Kapitola 6. Vlastní čísla a vlastní vektory

Výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů

S pojmem **vlastního čísla** jsme se již setkali například u iteračních metod pro řešení soustav lineárních algebraických rovnic. Velikosti vlastních čísel iterační matice rozhodovaly o konvergenci příslušné iterační metody. S úlohou na vlastní čísla se setkáme i v aplikacích při řešení řady technických a fyzikálních problémů.

Definice: Je dána čtvercová matice $\mathbf{A}$ řádu n. Číslo λ, pro které má soustava

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad \text{resp.} \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

nenulové řešení, se nazývá **vlastní číslo** matice $\mathbf{A}$, jemu odpovídající nenulové řešení $\mathbf{v}$ **vlastní vektor** matice $\mathbf{A}$.

Homogenní soustava má nenulové řešení $\Leftrightarrow$ matice soustavy je singulární, tj. její determinant je nulový.

Vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ jsou kořeny **charakteristické rovnice**

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$

Ke každému vlastnímu číslu λ_i existuje alespoň jeden vlastní vektor $\mathbf{v}_i$.

Poznámka: Charakteristický polynom je stupně n $\Rightarrow$ $\exists\, n$ vlastních čísel.

Definice: Matici $\mathbf{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ nazýváme **spektrální maticí** matice $\mathbf{A}$.

Úlohy na nalezení vlastních čísel rozdělíme do dvou skupin:

- **Úplný problém** – úloha najít všechna vlastní čísla
- **Částečný problém** – úloha najít pouze některá vl. čísla (obvykle s největší absolutní hodnotou)

Úlohu na vlastní čísla si připomeneme na příkladu.

Příklad 1

Stanovte taková čísla λ, pro která má homogenní soustava $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ nenulové řešení, dále určete toto řešení, pro matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Řešíme tedy soustavu

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\,\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aby homogenní soustava měla nenulové řešení, musí být determinant soustavy nulový. Hledáme proto taková λ, aby

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = (2-\lambda)^3 - (2-\lambda) = (2-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 1\right] = (2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) = 0.$$

Dostali jsme algebraickou rovnici stupně 3 a pouze pro její kořeny

$$\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = 1$$

bude mít uvažovaná soustava nenulové řešení.

Ke každému vlastnímu číslu λ_i můžeme najít nenulové řešení homogenní soustavy

$$(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})\,\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Např. pro $\lambda_1 = 3$ řešíme soustavu

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Matice soustavy je samozřejmě singulární a proto bude existovat celý systém řešení v závislosti na parametru $r \in \mathbb{R}$. Každý vektor $[0, r, r]^T$ řeší danou soustavu. Ze systému vybereme jednoho zástupce, např. $\mathbf{v}^{(1)} = [0, 1, 1]^T$, a říkáme, že $\mathbf{v}^{(1)}$ je **vlastní vektor** odpovídající vlastnímu číslu λ_1. Podobně bychom nalezli vlastní vektory odpovídající vlastním číslům λ_2 a λ_3.

Poznámka:

Vlastní čísla (horní) trojúhelníkové matice jsou rovna jejím diagonálním prvkům, neboť charakteristický polynom má tvar:

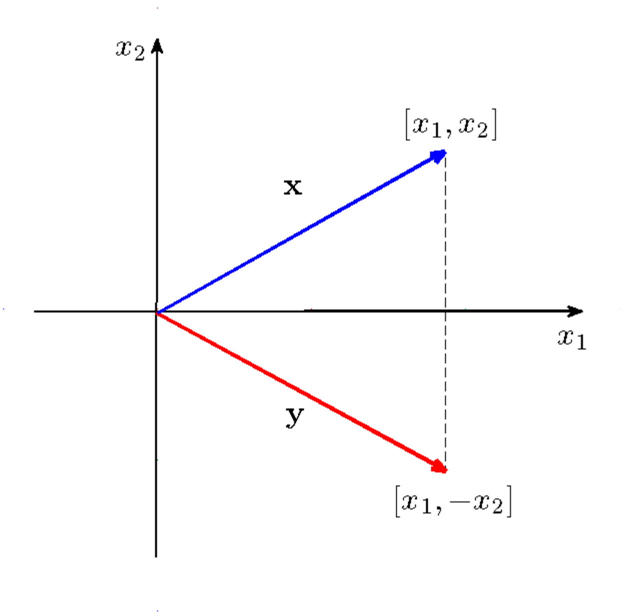
$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\dots(a_{nn}-\lambda).$$

Motivace

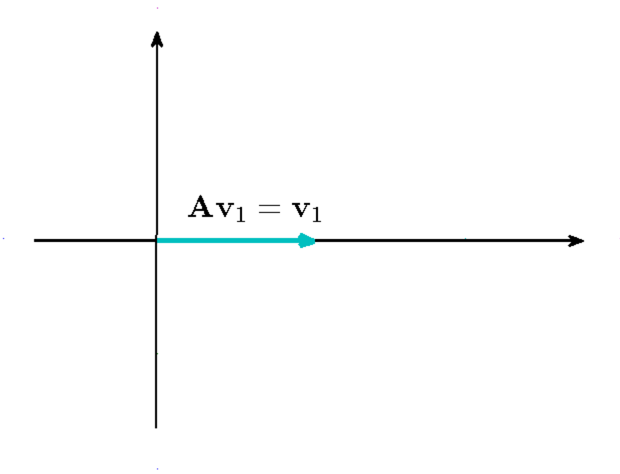
Vlastní vektor je takový vektor, pro který platí, že vynásobíme-li matici $\mathbf{A}$ s tímto vektorem, získáme násobek původního vektoru. Mluvíme o **samodružných prvcích**.

Příklad: Osová souměrnost = zobrazení $\quad \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}.$

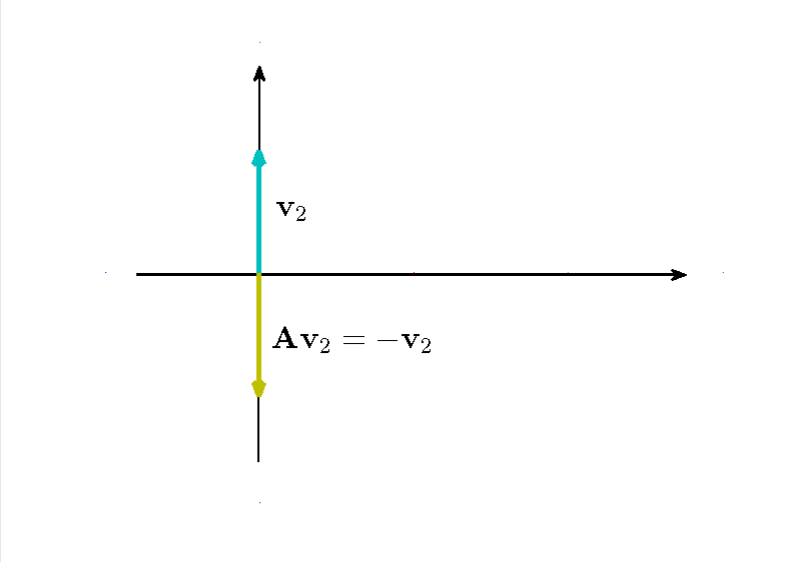
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_1} = \underbrace{1}_{\lambda_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_1}$$



$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_2} = \underbrace{-1}_{\lambda_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_2}$$



Příklad: Určete vlastní čísla a vlastní vektory těchto matic:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right], \quad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right],$$

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right], \quad \mathbf{D} = \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Řešení: Všechny zadané matice mají stejný charakteristický polynom

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = p_{\mathbf{B}}(\lambda) = p_{\mathbf{C}}(\lambda) = p_{\mathbf{D}}(\lambda) = (2-\lambda)^3,$$

Vidíme, že $\lambda = 2$ je trojnásobné vl. číslo všech čtyř matic.

Vlastní vektory:

A: $v^{(1)} = [1,0,0]^T$
$v^{(2)} = [0,1,0]^T$
$v^{(3)} = [0,0,1]^T$

Pozn.: matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ je nulová, tj. systém všech řešení rovnice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = 0$ je lin. kombinací $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$.

B: $v^{(1)} = [1,0,0]^T$
$v^{(3)} = [0,0,1]^T$

Pozn.: $\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

C: $v^{(1)} = [1,0,0]^T$
$v^{(2)} = [0,1,0]^T$

Pozn.: $\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

D: $v^{(1)} = [1,0,0]^T$

Pozn.: $\mathbf{D} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Poznámka: Počet lineárně nezávislých vlastních vektorů může být menší než je řád matice.

Připomeňme si některé poznatky z lineární algebry.

Definice: Říkáme, že matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou podobné, existuje-li regulární matice $\mathbf{P}$ taková, že
$\boxed{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{B}}$, resp. $\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{P}\,\mathbf{B}\,\mathbf{P}^{-1}}$.

Věta Podobné matice mají stejná vlastní čísla.

Věta: Nechť $\mathbf{A}$ je reálná symetrická matice. Potom existuje ortogonální matice $\mathbf{Q}$ taková, že pro spektrální matici platí

$$\boxed{\Lambda = \mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}}.$$

Důkaz:

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\cdot\frac{\det(\mathbf{P})}{\det(\mathbf{P})} = \det(\mathbf{P}^{-1})\cdot\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\cdot\det(\mathbf{P}) = \det\left[\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{P}\right] =$$

$$= \det\left(\underbrace{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}}_{\mathbf{B}} - \lambda\mathbf{I}\right)$$

□

Věta Je-li $\mathbf{v}$ vlastní vektor matice $\mathbf{A}$, potom $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{v}$ je vlastní vektor matice $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$.

Důkaz:

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \\ \mathbf{P}^{-1}\cdot\Big/ \qquad & \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \\ & \mathbf{B}\underbrace{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{v}}_{\mathbf{w}} = \lambda\underbrace{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{v}}_{\mathbf{w}} \end{aligned}$$

□

Poznámka: Pokud jsou vlastní vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ lineárně nezávislé, potom platí:

$$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{\Lambda} \qquad (\mathbf{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \ \ldots \text{ spektrální matice})$$

Matice $\mathbf{A}$ je tedy podobná diagonální matici. Matice $\mathbf{X}$ je matice, jejíž sloupce tvoří vlastní vektory

$$\boxed{\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{X}\mathbf{\Lambda}}$$

$$\mathbf{A}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}\boxed{\mathbf{v}_1} & \boxed{\mathbf{v}_2} & \dots & \boxed{\mathbf{v}_n}\end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix}\boxed{\mathbf{v}_1} & \boxed{\mathbf{v}_2} & \dots & \boxed{\mathbf{v}_n}\end{bmatrix}}_{\mathbf{X}}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}}_{\mathbf{\Lambda}}}_{\begin{bmatrix}\boxed{\lambda_1\mathbf{v}_1} & \boxed{\lambda_2\mathbf{v}_2} & \dots & \boxed{\lambda_n\mathbf{v}_n}\end{bmatrix}}$$

Věta Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n, λ její vlastní číslo a $\mathbf{v}$ její vlastní vektor, tj. $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$. Potom platí:

(i) $k \in \mathbb{N}$ $\quad \lambda(\mathbf{A}^k) = [\lambda(\mathbf{A})]^k$

(ii) $\mathbf{A}$ ... regulární $\quad \Rightarrow \quad \lambda(\mathbf{A}^{-1}) = [\lambda(\mathbf{A})]^{-1}$

(iii) $\lambda(\mathbf{A}^H) = \overline{\lambda(\mathbf{A})}$

(iv) vlastní čísla symetrické (hermitovské) matice jsou reálná

(v) vlastní vektory symetrické matice odpovídající různým vlastním číslům jsou ortogonální

(vi) symetrická pozitivně definitní matice má všechna vlastní čísla kladná

<u>Důkaz:</u>

(i)

$$\mathbf{A}\cdot/ \qquad \mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^2\mathbf{v} = \lambda \underbrace{\mathbf{Av}}_{=\lambda\mathbf{v}} = \lambda^2\mathbf{v}$$

$$\mathbf{A}\cdot/ \quad \mathbf{A}^k\mathbf{v} = \lambda^k\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{k+1}\mathbf{v} = \lambda^k \underbrace{\mathbf{Av}}_{=\lambda\mathbf{v}} = \lambda^{k+1}\mathbf{v}$$

(ii)

$$\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}$$

$$\mathbf{v} = \lambda\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v} \qquad /\cdot\frac{1}{\lambda}$$

$$\frac{1}{\lambda}\mathbf{v} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}$$

(iii) Označme $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$. Platí

$$\det\mathbf{B}^H = \overline{\det\mathbf{B}^T} = \overline{\det\mathbf{B}}$$

$$\det(\mathbf{A}^H - \overline{\lambda}\mathbf{I}) = \overline{\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})} = 0$$

(iv) $\mathbf{A} = \mathbf{A}^H, \quad \mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$

$$\lambda\mathbf{v}^H\mathbf{v} = \mathbf{v}^H(\lambda\mathbf{v}) = \mathbf{v}^H\mathbf{A}\mathbf{v} = \underbrace{\mathbf{v}^H\mathbf{A}^H\mathbf{v}}_{\text{číslo}} = \overline{(\mathbf{v}^H\mathbf{A}^H\mathbf{v})^H} = \overline{\mathbf{v}^H\underbrace{\mathbf{A}\mathbf{v}}_{\lambda\mathbf{v}}} = \overline{\lambda\mathbf{v}^H\mathbf{v}} \underbrace{=}_{(*)} \overline{\lambda}\mathbf{v}^H\mathbf{v}$$

přidáme ^{H} a $\overline{}$

$$(*) \qquad \overline{(\mathbf{v}^H\mathbf{v})^H} = \mathbf{v}^H\mathbf{v} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{\mathbf{v}^H\mathbf{v}} = \mathbf{v}^H\mathbf{v}$$

(v)

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{u}^H \cdot \big/ & \mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \\ \mathbf{v}^H \cdot \big/ & \mathbf{A}\mathbf{u} = \mu\mathbf{u} \end{array}\right\} \qquad \lambda \neq \mu; \ \lambda = \overline{\lambda}, \ \mu = \overline{\mu}, \ \mathbf{A} = \mathbf{A}^H$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^H\mathbf{A}\mathbf{v} &= \lambda\mathbf{u}^H\mathbf{v} \\ \mathbf{v}^H\mathbf{A}\mathbf{u} &= \mu\mathbf{v}^H\mathbf{u} \qquad \big/^H \\ \mathbf{u}^H\mathbf{A}^H\mathbf{v} &= \mu\mathbf{u}^H\mathbf{v} \end{aligned}$$

$$0 = \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0}\mathbf{u}^H\mathbf{v} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\mathbf{u}^H\mathbf{v} = 0}$$

(vi)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{v} &= \lambda\mathbf{v} \\ \mathbf{v}^T\mathbf{A}\mathbf{v} &= \lambda\mathbf{v}^T\mathbf{v} \end{aligned}$$

Platí (pro pozitivně definitní matici $\mathbf{A}$):

$$\forall \mathbf{v} \neq \mathbf{o}: \qquad \mathbf{v}^T\mathbf{A}\mathbf{v} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda\underbrace{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}_{>0} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\lambda > 0}$$

□

Poznámka: Ortogonální matice $\mathbf{Q}$: $\boxed{\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}}$ $\big/ \cdot \mathbf{Q}^{-1}$ $\boxed{\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}}$

Podmíněnost úlohy na vlastní čísla

Omezíme se na případ, kdy matice $\mathbf{A}$ má n lineárně nezávislých vlastních vektorů $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ odpovídajících vlastním číslům λ_1, $\lambda_2, \ldots$, λ_n.

- Δa_{ij} ... malé změny v prvcích a_{ij} $|\Delta a_{ij}| \leq \varepsilon$
- porušená matice $\mathbf{A}(\varepsilon) = \mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}$ má vlastní čísla $\lambda_k(\varepsilon) = \lambda_k + \Delta\lambda_k$
- dále platí (viz literatura):

$$\boxed{|\lambda_k(\varepsilon) - \lambda_k| \lesssim \varkappa_k\varepsilon, \qquad \text{kde} \quad \varkappa_k = \frac{1}{|\cos\alpha_k|}}$$

kde α_k je úhel $\mathbf{v}_k$ a vlastního vektoru $\mathbf{A}^H$ odpovídajícímu vlastnímu číslu $\overline{\lambda_k}$

- Pro symetrickou matici je

$$\alpha_k = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \varkappa_k = 1$$

$$|\lambda_k(\varepsilon) - \lambda_k| \leq \varepsilon \qquad \ldots$$ **dobře podmíněná úloha**

- Pro nesymetrickou matici je

$$\alpha_k \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \varkappa_k$$ může být velmi velké

$\ldots$ **špatně podmíněná úloha**

Příklad

script v MATLABu

```
A=[-1 5 0;  0 3 1;  0 0 2]
AH=ctranspose(A)

[v,c]=eig(A,'nobalance')
[vH,cH]=eig(AH,'nobalance')

 disp('-----------------------------------------------------------')
 disp(' Vlastni vektory A a AH odpovidajici vlastnimu cislu lambda,')
 disp(' cos uhlu, ktery sviraji a tento uhel')
 for j=1:length(A)
  disp('-----------------------------------------------------------')
  lambda=c(j,j)
  vlastni_vektor_A=v(:,j)'
  vlastni_vektor_AH=vH(:,j)'
  cosinus_uhlu=vlastni_vektor_A*vlastni_vektor_AH'...
                /norm(vlastni_vektor_A)/norm(vlastni_vektor_AH)
  uhel=acos(cosinus_uhlu);
  uhel=uhel*180/pi
  pause
end;
```

výsledky v MATLABu

```
A =
    -1     5     0
     0     3     1
     0     0     2
AH =
    -1     0     0
     5     3     0
     0     1     2
v =
    1.0000    1.0000   -1.0000
         0    0.8000   -0.6000
         0         0    0.6000
c =
    -1     0     0
     0     3     0
     0     0     2
vH =
   -0.8000    0.0000   -0.0000
    1.0000   -1.0000    0.0000
   -0.3333   -1.0000    1.0000
cH =
   -1.0000         0         0
         0    3.0000         0
         0         0    2.0000
------------------------------------------------------------
 Vlastni vektory A a AH odpovidajici vlastnimu cislu lambda,
 cos uhlu, ktery sviraji a tento uhel
------------------------------------------------------------
lambda =
    -1
vlastni_vektor_A =
     1     0     0
vlastni_vektor_AH =
   -0.8000    1.0000   -0.3333
cosinus_uhlu =
   -0.6046
uhel =
  127.1966
------------------------------------------------------------
lambda =
     3
vlastni_vektor_A =
    1.0000    0.8000         0
vlastni_vektor_AH =
    0.0000   -1.0000   -1.0000
cosinus_uhlu =
   -0.4417
uhel =
  116.2141
------------------------------------------------------------
lambda =
     2
vlastni_vektor_A =
   -1.0000   -0.6000    0.6000
```

Příklad 2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 20 & 20 & & & & & \\ & 19 & 20 & & & & \\ & & 18 & 20 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & 2 & 20 \\ \varepsilon & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Výpočet determinantu $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ pomocí rozvoje podle posledního řádku:

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (20-\lambda)(19-\lambda)\dots(1-\lambda) - 20^{19}\varepsilon$$

- pro $\underline{\varepsilon = 0}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\boxed{\lambda_{min} = 1}$
- pro $\underline{\varepsilon = 20!\,20^{-19} \doteq 4,64 \cdot 10^{-7}}$

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \underbrace{(20-\lambda)(19-\lambda)\dots(1-\lambda)}_{\text{konst.člen } = 20!} - 20^{19}\,20!\,20^{-19} = \lambda \cdot (\dots) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\lambda_{min} = 0}$$

- Malé změně ε odpovídá velká změna vlastního čísla λ_{min}.
- Vlastní čísla nesymetrických matic jsou citlivá na změnu prvků (citlivost roste s rostoucí vzdáleností od diagonály).

Mocninná metoda

Chceme určit vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ s největší absolutní hodnotou (dominantní vlastní číslo).

Předpoklady:

1. $\mathbf{A}$ má n-lineárně nezávislých vlastních vektorů
2. existuje jediné dominantní vlastní číslo
3. vlastní čísla lze seřadit: $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$.

Odvození:

1. Zvolíme $\mathbf{y}^{(0)}$ jako lineární kombinaci vlastních vektorů

$$\mathbf{y}^{(0)} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{v}_n.$$

2. Sestrojíme posloupnost

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{A}\mathbf{y}^{(k-1)}, \quad \text{tj.} \quad \mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{A}^k\mathbf{y}^{(0)}.$$

$$\mathbf{y}^{(k)} = \alpha_1\mathbf{A}^k\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{A}^k\mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{A}^k\mathbf{v}_n.$$

3. Platí $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$, proto

$$\mathbf{y}^{(k)} = \alpha_1 \underbrace{\lambda_1^k}_{*} \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2^k \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^k \mathbf{v}_n.$$

4. Vytkneme dominantní vlastní číslo (viz $*$)

$$\mathbf{y}^{(k)} = \lambda_1^k \Big[\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \underbrace{\sum_{i=2}^{n} \alpha_i \overbrace{\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k}^{\to 0} \mathbf{v}_i}_{\varepsilon_k \to \mathbf{0}} \Big].$$

5. Analogicky vyjádříme $\mathbf{y}^{(k+1)}$.

6. Vybereme j-tou složku $\mathbf{y}^{(k+1)}$ a $\mathbf{y}^{(k)}$, vydělíme je a provedeme limitní přechod

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y_j^{(k+1)}}{y_j^{(k)}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_1^{k+1}(\alpha_1 v_{1,j} + \overbrace{\varepsilon_{k+1,j}}^{\to 0})}{\lambda_1^{k}(\alpha_1 v_{1,j} + \underbrace{\varepsilon_{k,j}}_{\to 0})} = \lambda_1$$

Příklad

Mocninnou metodou stanovte dominantní vlastní číslo matice $\mathbf{A}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad \mathbf{y}^{(0)} = [1, 1, 1]^T.$$

Řešení: Použijeme iterační formuli

$$\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{A}\mathbf{y}^{(k)}, \quad \text{pro} \;\; k = 0, 1, \ldots$$

$$\mathbf{y}^{(1)} = [2; 3; 2]^T \qquad \lambda_1^{(1)} = \frac{y_2^{(1)}}{y_2^{(0)}} = 3,$$

$$\mathbf{y}^{(2)} = [5; 7; 5]^T \qquad \lambda_1^{(2)} = \tfrac{7}{3} \approx 2,3333,$$

$$\mathbf{y}^{(3)} = [12; 17; 12]^T \qquad \lambda_1^{(3)} = \tfrac{17}{7} \approx 2,4285,$$

$$\mathbf{y}^{(4)} = [29; 41; 29]^T \qquad \lambda_1^{(4)} = \tfrac{41}{17} \approx 2,4117,$$

$$\mathbf{y}^{(5)} = [70; 99; 70]^T \qquad \lambda_1^{(5)} = \tfrac{99}{41} \approx \underline{\underline{2,4146}}.$$

Poznámka:

Abychom zamezili přetečení, resp. podtečení při zobrazení čísel v počítači je vhodné v každém kroku normovat vektor $\mathbf{y}^{(k)}$ (norma $\mathbf{y}^{(k)}$ roste, resp. klesá pro vlastní číslo v absolutní hodnotě větší, resp. menší než 1).

$$\boxed{\mathbf{y}^{(k)} := \frac{\mathbf{y}^{(k)}}{||\mathbf{y}^{(k)}||}}$$

výsledky v MATLABu

```
Mocninna metoda pro vypocet dominantniho vlastniho cisla matice A

A =
   900    20     1
    20   500    30
     1    30   100

| k |    y(1)_k     |    y(2)_k     |    y(3)_k     ||  lambda_k   |
---------------------------------------------------------------------
| 0 | 1.000000e+000 | 1.000000e+000 | 1.000000e+000 ||             |
| 1 | 9.210000e+002 | 5.500000e+002 | 1.310000e+002 || 921.0000000 |
| 2 | 8.400310e+005 | 2.973500e+005 | 3.052100e+004 || 912.0857763 |
| 3 | 7.620054e+008 | 1.663913e+008 | 1.281263e+007 || 907.1158338 |
| 4 | 6.891455e+011 | 9.882011e+010 | 7.035006e+009 || 904.3840077 |
| 5 | 6.222144e+014 | 6.340402e+013 | 4.357249e+012 || 902.8781109 |
| 6 | 5.612654e+017 | 4.427701e+016 | 2.960060e+015 || 902.0450147 |
| 7 | 5.060274e+020 | 3.345262e+019 | 2.185582e+018 || 901.5830307 |
| 8 | 4.560959e+023 | 2.691242e+022 | 1.728164e+021 || 901.3264854 |
| 9 | 4.110263e+026 | 2.262997e+025 | 1.436285e+024 || 901.1839104 |
|10 | 3.703777e+029 | 1.957860e+028 | 1.233554e+027 || 901.1046393 |

>> eig(A)
ans =
  1.0e+002 *
   0.977622158203950
   5.012324900167472
   9.010052941628578
```

výsledky v MATLABu

```
Mocninna metoda pro vypocet dominantniho vlastniho cisla matice A
s normovanim vlastniho vektoru v kazde iteraci

A =
   900    20     1
    20   500    30
     1    30   100

| k |     y(1)_k   |     y(2)_k   |     y(3)_k   || lambda_k  |
----------------------------------------------------------------
| 0 |    1.0000000 |    1.0000000 |    1.0000000 ||           |
| 1 |  921.0000000 |  550.0000000 |  131.0000000 ||921.000000 |
|   |    1.0000000 |    0.5971770 |    0.1422367 ||           |
| 2 |  912.0857763 |  322.8555917 |   33.1389794 ||912.085776 |
|   |    1.0000000 |    0.3539750 |    0.0363332 ||           |
| 3 |  907.1158338 |  198.0775114 |   15.2525693 ||907.115834 |
|   |    1.0000000 |    0.2183597 |    0.0168144 ||           |
| 4 |  904.3840077 |  129.6842642 |    9.2322257 ||904.384008 |
|   |    1.0000000 |    0.1433951 |    0.0102083 ||           |
| 5 |  902.8781109 |   92.0038151 |    6.3226842 ||902.878111 |
|   |    1.0000000 |    0.1019006 |    0.0070028 ||           |
| 6 |  902.0450147 |   71.1603809 |    4.7572988 ||902.045015 |
|   |    1.0000000 |    0.0788878 |    0.0052739 ||           |
| 7 |  901.5830307 |   59.6021361 |    3.8940255 ||901.583031 |
|   |    1.0000000 |    0.0661083 |    0.0043191 ||           |
| 8 |  901.3264854 |   53.1837310 |    3.4151593 ||901.326485 |
|        1.0000000 |    0.0590061 |    0.0037890 ||           |
| 9 |  901.1839104 |   49.6167046 |    3.1490857 ||901.183910 |
|   |    1.0000000 |    0.0550572 |    0.0034944 ||           |
|10 |  901.1046393 |   47.6334548 |    3.0011561 ||901.104639 |
|   |    1.0000000 |    0.0528612 |    0.0033305 ||           |
```

výsledky v MATLABu

```
Mocninna metoda pro vypocet dominantniho vlastniho cisla matice A

A =
       1/1000        -3/10000       -1/2000
       1/5000         1/200         -1/10000
      -1/1000         1/500          3/1000

| k |     y(1)_k     |    y(2)_k     |    y(3)_k     ||  lambda_k  |
--------------------------------------------------------------------
| 0 |  1.000000e+000 | 1.000000e+000 | 1.000000e+000 ||            |
| 1 |  2.000000e-004 | 5.100000e-003 | 4.000000e-003 ||  0.0051000 |
| 2 | -3.330000e-006 | 2.514000e-005 | 2.200000e-005 ||  0.0049294 |
| 3 | -2.187200e-008 | 1.228340e-007 | 1.196100e-007 ||  0.0048860 |
| 4 | -1.185272e-010 | 5.978346e-010 | 6.263700e-010 ||  0.0052368 |
| 5 | -6.110626e-013 | 2.902831e-012 | 3.193306e-012 ||  0.0050981 |
| 6 | -3.078565e-015 | 1.407261e-014 | 1.599664e-014 ||  0.0050094 |
| 7 | -1.529867e-017 | 6.814767e-017 | 7.921371e-017 ||  0.0049519 |
| 8 | -7.534983e-020 | 3.297572e-019 | 3.892351e-019 ||  0.0049137 |
| 9 | -3.688946e-022 | 1.594793e-021 | 1.902570e-021 ||  0.0048880 |
|10 | -1.798617e-024 | 7.709928e-024 | 9.266189e-024 ||  0.0048704 |

>> eig(A)
ans =
   0.000770409049726
   0.003399468175334
   0.004830122774940
```

výsledky v MATLABu

```
Mocninna metoda pro vypocet dominantniho vlastniho cisla matice A
s normovanim vlastniho vektoru v kazde iteraci

A =
       1/1000        -3/10000       -1/2000
       1/5000         1/200         -1/10000
      -1/1000         1/500          3/1000

| k |    y(1)_k   |   y(2)_k   |   y(3)_k   ||  lambda_k  |
-------------------------------------------------------------
| 0 |   1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 ||             |
| 1 |   0.0002000 | 0.0051000 | 0.0040000 ||  0.005100   |
|   |   0.0392157 | 1.0000000 | 0.7843137 ||             |
| 2 |  -0.0006529 | 0.0049294 | 0.0043137 ||  0.004929   |
|   |  -0.1324582 | 1.0000000 | 0.8750994 ||             |
| 3 |  -0.0008700 | 0.0048860 | 0.0047578 ||  0.004886   |
|   |  -0.1780614 | 1.0000000 | 0.9737532 ||             |
| 4 |  -0.0009649 | 0.0048670 | 0.0050993 ||  0.005237   |
|   |  -0.1892287 | 0.9544432 | 1.0000000 ||             |
| 5 |  -0.0009756 | 0.0046344 | 0.0050981 ||  0.005098   |
|   |  -0.1913573 | 0.9090360 | 1.0000000 ||             |
| 6 |  -0.0009641 | 0.0044069 | 0.0050094 ||  0.005009   |
|   |  -0.1924507 | 0.8797227 | 1.0000000 ||             |
| 7 |  -0.0009564 | 0.0042601 | 0.0049519 ||  0.004952   |
|   |  -0.1931316 | 0.8603014 | 1.0000000 ||             |
| 8 |  -0.0009512 | 0.0041629 | 0.0049137 ||  0.004914   |
|   |  -0.1935843 | 0.8471929 | 1.0000000 ||             |
| 9 |  -0.0009477 | 0.0040972 | 0.0048880 ||  0.004888   |
|   |  -0.1938928 | 0.8382309 | 1.0000000 ||             |
|10 |  -0.0009454 | 0.0040524 | 0.0048704 ||  0.004870   |
|   |  -0.1941054 | 0.8320495 | 1.0000000 ||             |
```

Poznámka:

Nejlepší aproximaci dostaneme, dělíme-li složky, které mají největší absolutní hodnotu.
Obecně nelze použít libovolnou složku vektoru $\mathbf{y}^{(k)}$ neboť odpovídající vlastní vektor ji může mít nulovou.

výsledky v MATLABu

```
A =
     1     1     0
     0     2     0
     0     0     3

>> [v,c]=eig(A,'nobalance')

v =
     1     1     0
     0     1     0
     0     0     1

c =
     1     0     0
     0     2     0
     0     0     3

Mocninna metoda pro vypocet dominantniho vlastniho cisla matice A

| k |    y(1)_k     |    y(2)_k     |    y(3)_k     ||lambda_k 1s || 2s || 3s |
---------------------------------------------------------------------------------
| 0 | 2.000000e+00 | 1.000000e+00 | 1.000000e+00 ||             ||    ||    |
| 1 | 3.000000e+00 | 2.000000e+00 | 3.000000e+00 ||   1.5000000 ||  2 ||  3 |
| 2 | 5.000000e+00 | 4.000000e+00 | 9.000000e+00 ||   1.6666667 ||  2 ||  3 |
| 3 | 9.000000e+00 | 8.000000e+00 | 2.700000e+01 ||   1.8000000 ||  2 ||  3 |
| 4 | 1.700000e+01 | 1.600000e+01 | 8.100000e+01 ||   1.8888889 ||  2 ||  3 |
| 5 | 3.300000e+01 | 3.200000e+01 | 2.430000e+02 ||   1.9411765 ||  2 ||  3 |
| 6 | 6.500000e+01 | 6.400000e+01 | 7.290000e+02 ||   1.9696970 ||  2 ||  3 |
| 7 | 1.290000e+02 | 1.280000e+02 | 2.187000e+03 ||   1.9846154 ||  2 ||  3 |
| 8 | 2.570000e+02 | 2.560000e+02 | 6.561000e+03 ||   1.9922481 ||  2 ||  3 |
| 9 | 5.130000e+02 | 5.120000e+02 | 1.968300e+04 ||   1.9961089 ||  2 ||  3 |
|10 | 1.025000e+03 | 1.024000e+03 | 5.904900e+04 ||   1.9980507 ||  2 ||  3 |
```

Poznámka:

Při praktickém použití mocninné metody neověřujeme, zda jsou splněny předpoklady odvození.

Zadaná matice nemusí mít jediné dominantní vlastní číslo nebo
počet lineárně nezávislých vlastních vektorů může být menší než řád matice.

Při nesplněných předpokladech odvození může být konvergence pomalá.
Další nevýhodou mocninné metody je potom odhad chyby získané aproximace.

výsledky v MATLABu

```
A =
     3     1     1
    -1     1     0
     0     0     1

>> [v,c]=eig(A,'nobalance')

v =
    1.0000   -1.0000    0.0000
   -1.0000    1.0000   -1.0000
         0         0    1.0000
c =
    2.0000         0         0
         0    2.0000         0
         0         0    1.0000

Mocninna metoda pro vypocet dominantniho vlastniho cisla matice A

| k |     y(1)_k    |      y(2)_k      |     y(3)_k    ||  lambda_k  |
--------------------------------------------------------------------
| 0 | 1.000000e+000 |  1.000000e+000 | 1.000000e+000 ||            |
| 1 | 5.000000e+000 |  0.000000e+000 | 1.000000e+000 ||  5.0000000 |
| 2 | 1.600000e+001 | -5.000000e+000 | 1.000000e+000 ||  3.2000000 |
| 3 | 4.400000e+001 | -2.100000e+001 | 1.000000e+000 ||  2.7500000 |
| 4 | 1.120000e+002 | -6.500000e+001 | 1.000000e+000 ||  2.5454545 |
| 5 | 2.720000e+002 | -1.770000e+002 | 1.000000e+000 ||  2.4285714 |
| 6 | 6.400000e+002 | -4.490000e+002 | 1.000000e+000 ||  2.3529412 |
| 7 | 1.472000e+003 | -1.089000e+003 | 1.000000e+000 ||  2.3000000 |
| 8 | 3.328000e+003 | -2.561000e+003 | 1.000000e+000 ||  2.2608696 |
| 9 | 7.424000e+003 | -5.889000e+003 | 1.000000e+000 ||  2.2307692 |
|10 | 1.638400e+004 | -1.331300e+004 | 1.000000e+000 ||  2.2068966 |

|50 | 8.556839e+016 | -8.219069e+016 | 1.000000e+000 ||  2.0402685 |

|100| 1.914152e+032 | -1.876123e+032 | 1.000000e+000 ||  2.0200669 |

|150| 3.225580e+047 | -3.182762e+047 | 1.000000e+000 ||  2.0133630 |

|200| 4.836884e+062 | -4.788675e+062 | 1.000000e+000 ||  2.0100167 |

|250| 6.802785e+077 | -6.748508e+077 | 1.000000e+000 ||  2.0080107 |

|300| 9.187032e+092 | -9.125921e+092 | 1.000000e+000 ||  2.0066741 |

|1000|1.608334e+304 | -1.605120e+304 | 1.000000e+000 ||  2.0020007 |


--------------------------------------------------------------------

|1013|      Inf      | -1.332031e+308 | 1.000000e+000 ||        Inf |
```

Z uvedeného příkladu je dále vidět, že je opravdu vhodné normovat vektor $\mathbf{y}^{(k)}$ a zabránit tak přetečení.

Poznámka:

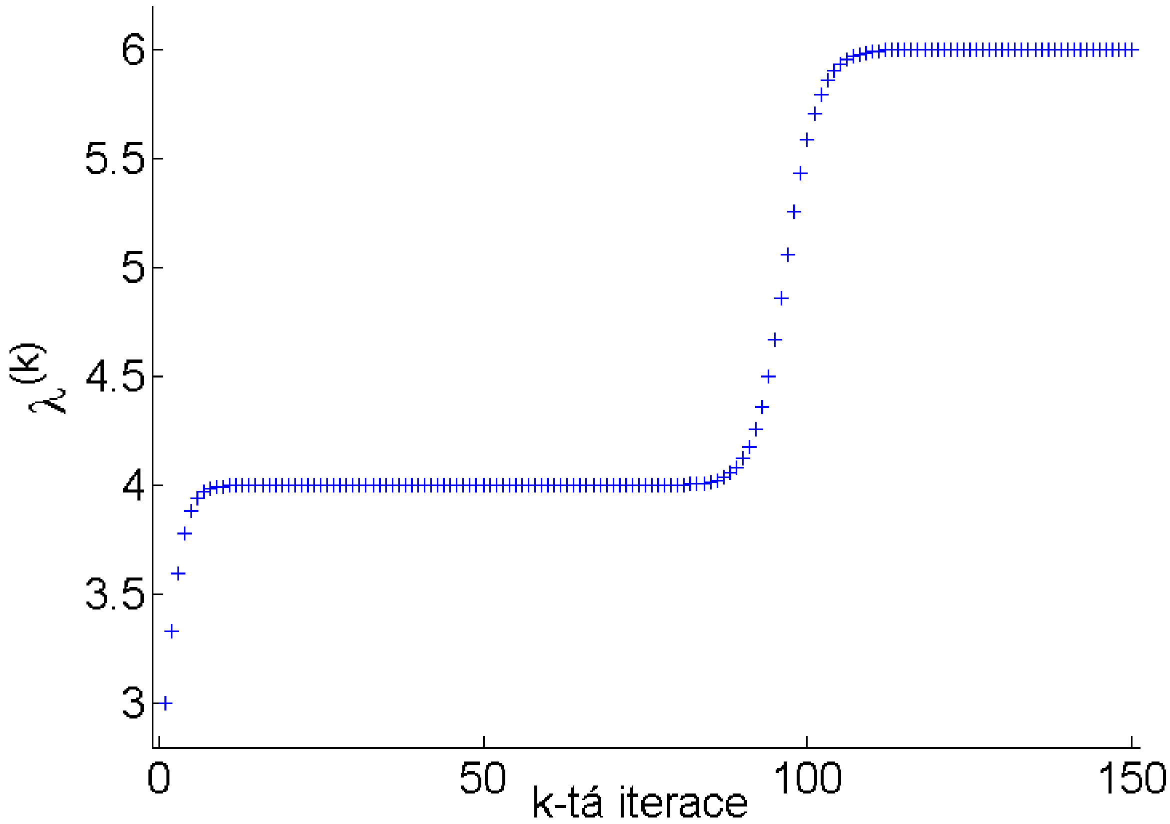
Při praktickém použití mocninné metody použijeme například počáteční volbu vektoru $\mathbf{y}^{(0)} = [1, 1, 1, \ldots, 1]^T$.

Je-li ovšem vektor $\mathbf{y}^{(0)}$ takovou lineární kombinací vlastních vektorů, že koeficient u vlastního vektoru odpovídajícího dominantnímu vlastnímu číslu bude roven 0, potom mocninná metoda nevypočte dominantní vlastní číslo, ale nejbližší nižší, u kterého u odpovídajícího vlastního vektoru bude nenulový koeficient.

Pokud bychom prováděli výpočet dostatečně dlouho, dojde vlivem zaokrouhlovacích chyb k tomu, že u příslušné iterace $\mathbf{y}^{(k)}$ bude již zmiňovaný koeficient u vlastního vektoru odpovídajícího dominantnímu vlastnímu číslu již nenulový a metoda nakonec dominantní vlastní číslo nalezne.

výsledky v MATLABu

```
A =
     4    -3     2
     0     2     0
     0    -4     6

>> [v,c]=eig(A,'nobalance')

v =
    1.0000    1.0000   -0.5000
         0         0   -1.0000
         0    1.0000   -1.0000
c =
     4     0     0
     0     6     0
     0     0     2

>> y=[1 1 1]'
>> alpha=(v\y)'

alpha =
    0.5000         0   -1.0000

Mocninna metoda pro vypocet dominantniho vlastniho cisla matice A
s normovanim vlastniho vektoru v kazde iteraci

| k |   y(1)_k   |   y(2)_k   |   y(3)_k   ||  lambda_k  |
----------------------------------------------------------
| 0 |  1.0000000 |  1.0000000 |  1.0000000 ||            |
| 1 |  3.0000000 |  2.0000000 |  2.0000000 ||  3.000000  |
|   |  1.0000000 |  0.6666667 |  0.6666667 ||            |
| 2 |  3.3333333 |  1.3333333 |  1.3333333 ||  3.333333  |
|   |  1.0000000 |  0.4000000 |  0.4000000 ||            |
| 3 |  3.6000000 |  0.8000000 |  0.8000000 ||  3.600000  |
|   |  1.0000000 |  0.2222222 |  0.2222222 ||            |
| 4 |  3.7777778 |  0.4444444 |  0.4444444 ||  3.777778  |
|   |  1.0000000 |  0.1176471 |  0.1176471 ||            |
| 5 |  3.8823529 |  0.2352941 |  0.2352941 ||  3.882353  |
|   |  1.0000000 |  0.0606061 |  0.0606061 ||            |
| 6 |  3.9393939 |  0.1212121 |  0.1212121 ||  3.939394  |
|   |  1.0000000 |  0.0307692 |  0.0307692 ||            |
| 7 |  3.9692308 |  0.0615385 |  0.0615385 ||  3.969231  |
|   |  1.0000000 |  0.0155039 |  0.0155039 ||            |
| 8 |  3.9844961 |  0.0310078 |  0.0310078 ||  3.984496  |
|   |  1.0000000 |  0.0077821 |  0.0077821 ||            |
| 9 |  3.9922179 |  0.0155642 |  0.0155642 ||  3.992218  |
|   |  1.0000000 |  0.0038986 |  0.0038986 ||            |
|10 |  3.9961014 |  0.0077973 |  0.0077973 ||  3.996101  |
|   |  1.0000000 |  0.0019512 |  0.0019512 ||            |
|11 |  3.9980488 |  0.0039024 |  0.0039024 ||  3.998049  |
|   |  1.0000000 |  0.0009761 |  0.0009761 ||            |
|12 |  3.9990239 |  0.0019522 |  0.0019522 ||  3.999024  |
|   |  1.0000000 |  0.0004882 |  0.0004882 ||            |
|13 |  3.9995118 |  0.0009763 |  0.0009763 ||  3.999512  |
|   |  1.0000000 |  0.0002441 |  0.0002441 ||            |
```



Poznámka:

Iterační proces ukončujeme použitím zastavovací podmínky ve tvaru

$$\boxed{|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}| < \varepsilon}.$$

Posuďte výsledky získané pro následující příklad. Kde je problém ?

výsledky v MATLABu

```
A =
     3     3     0
     0     4     2
     0     0     1

>> [v,c]=eig(A,'nobalance')

v =
    1.0000    1.0000    1.0000
         0    0.3333   -0.6667
         0         0    1.0000
c =
     3     0     0
     0     4     0
     0     0     1

>> y=[1 1 1]'
>> alpha=(v\y)'

alpha =
    -5     5     1

Mocninna metoda pro vypocet dominantniho vlastniho cisla matice A

| k |     y(1)_k    |     y(2)_k    |     y(3)_k    ||  lambda_k  |
-------------------------------------------------------------------
| 0 | 1.000000e+000 | 1.000000e+000 | 1.000000e+000 ||            |
| 1 | 6.000000e+000 | 6.000000e+000 | 1.000000e+000 ||  6.0000000 |
| 2 | 3.600000e+001 | 2.600000e+001 | 1.000000e+000 ||  6.0000000 |
```

```
>> y=[1 0 1]'
>> alpha=(v\y)'

alpha =
    -2     2     1

Mocninna metoda pro vypocet dominantniho vlastniho cisla matice A

| k |     y(1)_k    |     y(2)_k    |     y(3)_k    ||  lambda_k  |
-------------------------------------------------------------------
| 0 | 1.000000e+000 | 0.000000e+000 | 1.000000e+000 ||            |
| 1 | 3.000000e+000 | 2.000000e+000 | 1.000000e+000 ||  3.0000000 |
| 2 | 1.500000e+001 | 1.000000e+001 | 1.000000e+000 ||  5.0000000 |
| 3 | 7.500000e+001 | 4.200000e+001 | 1.000000e+000 ||  5.0000000 |
```

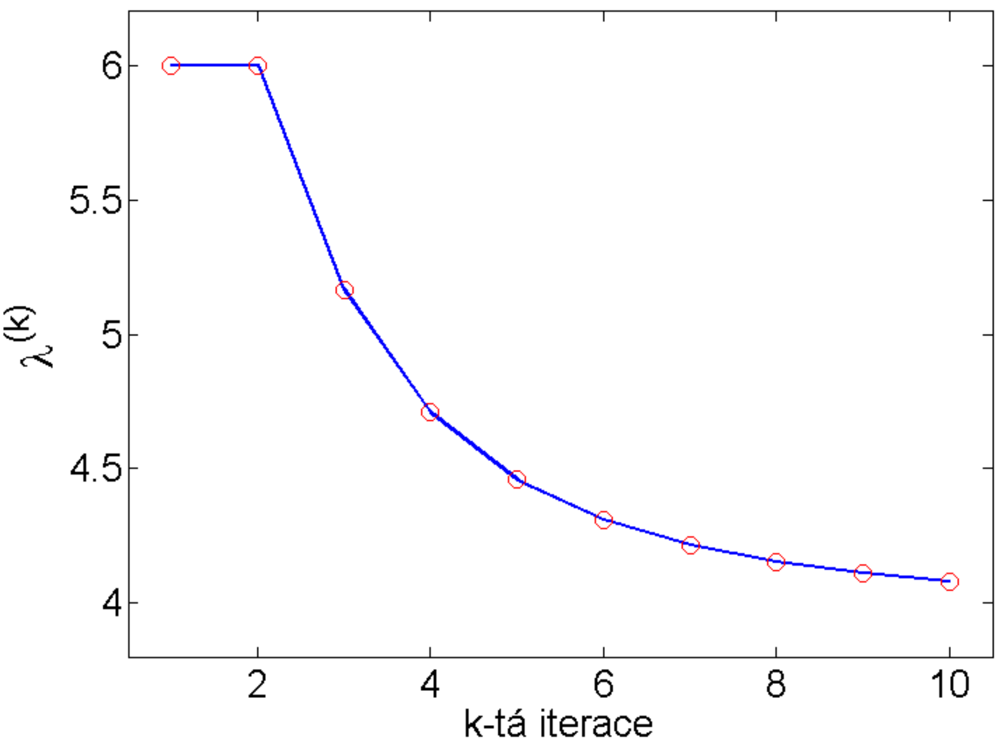
```
>> y=[3 2 1]'
>> alpha=(v\y)'

alpha =
    -6     8     1

Mocninna metoda pro vypocet dominantniho vlastniho cisla matice A

| k |     y(1)_k     |     y(2)_k     |     y(3)_k     ||  lambda_k  |
--------------------------------------------------------------------
| 0 | 3.000000e+000 | 2.000000e+000 | 1.000000e+000 ||            |
| 1 | 1.500000e+001 | 1.000000e+001 | 1.000000e+000 ||  5.0000000 |
| 2 | 7.500000e+001 | 4.200000e+001 | 1.000000e+000 ||  5.0000000 |
```

Všechny předpoklady byly splněny, byla použita i vhodná počáteční volba vektoru $\mathbf{y}^{(0)}$.

Jediné, co se stalo je skutečnost, že v posloupnosti přibližných řešení generovaných mocninnou metodou se objevily dva po sobě jdoucí stejné členy, které zdaleka nebyly limitou této posloupnosti.

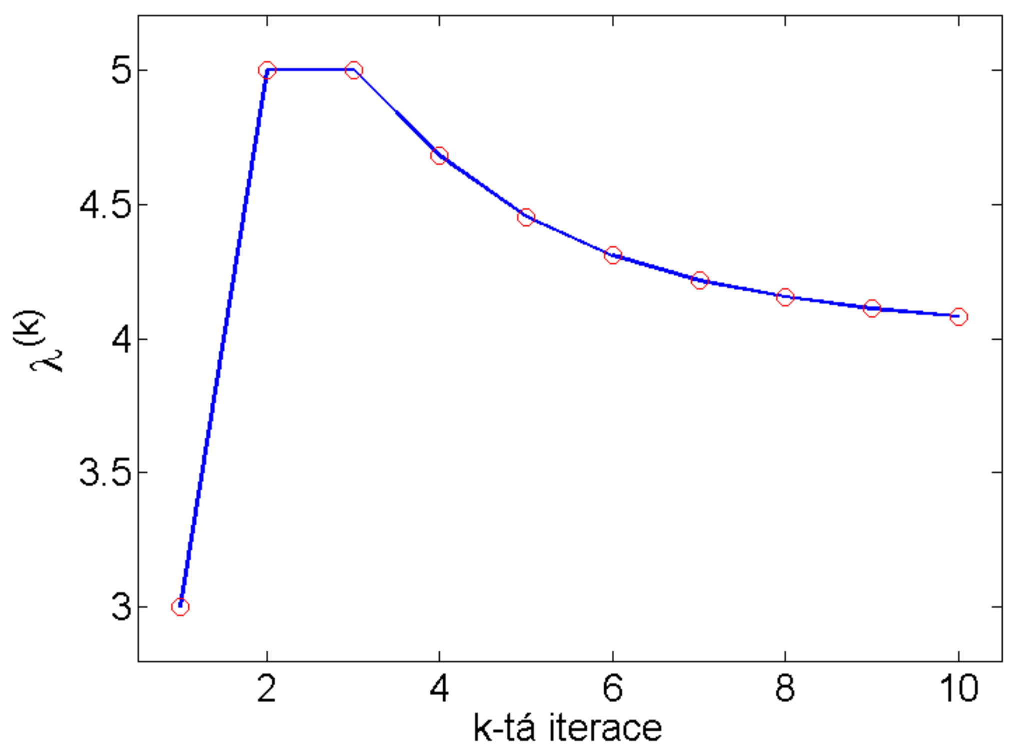
výsledky v MATLABu

```
Mocninna metoda pro vypocet dominantniho vlastniho cisla matice A

| k |     y(1)_k     |     y(2)_k     |     y(3)_k     ||  lambda_k  |
--------------------------------------------------------------------
| 0 | 1.000000e+000 | 1.000000e+000 | 1.000000e+000 ||            |
| 1 | 6.000000e+000 | 6.000000e+000 | 1.000000e+000 ||  6.0000000 |
| 2 | 3.600000e+001 | 2.600000e+001 | 1.000000e+000 ||  6.0000000 |

| 3 | 1.860000e+002 | 1.060000e+002 | 1.000000e+000 ||  5.1666667 |
| 4 | 8.760000e+002 | 4.260000e+002 | 1.000000e+000 ||  4.7096774 |
| 5 | 3.906000e+003 | 1.706000e+003 | 1.000000e+000 ||  4.4589041 |
| 6 | 1.683600e+004 | 6.826000e+003 | 1.000000e+000 ||  4.3102919 |
| 7 | 7.098600e+004 | 2.730600e+004 | 1.000000e+000 ||  4.2163222 |
| 8 | 2.948760e+005 | 1.092260e+005 | 1.000000e+000 ||  4.1540022 |
| 9 | 1.212306e+006 | 4.369060e+005 | 1.000000e+000 ||  4.1112400 |
|10 | 4.947636e+006 | 1.747626e+006 | 1.000000e+000 ||  4.0811775 |
```

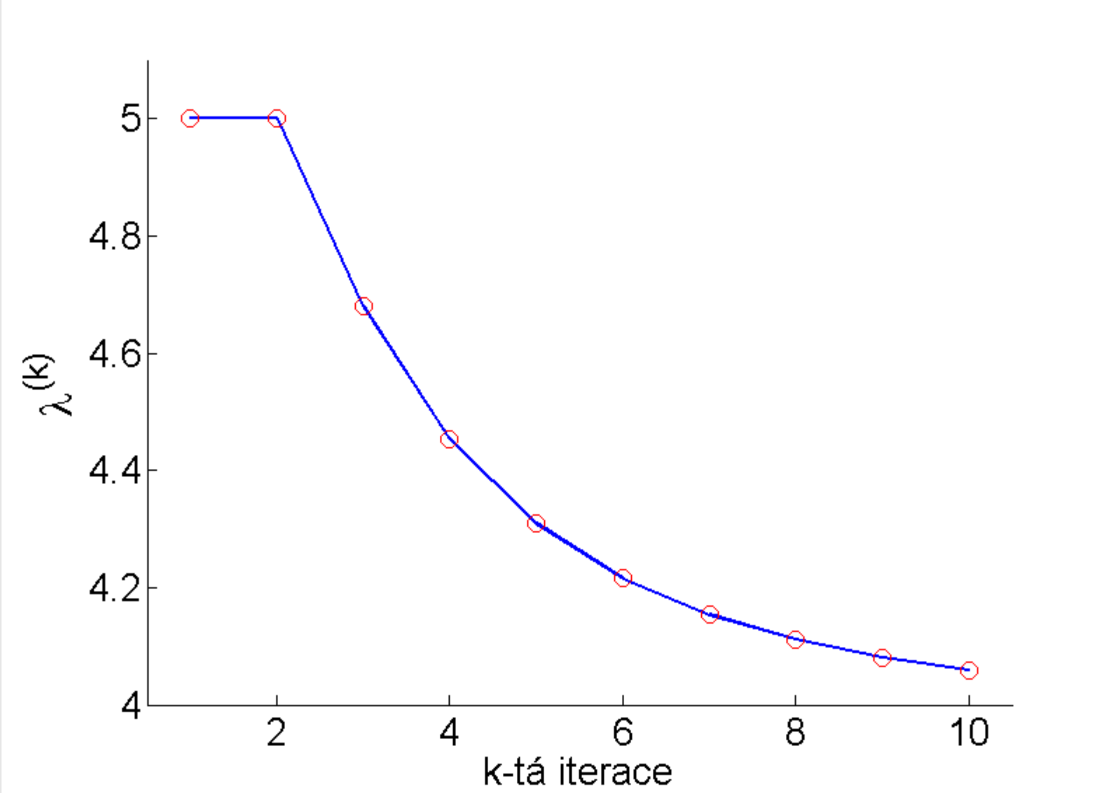


Mocninna metoda pro vypocet dominantniho vlastniho cisla matice A

k	y(1)_k	y(2)_k	y(3)_k	lambda_k
0	1.000000e+000	0.000000e+000	1.000000e+000	
1	3.000000e+000	2.000000e+000	1.000000e+000	3.0000000
2	1.500000e+001	1.000000e+001	1.000000e+000	5.0000000
3	7.500000e+001	4.200000e+001	1.000000e+000	5.0000000
4	3.510000e+002	1.700000e+002	1.000000e+000	4.6800000
5	1.563000e+003	6.820000e+002	1.000000e+000	4.4529915
6	6.735000e+003	2.730000e+003	1.000000e+000	4.3090211
7	2.839500e+004	1.092200e+004	1.000000e+000	4.2160356
8	1.179510e+005	4.369000e+004	1.000000e+000	4.1539356
9	4.849230e+005	1.747620e+005	1.000000e+000	4.1112242
10	1.979055e+006	6.990500e+005	1.000000e+000	4.0811737




```
Mocninna metoda pro vypocet dominantniho vlastniho cisla matice A

| k |     y(1)_k     |     y(2)_k     |     y(3)_k     ||  lambda_k  |
-------------------------------------------------------------------
| 0 | 3.000000e+000 | 2.000000e+000 | 1.000000e+000 ||            |
| 1 | 1.500000e+001 | 1.000000e+001 | 1.000000e+000 ||  5.0000000 |
| 2 | 7.500000e+001 | 4.200000e+001 | 1.000000e+000 ||  5.0000000 |

| 3 | 3.510000e+002 | 1.700000e+002 | 1.000000e+000 ||  4.6800000 |
| 4 | 1.563000e+003 | 6.820000e+002 | 1.000000e+000 ||  4.4529915 |
| 5 | 6.735000e+003 | 2.730000e+003 | 1.000000e+000 ||  4.3090211 |
| 6 | 2.839500e+004 | 1.092200e+004 | 1.000000e+000 ||  4.2160356 |
| 7 | 1.179510e+005 | 4.369000e+004 | 1.000000e+000 ||  4.1539356 |
| 8 | 4.849230e+005 | 1.747620e+005 | 1.000000e+000 ||  4.1112242 |
| 9 | 1.979055e+006 | 6.990500e+005 | 1.000000e+000 ||  4.0811737 |
|10 | 8.034315e+006 | 2.796202e+006 | 1.000000e+000 ||  4.0596724 |
```



Poznámka:

Pro **urychlování konvergence metody**

- lze použít např. Aitkenův proces,

- pokud platí, že λ_1 a λ_2 jsou si velmi blízká, rychlost konvergence mocninné metody bude malá; předpokládáme-li např., že jsou všechna vlastní čísla reálná, lze použít Wilkinsonovu metodu:

$\mathbf{A}$ má vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

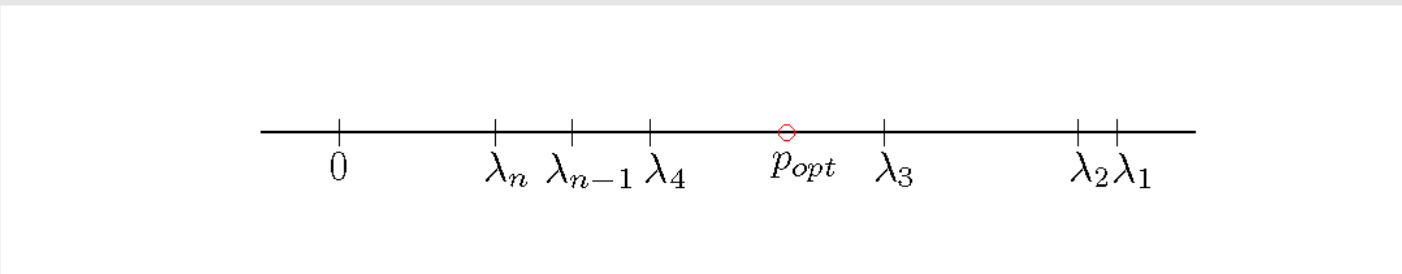
$\widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - p\mathbf{I}$ má vlastní čísla $\lambda_1 - p, \lambda_2 - p, \ldots, \lambda_n - p$

Uvažujme pro jednoduchost, že jsou všechna $\lambda_i > 0$.

Pomalou konvergenci způsobuje podíl $\left|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| \lessapprox 1$.

Chceme tento podíl co nejvíce zmenšit: $\dfrac{\lambda_2 - p}{\lambda_1 - p} < \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

Jak musíme volit p? $\quad p_{opt} = \dfrac{\lambda_2 + \lambda_n}{2}$ ... představuje posunutý počátek



Příklad:

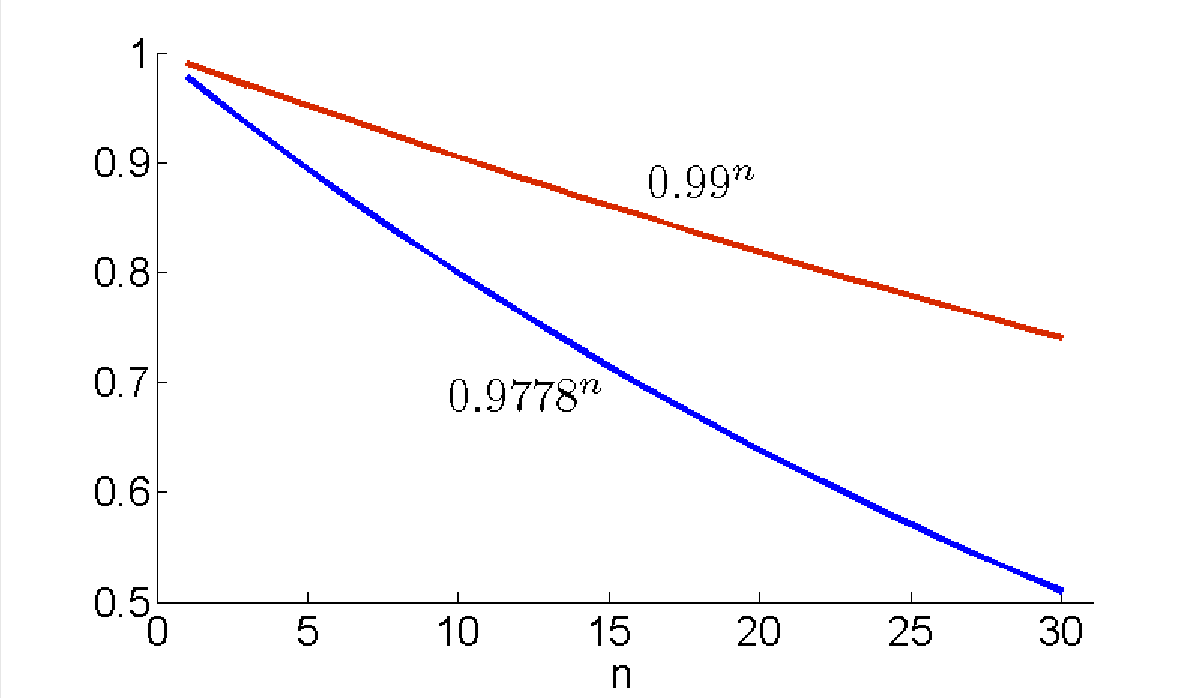
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 100 & & \\ & 99 & \\ & & 11 \end{bmatrix} \quad \ldots \quad \text{vlastní čísla } \lambda_1 = 100,\ \lambda_2 = 99,\ \lambda_3 = 11 \qquad \Rightarrow \qquad p_{opt} = \frac{99+11}{2} = 55$$

$$\widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - 55\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 45 & & \\ & 44 & \\ & & -44 \end{bmatrix} \quad \ldots \quad \text{vlastní čísla } \widehat{\lambda}_1 = 45,\ \widehat{\lambda}_2 = 44,\ \widehat{\lambda}_3 = -44$$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{99}{100} = 0,99 \qquad \frac{\widehat{\lambda}_2}{\widehat{\lambda}_1} = \frac{44}{45} \doteq 0,9778$$

výsledky v MATLABu

n	0.99^n	0.9778^n
1	0.9900	0.9778
2	0.9801	0.9561
3	0.9703	0.9349
4	0.9606	0.9141
5	0.9510	0.8938
6	0.9415	0.8740
7	0.9321	0.8546
8	0.9227	0.8356
9	0.9135	0.8171
10	0.9044	0.7989
11	0.8953	0.7812
12	0.8864	0.7638
13	0.8775	0.7469
14	0.8687	0.7303
15	0.8601	0.7141
16	0.8515	0.6982
17	0.8429	0.6827
18	0.8345	0.6676
19	0.8262	0.6528
20	0.8179	0.6383
21	0.8097	0.6241
22	0.8016	0.6102
23	0.7936	0.5967
24	0.7857	0.5834
25	0.7778	0.5705
26	0.7700	0.5578
27	0.7623	0.5454
28	0.7547	0.5333
29	0.7472	0.5215
30	0.7397	0.5099



Metoda Rayleighova podílu

Chceme určit vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ s největší absolutní hodnotou (dominantní vlastní číslo).

Při odvození metody Rayleighova podílu budeme navíc (oproti mocninné metodě) předpokládat, že matice $\mathbf{A}$ je symetrická (reálná). Potom musí být vlastní vektory ortonormální $\left(\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_j = 0 \text{ pro } i \neq j \quad \text{a} \quad \mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_i = 1\right)$.

Odvození:

6. krok z odvození mocninné metody nahradíme vyjádřením součinu $\mathbf{y}^{(k)^T}\mathbf{y}^{(k)}$

$$\mathbf{y}^{(k)^T}\mathbf{y}^{(k)} = \lambda_1^k\Big[\alpha_1\mathbf{v}_1^T + \overbrace{\sum_{i=2}^{n}\alpha_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{v}_i^T}^{\varepsilon_k^T}\Big] \,.\, \lambda_1^k\Big[\alpha_1\mathbf{v}_1 + \overbrace{\sum_{i=2}^{n}\alpha_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{v}_i}^{\varepsilon_k}\Big] =$$

$$= \lambda_1^{2k}\Big[\alpha_1^2 + \underbrace{\sum_{i=2}^{n}\alpha_i^2\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2k}}_{\varepsilon_k^T\varepsilon_k}\Big]$$

a součinu $\mathbf{y}^{(k)^T}\mathbf{y}^{(k+1)^T}$

$$\mathbf{y}^{(k)^T}\mathbf{y}^{(k+1)} = \lambda_1^k\Big[\alpha_1\mathbf{v}_1^T + \overbrace{\sum_{i=2}^{n}\alpha_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{v}_i^T}^{\varepsilon_k^T}\Big] \,.\, \lambda_1^{k+1}\Big[\alpha_1\mathbf{v}_1 + \overbrace{\sum_{i=2}^{n}\alpha_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k+1}\mathbf{v}_i}^{\varepsilon_{k+1}}\Big] =$$

$$= \lambda_1^{2k+1}\Big[\alpha_1^2 + \underbrace{\sum_{i=2}^{n}\alpha_i^2\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2k+1}}_{\varepsilon_k^T\varepsilon_{k+1}}\Big]$$

Dostáváme:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\mathbf{y}^{(k)^{\mathsf{T}}}\mathbf{A}\mathbf{y}^{(k)}}{\mathbf{y}^{(k)^{\mathsf{T}}}\mathbf{y}^{(k)}}=\lim_{k\to\infty}\frac{\mathbf{y}^{(k)^{\mathsf{T}}}\mathbf{y}^{(k+1)}}{\mathbf{y}^{(k)^{T}}\mathbf{y}^{(k)}}=\frac{\lambda_1^{2k+1}(\alpha_1^2+\overbrace{\varepsilon_k^T\varepsilon_{k+1}}^{\to 0})}{\lambda_1^{2k}(\alpha_1^2+\underbrace{\varepsilon_k^T\varepsilon_k}_{\to 0})}=\lambda_1.$$

Poznámka: Součin $\varepsilon_k^T\varepsilon_k$ konverguje k nule (pro $k\to\infty$) zhruba dvakrát rychleji než ε_k k nulovému vektoru

$\Rightarrow$ metoda Rayleighova podílu bude rychlejší než mocninná metoda.

Příklad

Metodou Rayleighova podílu určete dominantní vlastní číslo matice $\mathbf{A}$, kde

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\qquad \text{a}\qquad \mathbf{y}^{(0)}=[1;1;1]^T.$$

Řešení:

$$\mathbf{y}^{(1)}=[2;3;2]^T\qquad \lambda_1^{(1)}=\frac{\mathbf{y}^{(0)^T}\mathbf{y}^{(1)}}{\mathbf{y}^{(0)^T}\mathbf{y}^{(0)}}=\tfrac{7}{3}\approx 2,3333,$$

$$\mathbf{y}^{(2)}=[5;7;5]^T\qquad \lambda_1^{(2)}=\tfrac{41}{17}\approx 2,4117,$$

$$\mathbf{y}^{(3)}=[12;17;12]^T\quad \lambda_1^{(3)}=\tfrac{60+119+60}{25+49+25}=\tfrac{239}{99}\approx \underline{\underline{2,41417}}.$$

Příklad 3

Pro stejné zadání symetrické matice $\mathbf{A}$ porovnejme rychlost konvergence mocniné metody a metody Rayleighova podílu.

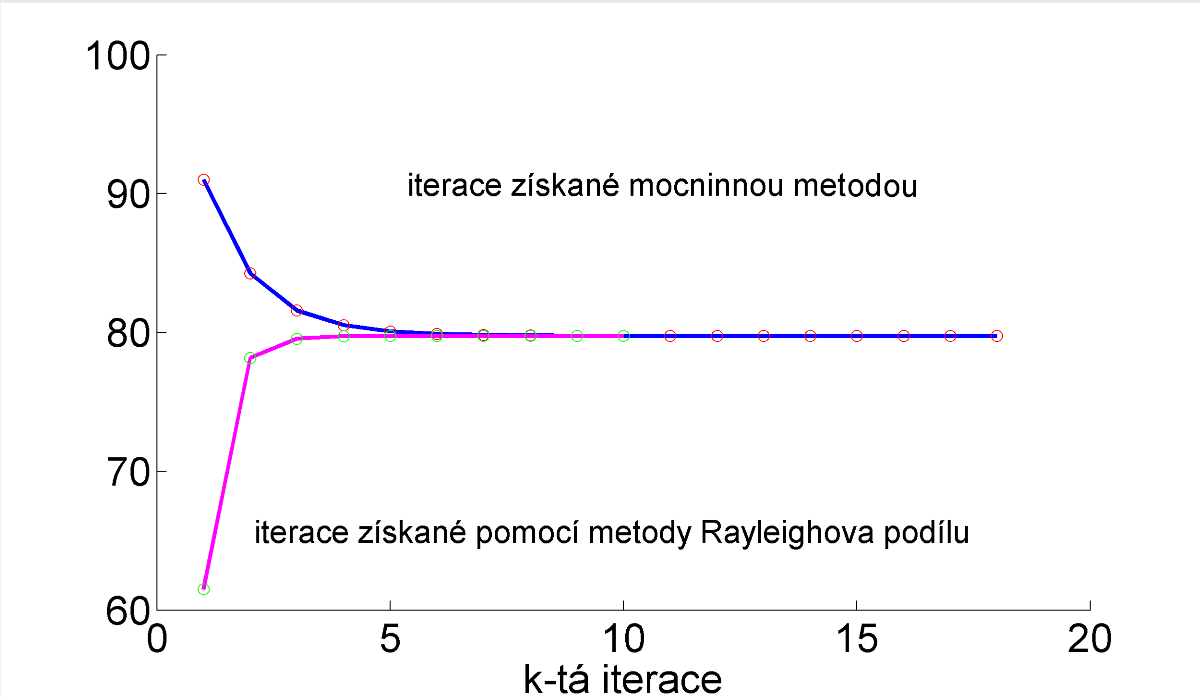
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}60&20&10&1\\20&50&10&2\\10&10&30&5\\1&2&5&10\end{bmatrix},\quad \mathbf{y}^{(0)}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\quad \varepsilon=10^{-5}.$$

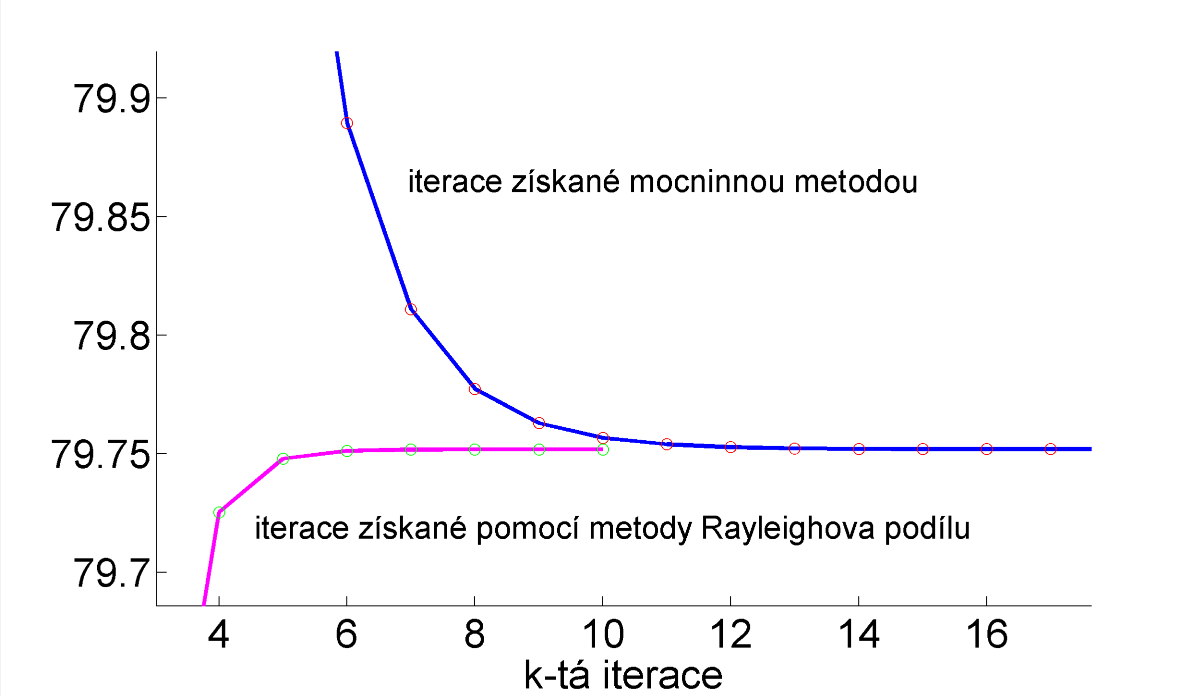
výsledky v MATLABu

```
A =
    60    20    10     1
    20    50    10     2
    10    10    30     5
     1     2     5    10

>> [v,c]=eig(A,'nobalance')

v =
   0.029201136324116   0.070393944798935  -0.657594927428575  -0.749507103097250
  -0.002755406652908   0.347503151150767   0.720730957555407  -0.599817350945878
  -0.241058474917619  -0.907169537175591   0.206770509289230  -0.276007606741715
   0.970067272431118  -0.226560551059880   0.073224003781179  -0.047728910858600

c =
   8.781938031360916                   0                   0                   0
                   0  26.642118061325501                   0                   0
                   0                   0  34.824093743363321                   0
                   0                   0                   0  79.751850163950266

>> y=[1 1 1 1]'
>> alpha=(v\y)'

alpha =
   0.755454527184707  -0.715832992285768   0.343130543197241  -1.673060971643443
```

```
Mocninna metoda pro vypocet dominantniho vlastniho cisla matice A

| k |     y(1)_k    |     y(2)_k    |     y(3)_k    |     y(4)_k    ||  lambda_k
-------------------------------------------------------------------------------------
| 0 | 1.000000e+000 | 1.000000e+000 | 1.000000e+000 | 1.000000e+000 ||
| 1 | 9.100000e+001 | 8.200000e+001 | 5.500000e+001 | 1.800000e+001 || 91.0000000
| 2 | 7.668000e+003 | 6.506000e+003 | 3.470000e+003 | 7.100000e+002 || 84.2637363
| 3 | 6.256100e+005 | 5.147800e+005 | 2.493900e+005 | 4.513000e+004 || 81.5871153
| 4 | 5.037123e+007 | 4.083536e+007 | 1.911125e+007 | 3.353420e+006 || 80.5153850
| 5 | 4.033447e+009 | 3.247012e+009 | 1.502171e+009 | 2.611324e+008 || 80.0744179
| 6 | 3.222299e+011 | 2.585635e+011 | 1.191754e+011 | 2.064965e+010 || 79.8894588
| 7 | 2.571747e+013 | 2.060583e+013 | 9.486443e+012 | 1.641730e+012 || 79.8109287
| 8 | 2.051671e+015 | 1.642789e+015 | 7.560349e+014 | 1.307786e+014 || 79.7773243
| 9 | 1.636471e+017 | 1.309947e+017 | 6.027953e+016 | 1.042521e+016 || 79.7628684
|10 | 1.305194e+019 | 1.044633e+019 | 4.806931e+018 | 8.312864e+017 || 79.7566267
|11 | 1.040944e+021 | 8.330871e+020 | 3.833471e+020 | 6.629211e+019 || 79.7539244
|12 | 8.301813e+022 | 6.643928e+022 | 3.057218e+022 | 5.286774e+021 || 79.7527521
|13 | 6.620882e+024 | 5.298622e+024 | 2.438173e+024 | 4.216253e+023 || 79.7522427
|14 | 5.280287e+026 | 4.225737e+026 | 1.944484e+026 | 3.362525e+025 || 79.7520212
|15 | 4.211131e+028 | 3.370099e+028 | 1.550760e+028 | 2.681670e+027 || 79.7519247
|16 | 3.358456e+030 | 2.687715e+030 | 1.236759e+030 | 2.138680e+029 || 79.7518827
|17 | 2.678431e+032 | 2.143502e+032 | 9.863383e+031 | 1.705636e+031 || 79.7518643
|18 | 2.136099e+034 | 1.709482e+034 | 7.866230e+033 | 1.360276e+033 || 79.7518563
```

```
Metoda Rayleighova podilu pro vypocet dominantniho vlastniho cisla matice A

| k |     y(1)_k     |     y(2)_k     |     y(3)_k     |     y(4)_k     ||  lambda_k
-----------------------------------------------------------------------------------------
| 0 | 1.000000e+000 | 1.000000e+000 | 1.000000e+000 | 1.000000e+000 ||
| 1 | 9.100000e+001 | 8.200000e+001 | 5.500000e+001 | 1.800000e+001 || 61.5000000
| 2 | 7.668000e+003 | 6.506000e+003 | 3.470000e+003 | 7.100000e+002 || 78.1796884
| 3 | 6.256100e+005 | 5.147800e+005 | 2.493900e+005 | 4.513000e+004 || 79.5606714
| 4 | 5.037123e+007 | 4.083536e+007 | 1.911125e+007 | 3.353420e+006 || 79.7252270
| 5 | 4.033447e+009 | 3.247012e+009 | 1.502171e+009 | 2.611324e+008 || 79.7478446
| 6 | 3.222299e+011 | 2.585635e+011 | 1.191754e+011 | 2.064965e+010 || 79.7512057
| 7 | 2.571747e+013 | 2.060583e+013 | 9.486443e+012 | 1.641730e+012 || 79.7517406
| 8 | 2.051671e+015 | 1.642789e+015 | 7.560349e+014 | 1.307786e+014 || 79.7518308
| 9 | 1.636471e+017 | 1.309947e+017 | 6.027953e+016 | 1.042521e+016 || 79.7518466
|10 | 1.305194e+019 | 1.044633e+019 | 4.806931e+018 | 8.312864e+017 || 79.7518495
```





Poznámka:

Pokud jsme vypočítali $\lambda_1, \mathbf{v}_1$ a chceme určit další vlastní čísla, resp. vlastní vektory $\lambda_2, \mathbf{v}_2, \lambda_3, \mathbf{v}_3, \ldots$ (ovšem ne všechny), můžeme použít metody využívající znalosti $\lambda_1, \mathbf{v}_1$ atd.

- **Maticová redukce**

Věta: Nechť λ_1 je vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{v}_1$ jemu odpovídající vlastní vektor. Nechť $\mathbf{w}$ je libovolný vektor, pro který $\mathbf{w}^T\mathbf{v}_1 = 1$. Pak matice

$$\boxed{W_1 = \mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{w}^T}$$

má stejná vlastní čísla jako matice $\mathbf{A}$, s výjimkou vlastního čísla λ_1, které je nahrazeno číslem 0 ($\mathbf{W}_1 \ldots$ redukovaná matice).

Otázka: Jak volit vektor $\mathbf{w}$?

1. Hotellingova redukce

   $\mathbf{w} \ldots$ levý vlastní vektor vlastního čísla λ_1 (je normalizován: $\mathbf{w}^T\mathbf{v}_1 = 1$)

   obvykle levý vlastní vektor neznáme a může být $\mathbf{w}^T\mathbf{v}_1 = 0$

   užijeme tuto metodu pro symetrické matice, protože potom $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1$

   (tj. pravý a levý vlastní vektor odpovídající stejnému vlastnímu číslu je stejný)

2. Wielandtova redukce

   (viz literatura)

3. podobnostní redukce

   (viz literatura)

- **Anihilační postupy**

Je-li $\mathbf{w}$ libovolný vektor a $\lambda_1, \mathbf{v}_1$ vlastní číslo a vektor matice $\mathbf{A}$, pak vektor

$$\boxed{\mathbf{u} = (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{w}}$$

nemá složku ve směru vektoru $\mathbf{v}_1$

Cv. vyjádříme vektor $\mathbf{w}$ jako lineární kombinaci vlastních vektorů $\mathbf{v}_i$ a ověříme

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{u} = (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\beta_i \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{v}_i}_{\lambda_i \mathbf{v}_i} - \beta_i \lambda_1 \mathbf{v}_i) = \beta_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 - \beta_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \sum_{i=2}^{n} (\beta_i \lambda_i \mathbf{v}_i - \lambda_1 \beta_i \mathbf{v}_i) =$$

$$= 0 \cdot \mathbf{v}_1 + \sum_{i=2}^{n} \beta_i (\lambda_i - \lambda_1) \mathbf{v}_i$$

□

- Použijeme-li $\mathbf{u}$ jako vstup do mocninné metody, získáme λ_2, v_2 (pozor na problém se zaokrouhlovacími chybami).
- Abychom odstranili tento problém, odbouráváme stále složku ve směru $\mathbf{v}_1$

$$\mathbf{u} = (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{u}$$

Charakteristika metod na řešení úplného problému:

1) metody založené na výpočtech vlastních čísel **pomocí charakteristického polynomu**

   Nevýhodné pro velká n (řád matice $\mathbf{A}$), protože je obtížné vypočítat $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ z definice determinantu.

2) **metody využívající podobnosti matic**

   Tato kategorie metod využívá faktu, že podobné matice mají stejná vlastní čísla.

   Princip: konstruujeme posloupnost navzájem podobných matic, která konverguje k matici, jejíž vlastní čísla se dají jednoduchým způsobem určit.

3) **smíšené metody**

   založené na převodu obecné matice na matici třídiagonální (např. Givensova, Householderova a Lanczosova metoda) a následný efektivní výpočet kořenů charakteristického polynomu této upravené matice.

Metoda LU-rozkladu (**LR-transformace**, **LR-algoritmus**)
(Lower-Upper, Left-Right)

$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ ... rozklad matice $\mathbf{A}$ na dolní trojúhelníkovou matici $\mathbf{L}$ a horní trojúhelníkovou matici $\mathbf{U}$, kde na diagonále matice $\mathbf{L}$ jsou pro jednoznačnost rokladu jednotky.

Sestrojíme matici $\mathbf{B}$, která bude podobná matici $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{L} \qquad (\mathbf{U} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{L} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{L}).$$

Postup:

Sestrojíme posloupnost matic $\mathbf{A}_k$:

(i) $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}, \quad k = 0$

(ii) provedeme LU rozklad matice $\mathbf{A}_k = \mathbf{L}_k \mathbf{U}_k$

(iii) sestrojíme matici $\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{U}_k \mathbf{L}_k$

(iv) je-li matice $\mathbf{A}_{k+1}$ horní trojúhelníková $\Rightarrow$ konec,
jinak $k = k + 1$ a jdi na (ii)

Poznámka:

Dá se ukázat, že když matice $\mathbf{B}_k = \mathbf{L}_0 \mathbf{L}_1 \ldots \mathbf{L}_k$ konvergují k regulární matici, potom matice $\mathbf{A}_k$ také konvergují, a to k horní trojúhelníkové matici s vlastními čísly na diagonále. Platí

$$\mathbf{A}_{k+1} = \underbrace{\mathbf{L}_k^{-1} \mathbf{A}_k}_{\mathbf{U}_k} \mathbf{L}_k$$

a tedy

$$\mathbf{A}_{k+1} = \underbrace{\mathbf{L}_k^{-1} \mathbf{L}_{k-1}^{-1} \ldots \mathbf{L}_0^{-1}}_{\mathbf{B}_{k+1}^{-1}} \mathbf{A}_0 \underbrace{\mathbf{L}_0 \mathbf{L}_1 \ldots \mathbf{L}_k}_{\mathbf{B}_{k+1}}$$

Poznámka:

Matice $\mathbf{B}_k$ konvergují k matici, jejíž sloupce tvoří vlastní vektory matice $\mathbf{A}$.
Pro symetrickou matici $\mathbf{A}$ je důkaz zřejmý

$$\mathbf{B}_{k+1} \underbrace{\mathbf{A}_{k+1}}_{\to \mathbf{\Lambda}} = \mathbf{A}\mathbf{B}_{k+1}.$$

Poznámka:

Je-li matice $\mathbf{A}$ symetrická a pozitivně definitní, provádíme LU-rozklad ve smyslu Choleského rozkladu $(\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T)$. Potom lze ukázat, že $\mathbf{A}_k$ konverguje k diagonální matici.

Nevýhody:

- pomalá konvergence posloupnosti $\mathbf{A}_k$
- velký počet operací pro matice větších řádů
- nelze realizovat pro obecné matice $\mathbf{A}$

Metody ortogonálních transformací

Použijeme podobný princip jako v předchozím případě, tj. sestrojíme posloupnost navzájem podobných matic $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, ... tak, že

$$\boxed{\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{Q}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{Q}_k, \qquad k = 0, 1, 2 \ldots}$$

Požadujeme, aby posloupnost $\mathbf{A}_k$ konvergovala k matici, jejíž vlastní čísla lehce určíme. Ortogonální matici $\mathbf{Q}_k$ vybíráme speciálním postupem. Výhodou tohoto algoritmu je numerická stabilita.

Poznámka: Pro obecnou matici používáme metodu **QU-rozkladu** (**QR-transformace**).

$\mathbf{A} = \mathbf{QU}$ $\mathbf{Q}\ldots$ ortogonální matice ($\mathbf{QQ}^{\mathsf{T}} = \mathbf{I}$, tj. $\mathbf{Q}^{\mathsf{T}} = \mathbf{Q}^{-1}$)

$\mathbf{U}\ldots$ horní trojúhelníková matice

$\mathbf{B} = \mathbf{UQ}$ $(\mathbf{U} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A} \ \Rightarrow\ \mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ} \ \Rightarrow\ \mathbf{B} = \mathbf{Q}^{T}\mathbf{AQ})$.

Motivační příklad:

Příkladem ortogonální matice je matice rovinné rotace o úhel α:

$$\mathbf{Q}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \overset{\text{ozn}}{=} \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}.$$

Pro matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

stanovte matici $\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{T}(\alpha)\mathbf{A}\mathbf{Q}(\alpha)$ tak, aby $b_{12} = 0$.

Řešení:

Rozepíšeme si prvky matice $\mathbf{B}$:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2c+s & c+3s \\ -2s+c & -s+3c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2c^2+cs+cs+3s^2 & -2cs-s^2+c^2+3cs \\ -2cs+c^2-s^2+3cs & 2s^2-cs-cs+3c^2 \end{bmatrix}.$$

Pro splnění podmínky $b_{12} = 0$ musí platit

$$-2cs - s^2 + c^2 + 3cs = cs - s^2 + c^2 = 0,$$

tj.

$$\underbrace{\cos\alpha\sin\alpha}_{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}\underbrace{-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{+\cos 2\alpha} = 0.$$

$$\cos 2\alpha = -\frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

$$-2 = \tan 2\alpha$$

$$\underline{\alpha \doteq -0,5535}$$

Po dosazení dostaneme, že

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3,6180 & 0 \\ 0 & 1,3819 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{B}$ je diagonální matice s vlastními čísly na diagonále a stejná vlastní čísla má i matice $\mathbf{A}$. □

Poznámka:

Podobně jako v předchozí metodě, pro dostatečně velké k je $\mathbf{A}_k$ horní trojúhelníková matice a vlastní vektory jsou (přibližně) sloupce matice $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_{k-1}$.

Poznámka:

Pro symetrickou matici $\mathbf{A}$ vede uvedený postup na tzv. **metodu Jacobiovy diagonalizace**.

Jacobiova diagonalizace (speciální případ QR-transformace)

Věta: Je-li $\mathbf{A}$ reálná symetrická matice, potom existuje ortogonální matice $\mathbf{Q}$ tak, že

$$\boxed{\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}}$$

($\mathbf{\Lambda}$ ... spektrální matice = diagonální matice s vlastními čísly na diagonále).

Princip: Matici $\mathbf{Q}$ získáme součinem matic $\mathbf{Q}_{p,q}(\alpha)$, kde

$$\mathbf{Q}_{p,q}(\alpha) = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccccccc} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& \cos\alpha & \ldots & \ldots & -\sin\alpha && \\ &&& \vdots & 1 && \vdots && \\ &&& \vdots && \ddots & \vdots && \\ &&& \vdots && 1 & \vdots && \\ &&& \sin\alpha & \ldots & \ldots & \cos\alpha && \\ &&&&&&& 1 & \\ &&&&&&&& \ddots \\ &&&&&&&&& 1 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} \uparrow \quad & \quad \uparrow \\ p\text{-tý sloupec} & q\text{-tý sloupec} \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow p\text{-tý řádek} \\ \\ \\ \\ \leftarrow q\text{-tý řádek} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

a parametr α volíme tak, abychom vynulovali prvek v pozici (p, q) a tedy i v pozici (q, p).

(D.cv. $\mathbf{Q}_{pq}^T(\alpha)\mathbf{Q}_{pq}(\alpha) = \mathbf{I}$.)

$$\mathbf{B} \overset{ozn.}{=} \boxed{\mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_{pq}^T(\alpha)\mathbf{A}\mathbf{Q}_{pq}(\alpha)}$$

$$b_{p,q} = \underbrace{\left[\ldots\ \cos\alpha\ \ldots\ \sin\alpha\ \ldots\right]}_{p\text{-tý řádek } \mathbf{Q}_{pq}^T} \mathbf{A} \underbrace{\left[\ldots\ -\sin\alpha\ \ldots\ \cos\alpha\ \ldots\right]^T}_{q\text{-tý sloupec } \mathbf{Q}_{pq}}$$

$$b_{p,q} = a_{pq}\,(\cos\alpha^2 - \sin\alpha^2) + (a_{qq} - a_{pp})\cos\alpha\sin\alpha$$

požadujeme, aby $b_{p,q} = 0$:

$$a_{pq}\cos 2\alpha + (a_{qq}-a_{pp})\,\frac{1}{2}\sin 2\alpha = 0 \qquad \Big/ \cdot 2$$

$$2a_{pq}\cos 2\alpha = -(a_{qq}-a_{pp})\sin 2\alpha \qquad \Big/ : \cos 2\alpha \qquad \Big/ : (a_{qq}-a_{pp})$$

$$\boxed{-\frac{2a_{pq}}{a_{qq}-a_{pp}} = \tan 2\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \dots}$$

Poznámka:

Při výpočtech nemusíme určovat úhel α, ale stačí nám vyjádřit $\sin\alpha$ a $\cos\alpha$. Lze odvodit vzorce pro

$$\sin\alpha = \dots \qquad\qquad \cos\alpha = \dots$$

Celkovou matici získáme takto $\boxed{\mathbf{Q} = \prod_{p,q} \mathbf{Q}_{p,q}(\alpha)}$ - postupně nulujeme všechny nediagonální prvky.

Poznámka:

Zbývá zvolit strategii na volbu indexů p a q. Nejjednodušší je postupně nulovat všechny mimodiagonální prvky (podobně jako v Gaussově eliminační metodě pro řešení soustavy lineárních rovnic). Uvědomme si ale, že se získané nuly z předchozího kroku obecně nezachovají. Další možností je nulovat vždy mimodiagonální prvek, který je největší v absolutní hodnotě (zde je třeba v každé iteraci vyhledat tento prvek, což zpomalí výpočet). Iterační proces zastavíme, je-li norma trojúhelníkové matice pod diagonálou menší než zadaná tolerance.

1. varianta - postupné nulování

2. varianta - nulování největšího prvku (v abs. hodnotě)

Vlastní vektory:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1^T \mathbf{A} \mathbf{Q}_1$$
$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{Q}_2^T \mathbf{A}_1 \mathbf{Q}_2$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{A}_k = \mathbf{Q}_k^T \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{Q}_k$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{A}_k = \underbrace{\mathbf{Q}_k^T \mathbf{Q}_{k-1}^T \dots \mathbf{Q}_1^T}_{\mathbf{P}_k^T}\ \mathbf{A}\ \underbrace{\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \dots \mathbf{Q}_k}_{\mathbf{P}_k}$$

$$\mathbf{P}_k \underbrace{\mathbf{A}_k}_{(*)} = \mathbf{A} \underbrace{\mathbf{P}_k}_{(**)}$$

$(*)$ $\mathbf{A}_k \to \mathbf{\Lambda}$ $(k \to \infty)$ $(**)$ $\mathbf{P}_k \to \mathbf{X}$ ... jejíž sloupce jsou vlastní vektory matice $\mathbf{A}$

Givensova transformace

- Slouží pro převod matice $\mathbf{A}$ na třídiagonální tvar (předpokládáme, že $\mathbf{A}$ je symetrická)
- Opět používáme podobnostní transformace

$$\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{Q}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{Q}_k$$

matice $\mathbf{Q}_k$ jsou opět maticemi rovinné rotace, ovšem jsou voleny tak, abychom zachovali již anulované prvky

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \frac{a_{21}}{d} & -\frac{a_{31}}{d} & & & \\ & \frac{a_{31}}{d} & \frac{a_{21}}{d} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \qquad d = \sqrt{a_{21}^2 + a_{31}^2}$$

$\mathbf{A}_2 = \mathbf{Q}_1^T \mathbf{A} \mathbf{Q}_1$ bude mít 0 v pozici (3,1) a (1,3)

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \frac{a_{21}}{d} & & -\frac{a_{41}}{d} & & & \\ & & 1 & & & & \\ & \frac{a_{41}}{d} & & \frac{a_{21}}{d} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \qquad d = \sqrt{a_{21}^2 + a_{41}^2}$$

$\mathbf{A}_3 = \mathbf{Q}_2^T \mathbf{A}_2 \mathbf{Q}_2$ bude mít 0 v pozici (4,1) a (1,4)

---

atd.

Příklad: Převeďte matici $\mathbf{A}$ na třídiagonální tvar.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$a_{21} = 4, \quad a_{31} = 3, \quad d = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$\underline{\mathbf{Q}_1^T \mathbf{Q}_1 = \mathbf{I}\ ?}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_1^T \mathbf{A} \mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & \frac{26}{5} & \frac{39}{5} \\ 0 & \frac{18}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & \frac{221}{25} & \frac{78}{25} \\ 0 & \frac{78}{25} & -\frac{46}{25} \end{bmatrix}$$

Efektivní výpočet hodnoty charakteristického polynomu pro třídiagonální matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & & \\ & b_3 & a_3 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ & & & & b_n & a_n \end{bmatrix}$$

$f_{-1}(\lambda) = 0$

$f_0(\lambda) = 1$

$f_k(\lambda) = (a_k - \lambda)\, f_{k-1}(\lambda) \;-\; b_k\, c_{k-1}\, f_{k-2}(\lambda) \qquad k = 1, 2, \dots n$

$f_n(\lambda) = p_{\mathbf{A}}(\lambda)$

$$\underbrace{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}}_{=\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} a_1-\lambda & c_1 & & & & \\ b_2 & a_2-\lambda & c_2 & & & \\ & b_3 & a_3-\lambda & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & b_{n-1} & a_{n-1}-\lambda & c_{n-1} \\ & & & & b_n & a_n-\lambda \end{bmatrix}$$

rozvoj podle posledního řádku:

$$\det \mathbf{M} = (a_n-\lambda)\det(\mathbf{M}_{n-1}) - b_n\, c_{n-1}\det(\mathbf{M}_{n-2})$$

$$(\mathbf{M}_{n-1} \quad \dots \quad \text{prvních} \quad n-1 \text{ řádků a sloupců z } \mathbf{M})$$

$$\mathbf{M}_1 = a_1-\lambda = \det(\mathbf{M}_1)$$

$$\mathbf{M}_0 = 1$$

$$\mathbf{M}_{-1} = 0$$

Podstata výpočtu vlastních čísel třídiagonální matice pomocí jednoduchého vyjadřování hodnoty charakteristického polynomu metodou bisekce:

Příklad:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Zvolíme interval $\langle 0,5\rangle$ ... v něm očekáváme všechna vlastní čísla

Výpočtem snadno určíme

$$\boxed{f_3(0) = p_{\mathbf{A}}(0) = 4}$$

$$f_{-1}(0) = 0$$

$$f_0(0) = 1$$

$$f_1(0) = (\underbrace{a_1}_{=2}-0)\,\underbrace{f_0(0)}_{=1} - b_1\,c_0\,\underbrace{f_{-1}(0)}_{=0} = 2$$

$$f_2(0) = (\underbrace{a_2}_{=2}-0)\,\underbrace{f_1(0)}_{=2} - \underbrace{b_2}_{=-1}\,\underbrace{c_1}_{=-1}\,\underbrace{f_0(0)}_{=1} = 3$$

$$f_3(0) = (\underbrace{a_3}_{=2}-0)\,\underbrace{f_2(0)}_{=3} - \underbrace{b_3}_{=-1}\,\underbrace{c_2}_{=-1}\,\underbrace{f_1(0)}_{=2} = 4$$

$$\boxed{f_3(5) = p_{\mathbf{A}}(5) = -21}$$

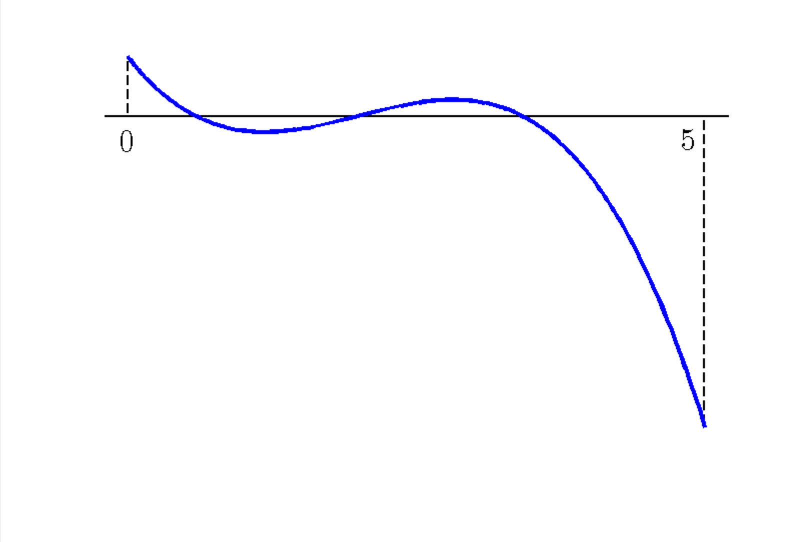
$$f_{-1}(5) = 0$$

$$f_0(5) = 1$$

$$f_1(5) = (\underbrace{a_1}_{=2}-5)\,\underbrace{f_0(5)}_{=1} - b_1\,c_0\,\underbrace{f_{-1}(5)}_{=0} = -3$$

$$f_2(5) = (\underbrace{a_2}_{=2} - 5)\underbrace{f_1(5)}_{=-3} - \underbrace{b_2}_{=-1}\underbrace{c_1}_{=-1}\underbrace{f_0(5)}_{=1} = 8$$

$$f_3(5) = (\underbrace{a_3}_{=2} - 5)\underbrace{f_2(5)}_{=8} - \underbrace{b_3}_{=-1}\underbrace{c_2}_{=-1}\underbrace{f_1(5)}_{=-3} = -21$$



Vypočteme střed intervalu, $s = \frac{0+5}{2} = 2{,}5$ a určíme $f_3(2{,}5)$ ...