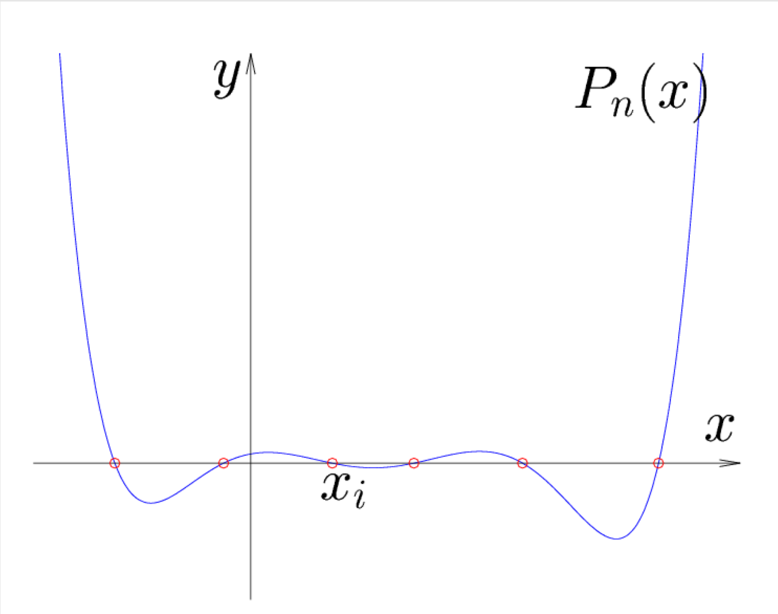




Následující obrázek ukazuje poměr maximové normy chyby interpolačního polynomu vypočteného pro hodnoty v ekvidistantních uzlech ku maximové normě chyby interpolačního polynomu vypočteného pro hodnoty v uzlech určených jakožto kořeny Čebyševových polynomů.



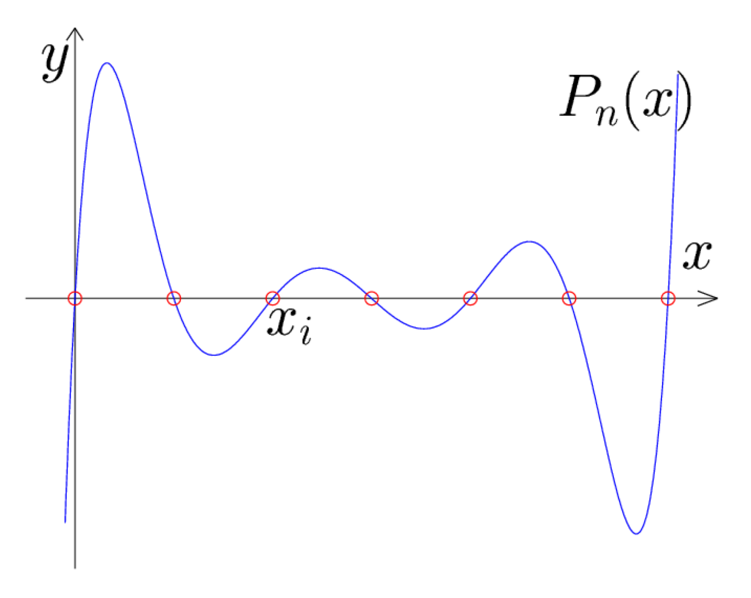

Poznámka:

Interpolační polynomy vyšších řádů není vhodné užívat pro aproximaci hodnot funkce mimo interval obsahující uzly interpolace (tzv. extrapolaci), protože absolutní hodnota polynomu nabývá velkých hodnot.



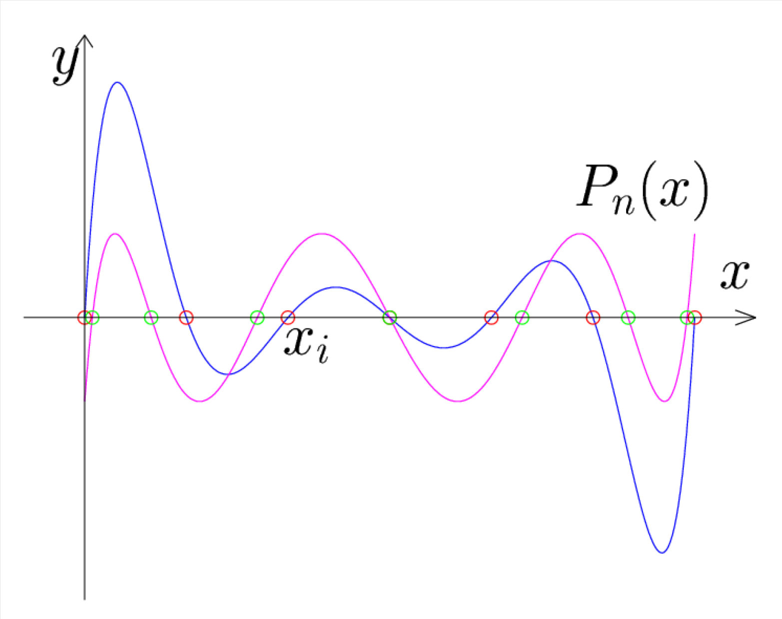

Poznámka:

Není obecně vhodné interpolovat polynomem funkci, která je dána velkým počtem svých hodnot. Stupeň interpolačního polynomu by potom byl velký.




Poznámka:

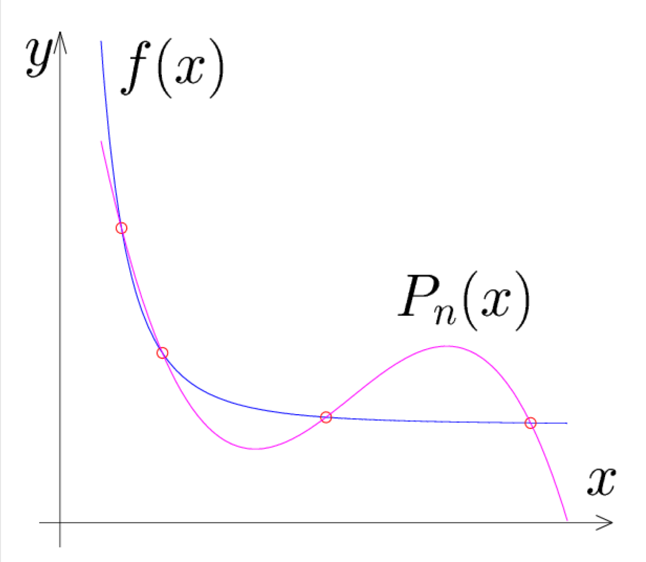
Použijeme-li vhodně zvolené neekvidistantní uzly, můžeme amplitudy chyby minimalizovat. (Vhodnou volbou jsou uzly zvolené jako kořeny tzv. Čebyševových polynomů.)




Poznámka:

Interpolace polynomem není obecně vhodná např. pro funkce, které mají asymptotu.

TRIAL




Pokud chceme aproximovat funkci, která má asymptotu, je vhodné místo lineární aproximace (polynomiální) použít nelineární aproximaci

$$\boxed{R_{M,N}(x) = \frac{P_M(x)}{Q_N(x)} = \frac{p_0 + p_1x + \cdots + p_Mx^M}{1 + q_1x + \cdots + q_Nx^N}}$$

Poznámka:

Pokud máme další informace např. o derivaci dané funkce v uzlových bodech, můžeme použít tzv. **Hermitovu interpolaci**.

Poznámka:

Všimněme si, že v konstrukci interpolačního polynomu nezáleží na pořadí zadaných tabulkových bodů.

V řadě případů potřebujeme kromě $a_i$ vypočítat hodnotu polynomu v daném bodě $\alpha$, tj.

$$N_n(\alpha) = a_0 + a_1(\alpha - x_0) + a_2(\alpha - x_0)(\alpha - x_1) + \cdots + a_n(\alpha - x_0)(\alpha - x_1)\dots(\alpha - x_{n-1}).$$

Při vhodném uzávorkování můžeme výpočet zefektivnit (zmenšíme počet operací sčítání a násobení):

$$N_n(\alpha) = a_0 + (\alpha - x_0)\Big[a_1 + (\alpha - x_1)\big[a_2 + (\alpha - x_2)[a_3 + \dots [a_n]]\big]\Big].$$

Tento postup můžeme samozřejmě použít jen tehdy, když už známe koeficienty $a_i$.

Chceme-li vypočítat pouze hodnotu polynomu $N_n(\alpha)$ v bodě $\alpha$ za co nejmenšího počtu operací a nepotřebujeme-li koeficienty $a_i$, použijeme tzv. **Nevilleův algoritmus**.

Princip je podobný jako v algoritmu pro určení koeficientů Newtonova polynomu.

Nevilleův algoritmus

1. $P_{i,0} = f(x_i), \qquad i = 0, 1, \dots, n$
2. $P_{i,k} = P_{i,k-1} + (\alpha - x_i)\,\dfrac{P_{i,k-1} - P_{i-1,k-1}}{x_i - x_{i-k}};$

TRIAL



3. $N_n(\alpha) = P_{nn}$

Princip Nevilleova algoritmu je ukázán v následujícím příkladu.

**Příklad** Vypočtěte $f(3.5)$, kde funkce $f(x)$ je dána tabulkou:

| $x_i$ | 1 | 2 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | 1 | 8 | 64 | 125 |

Řešení:

Uzly $x_i$ je výhodné uspořádat podle rostoucí vzdálenosti od bodu $\alpha$, v němž chceme stanovit přibližnou hodnotu funce $f(x)$. Podle rozdílu hodnot $P_{i,i}$ a $P_{i-1,i-1}$ $(i = 1, \ldots, n)$ lze rozhodnout o předčasném ukončení Nevilleova algoritmu, popř. o vhodnosti interpolace pomocí $N_n(x)$.

| $\alpha - x_i$ | $x_i$ | $f(x_i)$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| -0,5 | 4 | **64** | | | |
| 1,5 | 2 | 8 | 8+1,5 $\dfrac{8-64}{2-4}$ $=$ **50** | | |
| -1,5 | 5 | 125 | 125–1,5 $\dfrac{125-8}{5-2}$ $=$ 66,5 | 66,5–1,5 $\dfrac{66,5-50}{5-4}$ $=$ **41,75** | |
| 2,5 | 1 | 1 | 1+2,5 $\dfrac{1-125}{1-5}$ $=$ 78,5 | 78,5+2,5 $\dfrac{78,5-66,5}{1-2}$ $=$ 48,5 | 48,5+2,5 $\dfrac{48,5-78,5}{1-4}$ $=$ **42,875** |

Z následujících obrázků je patrný význam hodnot, které dostáváme na diagonále.

Poznámka:

Vyjděme z předpokladu, že máme přibližně interpolovat hodnotu tabulkou dané funkce v libovolném bodě. Pokud nutně netrváme na tom, že v tomto bodě chceme přesně určit hodnotu interpolačního polynomu procházejícími všemi tabulkovými body, přistupujeme k Nevilleovu algoritmu iteračně, tj. pokud bude rozdíl po sobě jdoucích diagonálních prvků dostatečně malý, ukončíme výpočet.

V tomto případě je ovšem rozumné seřadit uzlové body podle rostoucí vzdálenosti od zadaného bodu, ve kterém interpolujeme hodnotu funkce.

V následujích příkladech jsou demonstrovány výsledky pro stejné zadání, ovšem při použití různých seřazení uzlových bodů:

1) od nejbližšího po nejvzdálenější,
2) od nejvzdálenějšího po nejbližší.

**Příklad 1** Interpolujte hodnotu zadané funkce $f$ v bodě $\alpha = 3{,}6$.

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | -5 | 14 | 19 | 16 | 12 | 14 | 35 |

Výsledky Nevilleova algoritmu, když uvažujeme uzly seřazené podle vzdálenosti od $\alpha$ **vzestupně**:

*výsledky získané v MATLABu*

```
   x(k)    |   f(k)    |   Aproximace f(alfa)
=====================================================
   4.0000 |  16.0000
   3.0000 |  19.0000 |  17.2000
   5.0000 |  12.0000 |  16.9000 |  17.3200
   2.0000 |  14.0000 |  12.9333 |  19.2800 |  17.7120
   6.0000 |  14.0000 |  14.0000 |  11.4400 |  17.7120 |  17.7120
   1.0000 |  -5.0000 |   4.8800 |  28.5920 |  17.4432 |  17.7926 |  17.7228
   7.0000 |  35.0000 |  12.3333 | -13.0080 |  15.2800 |  18.9574 |  17.9674 |  17.6901
```

**Příklad 2** Interpolujte hodnotu zadané funkce $f$ v bodě $\alpha = 3{,}6$.

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | -5 | 14 | 19 | 16 | 12 | 14 | 35 |

Výsledky Nevilleova algoritmu, když uvažujeme uzly seřazené podle vzdálenosti od $\alpha$ **sestupně**:

*výsledky získané v MATLABu*

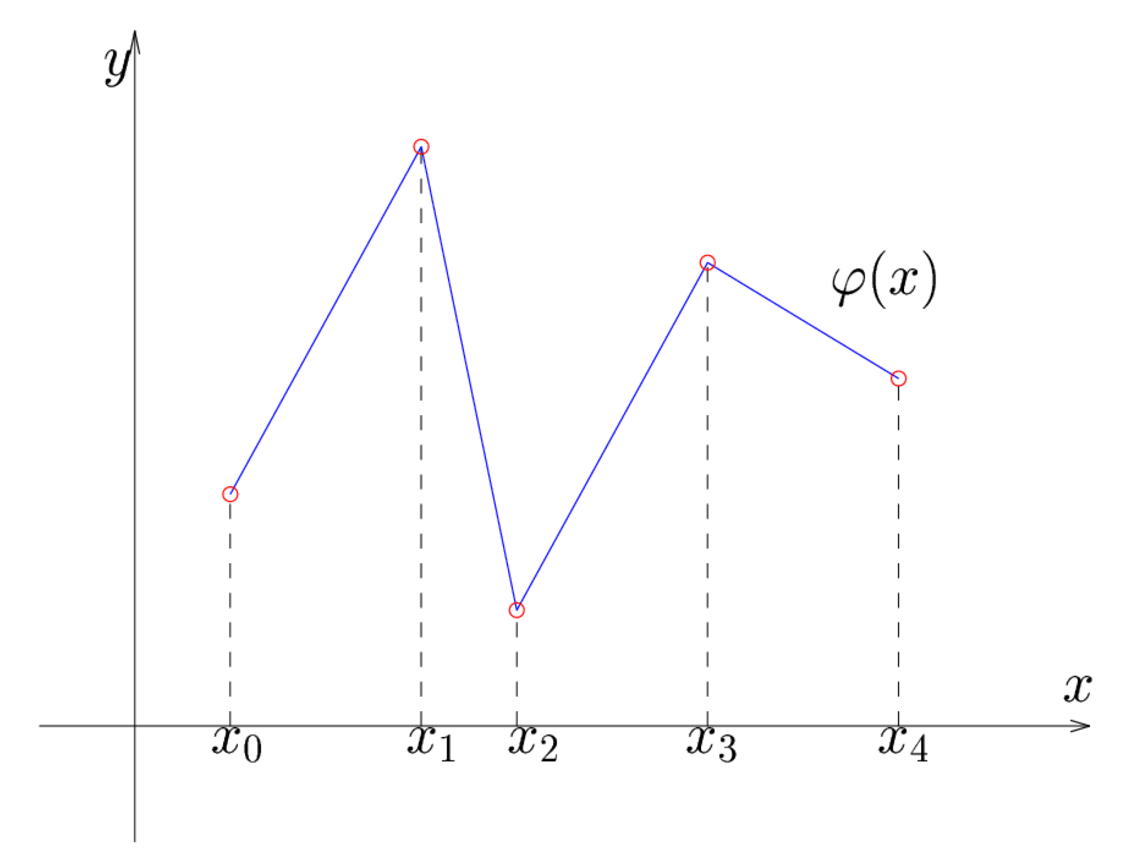
```
   x(k)    |   f(k)    |   Aproximace f(alfa)
=====================================================
   7.0000 |  35.0000
   1.0000 |  -5.0000 |  12.3333
   6.0000 |  14.0000 |   4.8800 | -13.0080
   2.0000 |  14.0000 |  14.0000 |  28.5920 |  15.2800
   5.0000 |  12.0000 |  12.9333 |  11.4400 |  17.4432 |  18.9574
   3.0000 |  19.0000 |  16.9000 |  19.2800 |  17.7120 |  17.7926 |  17.9674
   4.0000 |  16.0000 |  17.2000 |  17.3200 |  17.7120 |  17.7120 |  17.7228 |  17.6901
```

Poznámka

Jak se dá interpretovat libovolná (tj. i nediagonální) hodnota v trojúhelníkové matici, kterou získáváme Nevilleovým algoritmem?

## Interpolace spline funkcemi

Nejjednodušší spline funkcí je tzv. **lineární spline funkce**; jde vlastně o lomenou čáru spojující zadané interpolované body.




Máme dánu funkci $f$ tabulkou hodnot $\{x_i, f_i\}$ $i = 0, 1, \ldots, n$.

Funkci $s(x)$ definovanou na intervalu $\langle x_0, x_n \rangle$ nazýváme **lineární spline interpolací** funkce $f(x)$, má-li následující vlastnosti:

**(i)** na každém intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ je polynom prvního stupně, tj.

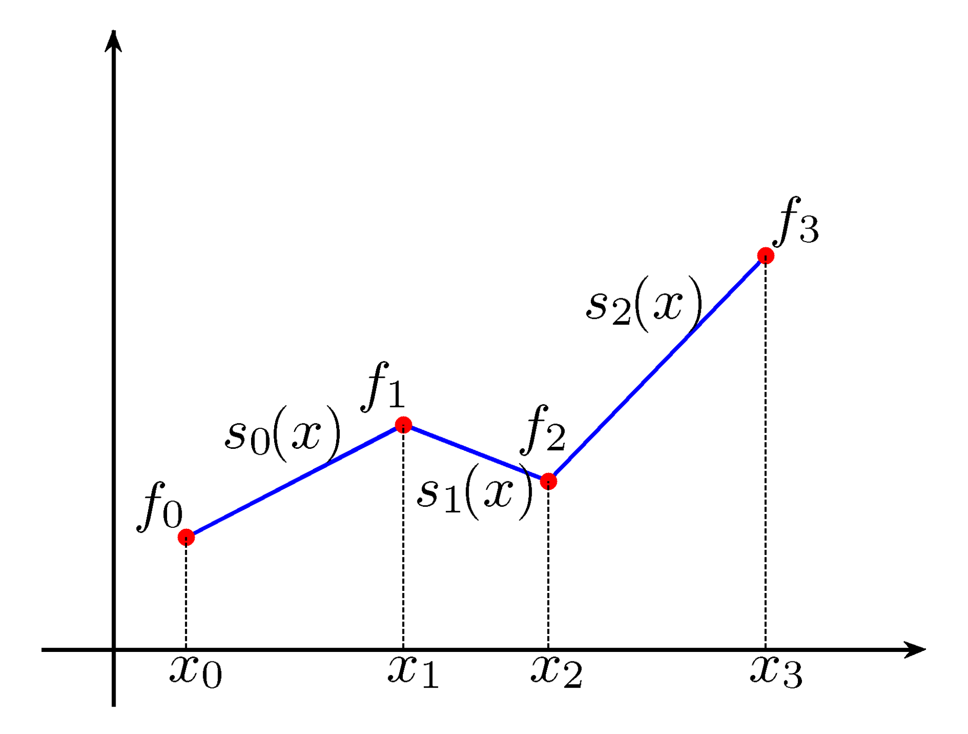
$$s(x) = s_i(x),\ x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle, \text{ kde } \boxed{s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i)}$$

**(ii)** splňuje interpolační podmínky $s(x_i) = f(x_i)$, tj.

$$\boxed{\begin{array}{l} s_i(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1 \\ s_{n-1}(x_n) = f_n \end{array}}$$

**(iii)** je spojitá na $\langle x_0, x_n \rangle$, tj. i v uzlech $x_i$

$$\boxed{s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1}), \quad i = 0, 1, \ldots, n-2}$$




Poznámka: Těmito požadavky je funkce $s(x)$ určena jednoznačně.

**(i)** ... hledáme $2n$ koeficientů $a_i$ a $b_i$

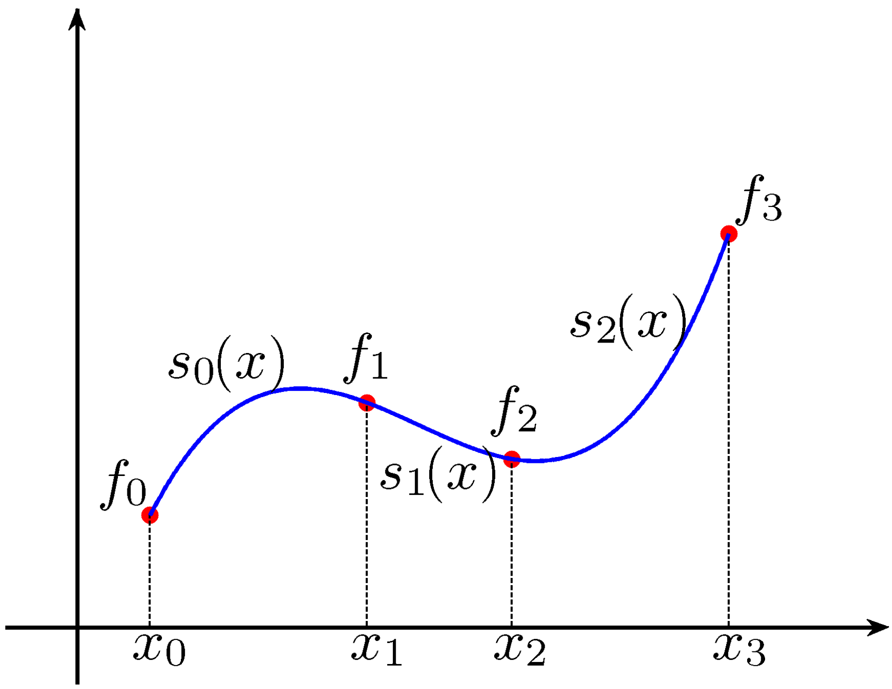
**(ii)** představuje $(n+1)$ podmínek

**(iii)** představuje $(n-1)$ podmínek

Platí: $\boxed{s_i(x) = f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i}(x - x_i), \quad h_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1}$

Pokud bychom chtěli, aby byla aproximace spline funkcí hladká, musíme použít polynomy vyššího stupně než 1.

Nejvíce používanou je tzv. **kubická spline interpolace**, která používá polynomy 3 stupně.




Poznamenejme zde, že ostatní volby stupně polynomů nepřináší lepší výsledky a výpočty jsou v případě vyšších stupňů složitější.

### Kubická spline interpolace

Funkce $f$ je dána tabulkou $\{x_i, f_i\}$, $i = 0, 1, \ldots, n$

Funkci $s(x)$ definovanou na intervalu $\langle x_0, x_n\rangle$ nazýváme **kubickou spline interpolací** funkce $f$, má-li následující vlastnosti:

**(i)** je na každém intervalu $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ polynomem 3. stupně ve tvaru

$$\boxed{s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3}$$

**(ii)** splňuje interpolační podmínky $s(x_i) = f(x_i)$, tj.

$$\boxed{\begin{aligned} &s_i(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1 \\ &s_{n-1}(x_n) = f_n \end{aligned}}$$

**(iii)** je spojitá na $\langle x_0, x_n\rangle$, tj. v uzlech $x_i$ platí

$$\boxed{s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1}), \quad i = 0, 1, \ldots, n-2}$$

**(iv)** má spojitou první derivaci na $\langle x_0, x_n\rangle$

$$\boxed{s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1}), \quad i = 0, 1, \ldots, n-2}$$

**(v)** má spojitou druhou derivaci na $\langle x_0, x_n\rangle$

$$\boxed{s_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}''(x_{i+1}), \quad i = 0, 1, \ldots, n-2}$$

TRIAL

Funkce $s(x)$ není podmínkami (ii) – (v) určena jednoznačně:

| | | |
|---|---|---|
| (ii) | ... | $(n+1)$ podmínek |
| (iii) | ... | $(n-1)$ podmínek |
| (iv) | ... | $(n-1)$ podmínek |
| (v) | ... | $(n-1)$ podmínek |
| celkem | ... | $4n-2$ podmínek; (počet koeficientů je ale $4n$) |

2 podmínky je nutno dodat:

$(A)$ přirozené podmínky

$$\boxed{s''(x_0) = s''(x_n) = 0}$$

$(B)$ podmínky periodicity (s periodou $T = x_n - x_0$)

$$s(x_0) = s(x_n) \quad \ldots \text{ splněna automaticky } (f_0 = f_n)$$

$$\boxed{s'(x_0) = s'(x_n), \quad s''(x_0) = s''(x_n)}$$

$(C)$ podmínky tečen

$$\boxed{s'(x_0) = y'_0, \quad s'(x_n) = y'_n}, \quad \text{kde } y'_0, y'_n \text{ jsou daná čísla}$$

$(D)$ viz MATLAB

---

Konstrukce kubické spline funkce

Funkci $s(x)$ lze psát ve tvaru

$$\boxed{s(x) = \eta_0 s_0(x) + \eta_1 s_1(x) + \cdots + \eta_{n-1} s_{n-1}(x)}$$

kde $\eta_i = \eta_i(x)$ jsou charakteristické funkce intervalu, tj.

$$\eta_i = 1 \text{ na } \langle x_i, x_{i+1}), \quad \eta_{n-1} = 1 \text{ na } \langle x_{n-1}, x_n\rangle$$

$$\eta_i = 0 \text{ jinde}$$

Snadno lze odvodit:

$$\boxed{s(x_i) = a_i, \quad s'(x_i) = b_i, \quad s''(x_i) = c_i, \quad s'''(x_i+) = d_i, \quad s'''(x_i-) = d_{i-1}}$$

Pomocí těchto vztahů přepíšeme podmínky (ii) až (v) (označíme $h_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1$)

**(ii)** interpolační podmínky

$$f_i = a_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

$$f_n = a_{n-1} + b_{n-1} h_{n-1} + \frac{c_{n-1}}{2} h_{n-1}^2 + \frac{d_{n-1}}{6} h_{n-1}^3$$

**(iii)** spojitost

$$f_{i+1} = a_i + b_i h_i + \frac{c_i}{2} h_i^2 + \frac{d_i}{6} h_i^3, \quad i = 0, 1, \ldots, n-2$$

$$\left[s_{i+1}(x_{i+1}) = s_i(x_{i+1})\right]$$

**(iv)** spojitost derivace

$$b_i + c_i h_i + \frac{d_i}{2} h_i^2 = b_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-2$$

$$\left[s'_i(x_{i+1}) = s'_{i+1}(x_{i+1})\right]$$

TRIAL



(v) spojitost 2. derivace

$$c_i + d_i h_i = c_{i+1}, \quad = 0, 1, \ldots, n-2$$

$$\left[ s_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}''(x_{i+1}) \right]$$

Z těchto podmínek lze sestavit soustavu lineárních algebraických rovnic pro neznámé $c_0, \ldots, c_n$ a jejich prostřednictvím vypočítat $b_0, \ldots, b_n$ a $d_0, \ldots, d_n$. Po úpravách dostaneme:

$$\boxed{\alpha_k c_{k-1} + 2c_k + \beta_k c_{k+1} = g_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1}$$

kde

$$\boxed{\begin{aligned} \beta_k &= \frac{h_k}{h_k + h_{k-1}} \\ \alpha_k &= 1 - \beta_k \\ g_k &= \frac{6}{h_k + h_{k-1}} \left[ \frac{f_{k+1} - f_k}{h_k} - \frac{f_k - f_{k-1}}{h_{k-1}} \right] \end{aligned}}$$

Vztahy představují soustavu $n-1$ rovnic pro $n+1$ neznámých. Pro jednoznačnost je třeba přidat jednu z podmínek $(A), (B), (C)$. Soustava bude mít tvar:

$$\begin{bmatrix} 2 & \beta_0 & & & & & \\ \alpha_1 & 2 & \beta_1 & & & & \\ & \alpha_2 & 2 & \beta_2 & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \alpha_{n-1} & 2 & \beta_{n-1} \\ & & & & & \alpha_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \\ \\ \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \\ \\ \\ g_n \end{bmatrix} \qquad (*)$$

$(*)$ ... první a poslední řádek soustavy představuje podmínka $(A)$ nebo $(B)$,
... použití podmínky $(C)$ znamená vyškrtnout 1. a poslední řádek a sloupec

Poznámka:

Matice soustavy je třídiagonální a ostře diagonálně dominantní $(\alpha_k + \beta_k = 1)$. $\Rightarrow$ je regulární $\Rightarrow \exists!$ řešení.
Soustavu řešíme GEM pro třídiagonální matice.

## Odvození třídiagonální matice pro výpočet koeficientů $c_i$

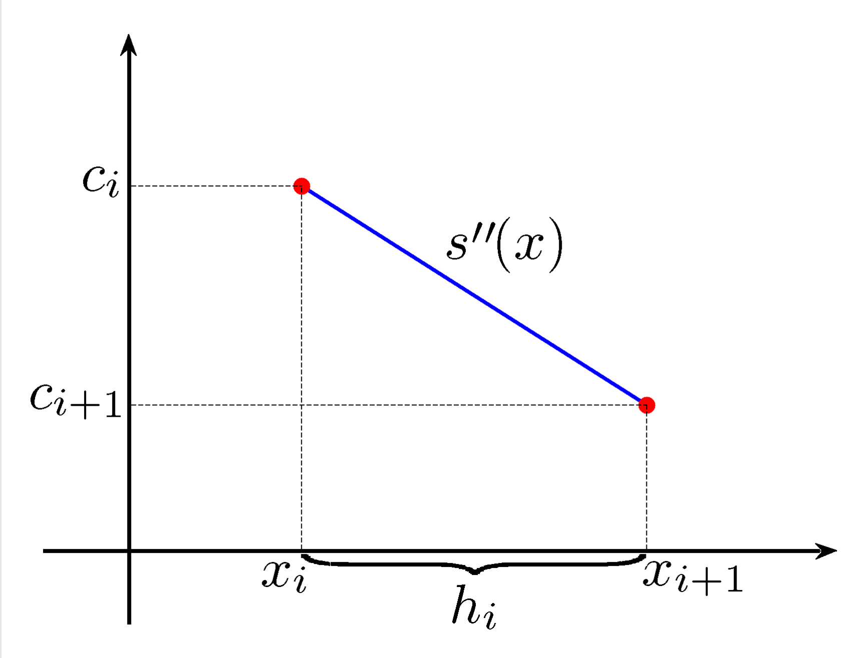
Druhá derivace $\boxed{s_i''(x) = c_i + d_i(x - x_i)}$ je lineární funkcí, tj. známe-li $s''(x_i) = c_i$, pak na $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ můžeme psát

$$\boxed{s_i''(x) = c_i \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + c_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i}}. \qquad \circledast$$

(Ověření: $s_i''(x_i) = c_i$, $s_i''(x_{i+1}) = c_{i+1}$, $s_i''(x)$ je lineární.)

TRIAL






Integrací ⊛ dostaneme

$$\boxed{s_i'(x) = -c_i\frac{(x_{i+1}-x)^2}{2h_i} + c_{i+1}\frac{(x-x_i)^2}{2h_i} + A_i} \qquad ⊛⊛$$

$$s_i(x) = c_i\frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_i} + c_{i+1}\frac{(x-x_i)^3}{6h_i} + A_i(x-x_i) + B_i$$

Z interpolačních podmínek plyne ($s(x_i) = f_i$):

$$\boxed{B_i = f_i - \frac{c_i h_i^2}{6}}$$

Pro $x = x_{i+1}$

$$f_{i+1} = c_{i+1}\frac{h_i^2}{6} + A_i h_i + \underbrace{f_i - \frac{c_i h_i^2}{6}}_{B_i}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A_i = \frac{f_{i+1}-f_i}{h_i} - \frac{(c_{i+1}-c_i)h_i}{6}} \qquad ⊛⊛⊛$$

Ze spojitosti první derivace $\boxed{s_i'(x_{i+1}^-) = s_{i+1}'(x_{i+1}^+),\ i = 0,1,\dots,n-2}$ s užitím ⊛⊛ a ⊛⊛⊛ plyne

$$\overbrace{c_{i+1}\frac{h_i}{2} + \underbrace{\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i} - \frac{(c_{i+1}-c_i)h_i}{6}}_{A_i}}^{s_i'(x_{i+1})} = \underbrace{-c_{i+1}\frac{h_{i+1}^2}{2h_{i+1}} + \underbrace{\frac{f_{i+2}-f_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{(c_{i+2}-c_{i+1})h_{i+1}}{6}}_{A_{i+1}}}_{s_{i+1}'(x_{i+1})}$$

$$c_i\frac{h_i}{6} + c_{i+1}\Big(\underbrace{\frac{h_i}{2} - \frac{h_i}{6}}_{=\frac{h_i}{3}} + \underbrace{\frac{h_{i+1}}{2} - \frac{h_{i+1}}{6}}_{=\frac{h_{i+1}}{3}}\Big) + c_{i+2}\frac{h_{i+1}}{6} = \frac{f_{i+2}-f_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}$$

Vynásobíme $\dfrac{6}{h_i + h_{i+1}}$ a dostaneme

$$\boxed{\underbrace{\frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}}_{=\alpha_i} c_i + 2\, c_{i+1} + \underbrace{\frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}}_{=\beta_i} c_{i+2} = \underbrace{\frac{6}{h_i + h_{i+1}} \left( \frac{f_{i+2} - f_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} \right)}_{=g_i}}$$

## Minimální vlastnost a odhad chyby

Označme $S_1(\langle a, b\rangle)$ množinu funkcí $f$, které splňují podmínky $(ii)$ až $(v)$ a podmínku $(A)$ a jsou navíc na $\langle a, b\rangle$ integrovatelné s kvadrátem. Mezi všemi funkcemi $f \in S_1(\langle a, b\rangle)$ právě **přirozený kubický spline** udílí nejmenší hodnotu integrálu

$$\boxed{J(f) = \int_a^b |f''(x)|^2 \, dx}.$$

$J(f) \ldots$ míra celkové křivosti křivky $y = f(x)$.

## Věta

Nechť funkce $f$ má spojité derivace až do řádu 4 a má omezenou 4. derivaci pro $x \in \langle a, b\rangle$. Nechť dále platí:

$$\frac{h}{h_i} \le K, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1, \quad h = \max_i |x_{i+1} - x_i|$$

Když $s(x)$ je spline interpolace funkce $f$ v bodech $x_i$ a splňuje podmínky $s'(a) = f'(a), s'(b) = f'(b)$, potom pro $x \in \langle a, b\rangle$ platí:

$$|f(x) - s(x)| \le c_1 K h^4$$
$$|f'(x) - s'(x)| \le c_2 K h^3$$
$$|f''(x) - s''(x)| \le c_3 K h^2.$$

## Příklad

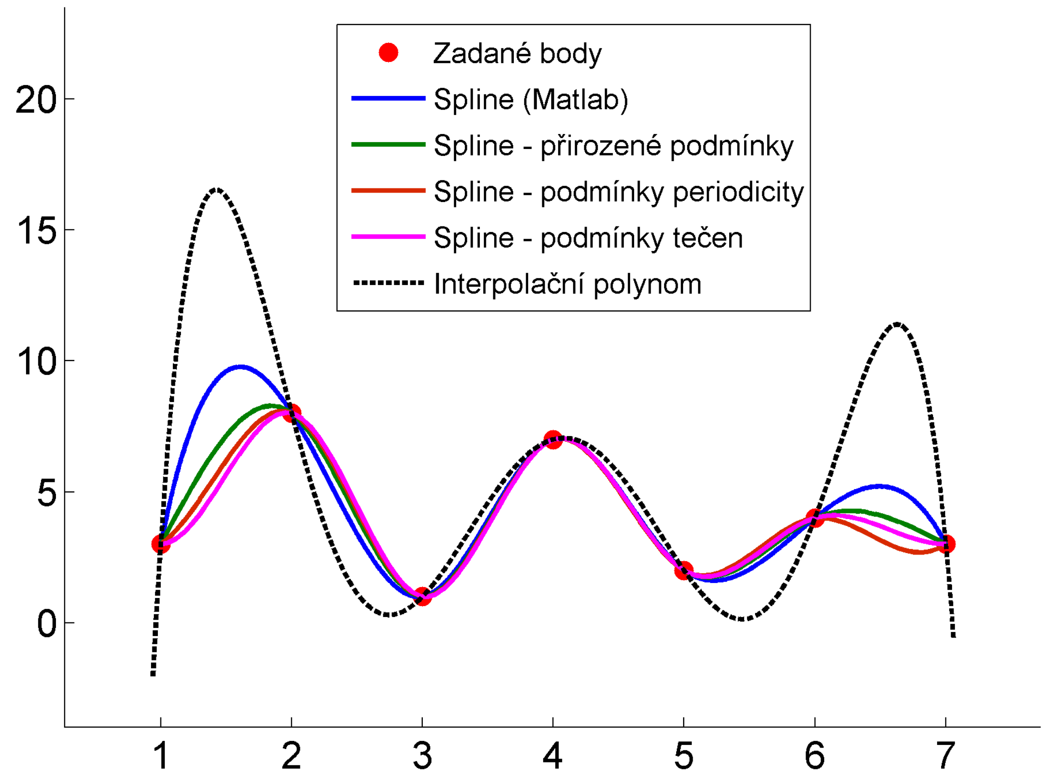
Určete kubický spline pro funkci zadanou tabulkou

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | 3 | 8 | 1 | 7 | 2 | 4 | 3 |

Použijte různé dodatečné podmínky. Pro spline s podmínkami tečen použijte $f'(1) = 0$ a $f'(7) = 0$.

TRIAL




Zadané body
Spline (Matlab)
Spline - přirozené podmínky
Spline - podmínky periodicity
Spline - podmínky tečen
Interpolační polynom
20
15
10
5
0
1
2
3
4
5
6
7