Kapitola 4. SLAR - iterační metody

Metody na řešení SLAR

- přímé (GEM, metoda LU-rozkladu) ✓
- iterační
- gradientní

Iterační metody najdou přesné řešení teoreticky až po nekonečně mnoha krocích.

Pamatujme si, že v numerické praxi používáme pro řešení soustav s plnou maticí **přímé metody**, zatímco pro speciální (řídké) matice používáme **iterační metody**.

Toto rozdělení je dáno **výpočetní složitostí** těchto metod, tj. počtem matematických operací sčítání, odčítání, násobení a dělení nutných k získání výsledku.

Poznámka: V případě plné matice je výpočetní cena v každé iteraci řádu n^2, srovnáme-li toto s celkovou výpočetní cenou přímých metod, tj. řádově $2/3\ n^3$, vidíme, že má-li být výpočetní složitost iterační metody stejná jako u přímé metody, musela by iterační metoda najít řešení (s předem zadanou přesností) řádově po n iteracích. Na druhou stranu v případě speciální (řídké) matice je výhodné použít iterační metodu.

Příklad

Uvažujme rovnici

$$9x = 9$$

Přesné řešení je

$$x^* = 1$$

Rovnici lze přepsat např. na tvar

$$10x - x = 9$$

$$x = \frac{9 + x}{10}$$

- viz metoda prosté iterace pro nelineární rovnice
- nyní uvažujeme lineární rovnice, proto předpis funkce $\varphi(x)$ může být lineární
- řešení hledáme pomocí rekurentní formule (volíme např. $x^{(0)} = 0$)

$$x^{(k+1)} = \frac{9 + x^{(k)}}{10}$$

Dostáváme

$$x^{(1)} = 0.9$$

$$x^{(2)} = 0.99$$
$$x^{(3)} = 0.999$$
$$x^{(4)} = 0.9999$$

Zastavíme např. pomocí podmínky na rozdíl dvou po sobě jdoucích iterací $|x^{(4)} - x^{(3)}| < \varepsilon = 0.001$

Uvedený postup realizujeme pro soustavy.

Podobně jako v metodě prosté iterace pro nelineární soustavy přepíšeme soustavu

$$\mathbf{Ax} - \mathbf{b} = \mathbf{o} \qquad \longleftrightarrow \qquad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$$

na tvar

$$\mathbf{x} = \mathbf{Hx} + \mathbf{g} \qquad \longleftrightarrow \qquad \mathbf{x} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$$

Uvažujeme-li soustavu lineárních algebraických rovnic, tj. funkce $\mathbf{F}$ je lineární, můžeme potom najít lineární předpis pro funkci $\mathbf{\Phi}$.

Všechny iterační metody pro řešení soustavy lineárních algebraických rovnic budou používat iterační formuli

$$\boxed{\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}}$$

samozřejmě s různou iterační maticí $\mathbf{H}$ a vektorem $\mathbf{g}$ a je zřejmé, že o kvalitě metody rozhodují právě vlastnosti matice $\mathbf{H}$.

Počáteční aproximaci $\mathbf{x}^{(0)}$ zvolíme a výpočet ukončíme pomocí zastavovací podmínky

$$||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}|| < \varepsilon$$

Jacobiova metoda

Princip:

Z i-té rovnice vyjádříme i-tou složku vektoru $\mathbf{x}$

i-tá rovnice: $\quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$

pro $a_{ii} \neq 0$: $\quad x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} a_{ij}x_j \right)$

Iterační formule:

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} \right)}$$

Gaussova-Seidelova metoda

Princip:

Stejný jako u Jacobiovy metody s tím rozdílem, že jestliže při výpočtu $(k+1)$-iterace již známe $(k+1)$-iteraci některých složek, tak ji použijeme.

Z i-té rovnice vyjádříme i-tou složku vektoru $\mathbf{x}$

i-tá rovnice: $$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

pro $a_{ii} \neq 0$: $$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} a_{ij}x_j\right)$$

Iterační formule:

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)}$$

Relaxační metoda SOR

Princip:

Vyjdeme z Gaussovy-Seidelovy metody jejíž iterační formule je

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right),$$

dále vyjádříme $(k+1)$-ní iteraci pomocí k-té iterace a příslušné změny (tj. přičteme a odečteme $x_i^{(k)}$)

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \underbrace{\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)}_{=r_i^{(k)}},$$

k urychlení výpočtu použijeme ideu, že nepřičteme k předchozí iteraci změnu $r_i^{(k)}$, ale její násobek $\omega r_i^{(k)}$

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega \cdot \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} \underbrace{- \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}}_{-a_{ii}x_i^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}}\right)$$

Iterační formule:

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = (1-\omega)\, x_i^{(k)} + \omega \underbrace{\frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)}_{x_i^{(k+1)} \text{ z G-S}}}$$

Poznámka: $(k+1)$-iterace metody SOR je lineární kombinací $(k+1)$-iterace získané Gauss-Seidlovou metodou a předchozí k-té iterace metody SOR

$$x_i^{(k+1)} = \omega\, x_{i\,\mathrm{GS}}^{(k+1)} + (1-\omega)\, x_i^{(k)}.$$

Maticový zápis iteračních metod

Nejprve rozložíme matici $\mathbf{A}$:

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}},$$

kde $\mathbf{L}$ je dolní trojúhelníková část matice $\mathbf{A}$ s nulami na diagonále, $\mathbf{D}$ je diagonální matice a $\mathbf{U}$ je horní trojúhelníková část matice $\mathbf{A}$ s nulami na diagonále.

Jacobiova metoda

$$\begin{aligned}
\mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\
(\mathbf{L}+\mathbf{D}+\mathbf{U})\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
\mathbf{Dx} + (\mathbf{L}+\mathbf{U})\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
\mathbf{Dx} &= \mathbf{b} - (\mathbf{L}+\mathbf{U})\mathbf{x} \\
\mathbf{x} &= \underbrace{-\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})}_{\mathbf{H}_J}\mathbf{x} + \underbrace{\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{g}_J}
\end{aligned}$$

Gauss-Seidlova metoda

$$\begin{aligned}
\mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\
(\mathbf{L}+\mathbf{D}+\mathbf{U})\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
(\mathbf{L}+\mathbf{D})\mathbf{x} + \mathbf{Ux} &= \mathbf{b} \\
(\mathbf{L}+\mathbf{D})\mathbf{x} &= \mathbf{b} - \mathbf{Ux} \\
\mathbf{x} &= \underbrace{-(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U}}_{\mathbf{H}_{GS}}\mathbf{x} + \underbrace{(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{g}_{GS}}
\end{aligned}$$

Relaxační metoda SOR

$$\begin{aligned}
\mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\
\omega\mathbf{Ax} &= \omega\mathbf{b} \qquad\qquad / + \mathbf{Dx} \\
(\omega\mathbf{A}+\mathbf{D})\mathbf{x} &= \omega\mathbf{b}+\mathbf{Dx} \\
[\omega(\mathbf{L}+\mathbf{D}+\mathbf{U})+\mathbf{D})]\,\mathbf{x} &= \omega\mathbf{b}+\mathbf{Dx} \\
(\omega\mathbf{L}+\mathbf{D})\mathbf{x} &= \omega\mathbf{b}+\mathbf{Dx}-\omega\mathbf{Dx}-\omega\mathbf{Ux} \\
(\omega\mathbf{L}+\mathbf{D})\mathbf{x} &= [(1-\omega)\mathbf{D}-\omega\mathbf{U}]\,\mathbf{x}+\omega\mathbf{b} \\
\mathbf{x} &= \underbrace{(\omega\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}[(1-\omega)\mathbf{D}-\omega\mathbf{U}]}_{\mathbf{H}_{SOR}}\mathbf{x}+\underbrace{(\omega\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\omega\mathbf{b}}_{\mathbf{g}_{SOR}}
\end{aligned}$$

Iterační metoda je dána formulí

$$\boxed{\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{Hx}^{(k)} + \mathbf{g}}$$

Pro přesné řešení $\mathbf{x}^*$ musí platit

- $\mathbf{x}^* = \mathbf{Hx}^* + \mathbf{g}$
- $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{HA}^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{g}} \qquad (*)$$

Definice: Iterační metodu $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{Hx}^{(k)} + \mathbf{g}$ nazveme **konzistentní**, pokud platí $(*)$.

Poznámka: Uvedené metody jsou konzistentní.

- např. pro Jacobiovu metodu musí platit:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \underbrace{-\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})}_{\mathbf{H}_J}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} + \underbrace{\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{g}_J}$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \underbrace{\mathbf{D}^{-1}\left(\underbrace{-(\mathbf{L}+\mathbf{U})+\mathbf{A}}_{\mathbf{D}}\right)}_{\mathbf{I}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

- D.cv: Ukažte, že Gauss-Seidelova metoda a metoda SOR jsou konzistentní.

Definice: Iterační metoda $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{Hx}^{(k)} + \mathbf{g}$ se nazývá **konvergentní**, jestliže pro každou počáteční aproximaci $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}$ platí:

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^* \quad (= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b})}.$$

Chyba k-té iterace:

$$\boxed{\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*}.$$

Nutná a postačující podmínka konvergence metody

iterační předpis $\qquad \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{Hx}^{(k-1)} + \mathbf{g}$

konzistentní metoda $\qquad \mathbf{x}^* = \mathbf{Hx}^* + \mathbf{g}$

po odečtení dostáváme

$$\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^* = \mathbf{H}(\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x}^*)$$
$$\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{H}\mathbf{e}^{(k-1)}$$

Platí:

$$\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{H}\mathbf{e}^{(k-1)} = \mathbf{H}^2\mathbf{e}^{(k-2)} = \ \dots \ = \mathbf{H}^k\mathbf{e}^{(0)}$$

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^* \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{0}$$

Věta: Daná konzistentní iterační metoda $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{H}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}$ konverguje pro libovolné $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když je **stabilní**, tj.

$$\boxed{\varrho(\mathbf{H}) = \max_i |\lambda_i(\mathbf{H})| < 1},$$

kde číslo $\varrho(\mathbf{H})$ nazýváme **spektrální poloměr** matice $\mathbf{H}$ a $\lambda_i(\mathbf{H})$ jsou vlastní čísla matice $\mathbf{H}$.

Poznámka: Připomeňme souvislost s metodou prosté iterace pro řešení soustav nelineárních rovnic. Funkce $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$ z přepisu $\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$ musela splňovat podmínku (b') ... (pokud byla diferencovatelná)

$$\boxed{\exists q \in \langle 0, 1) : \quad \|\Phi'(x)\| \le q \quad \forall x}$$

V našem případě je $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{g} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\Phi}'(\mathbf{x}) = \mathbf{H}.$

Tj.

$$\boxed{\|\,\mathbf{H}\,\| < 1}.$$

Spektrální poloměr $\varrho(\mathbf{H})$ je také normou matice $\mathbf{H}$, tj. $\boxed{\varrho(\mathbf{H}) < 1}$.

Předchozí věta je silnější (kritérium) $\Leftrightarrow$

Věta pro prostou iteraci uváděla postačující podmínky $\Rightarrow$

Poznámka: Určovat $\varrho(\mathbf{H})$ je celkem drahé, proto za chvíli uvedeme větu (postačující podmínky) jejíž předpoklady se ověří snadněji.

Definice:

Maticovou normu $\|\,.\,\|$ nazveme **multiplikativní**, splňuje-li pro všechny čtvercové matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ řádu n vztah

$$\boxed{\|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\| \le \|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{B}\|}$$

Příklad 2

Řešme soustavu $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ Jacobiovou metodou.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0,9 & 0,9 \\ 0,9 & 1 & 0,9 \\ 0,9 & 0,9 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2,8 \\ 2,8 \\ 2,8 \end{bmatrix}, \quad \text{přesné řešení } \mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & -0,9 & -0,9 \\ -0,9 & 0 & -0,9 \\ -0,9 & -0,9 & 0 \end{bmatrix}$$

... vlastní čísla jsou $-1,8;\ 0,9;\ 0,9 \quad \Rightarrow \quad \varrho(\mathbf{H}) = 1,8 > 1 \quad \Rightarrow$ metoda diverguje !!!

Uvažujme normu $||\mathbf{H}||_M = \max_{i,j} |h_{ij}|$

D.cv. Ukažte, že $||.||_M$ splňuje vlastnosti normy.

$$\boxed{||\mathbf{H}||_M = 0,9 < 1 \quad !!!}$$

$||\,.\,||_M$ není multiplikativní:

např:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$||\mathbf{A}||_M = 1, \quad ||\mathbf{B}||_M = 2, \quad ||\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}||_M = 4$$

$$||\mathbf{A}||_M \cdot ||\mathbf{B}||_M = 2 \underbrace{<}_{!!!} ||\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}||_M = 4$$

Věta: Pro každou multiplikativní maticovou normu $||\,.\,||$ a čtvercovou matici $\mathbf{A}$ platí:

$$\boxed{\varrho(\mathbf{A}) \leq ||\mathbf{A}||}.$$

Důkaz:

$$\varrho(\mathbf{A}) = \max_i\{|\lambda_i|\} = |\lambda_p|$$

- nechť číslu λ_p odpovídá normovaný vlastní vektor $\mathbf{v}_p$ $\quad (\nu(\mathbf{v}_p) = 1)$
- potom

$$\varrho(\mathbf{A}) = |\lambda_p| \cdot \nu(\mathbf{v}_p) = \nu(\lambda_p \mathbf{v}_p) = \nu(\mathbf{A}\mathbf{v}_p)$$

vlastnost kompatibilní maticové a vektorové normy:

$$\boxed{\nu(\mathbf{A}\mathbf{v}_p) \leq ||\mathbf{A}|| \cdot \nu(\mathbf{v}_p)} = ||\mathbf{A}|| \cdot 1 = ||\mathbf{A}||$$

Pomocná věta: Ke každé multiplikativní maticové normě μ existuje kompatibilní vektorová norma ν.

Důkaz: Je dána maticová norma μ.

Definujeme $\quad \nu(\mathbf{x}) = \mu([\mathbf{x}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}])$ ... splňuje vlastnosti normy

? kompatibilita:

$$\nu(\mathbf{Ax}) = \mu([\mathbf{Ax}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}]) = \mu(\mathbf{A}\,[\mathbf{x}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}]) \underbrace{\leq}_{(*)} \mu(\mathbf{A})\mu([\mathbf{x}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}]) = \mu(\mathbf{A}) \cdot \nu(\mathbf{x})$$

$(*)$ μ je multiplikativní

Věta (Postačující podmínka konvergence)

Je-li pro multiplikativní normu splněna podmínka $\boxed{\|\mathbf{H}\| \leq q < 1}$, potom posloupnost $\left\{\mathbf{x}^{(k)}\right\}$ určená konzistentní formulí

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{H}\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{g}$$

konverguje při libovolné volbě vektoru $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ a platí

$$\boxed{\lim_{k \to \infty} \mathbf{x}^{(k)} = (\mathbf{I} - \mathbf{H})^{-1}\mathbf{g} = \mathbf{x}^*}.$$

Důkaz: Důsledek kritéria a předchozí věty (jiný důkaz viz skripta).

Odhad chyby

Předpokládáme, že je splněna postačující podmínka konvergence

$$\|\mathbf{H}\| \leq q < 1$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^* &= \mathbf{H}(\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x}^*) = \\
&= \mathbf{H}(\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*) = \\
&= \mathbf{H}(\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{H}(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*)
\end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\right\| \leq q\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\right\| + q\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\right\|$$

tj.

$$\underbrace{(1-q)}_{>0}\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\right\| \leq q\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\right\|$$

a po vydělení

$$\boxed{\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\right\| \leq \frac{q}{1-q}\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\right\|}.$$

Jestliže $\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\right\| < \varepsilon$, potom

$$\boxed{\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\right\| \leq \frac{q}{1-q}\,\varepsilon}.$$

Příklad 3

Jacobiovou metodou řešte soustavu $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 14 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}}$$

$$\mathbf{H}_J = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) = \begin{bmatrix} 0 & -0,5 & -0,25 \\ -0,1 & 0 & -0,1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{g}_J = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1,75 \\ 1,2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Provedeme 5 iterací:

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k
0	0	0	0
1	1,75	1,2	1
2	0,9	0,925	1
3	1,0375	1,01	1
4	0,995	0,99625	1
5	1,001875	1,0005	1

$$\underbrace{\mathbf{x}^{(5)} - \mathbf{x}^{(4)}}_{=\mathbf{r}^{(5)}} = \begin{bmatrix} 0,006875 \\ 0,004250 \\ 0,000000 \end{bmatrix}$$

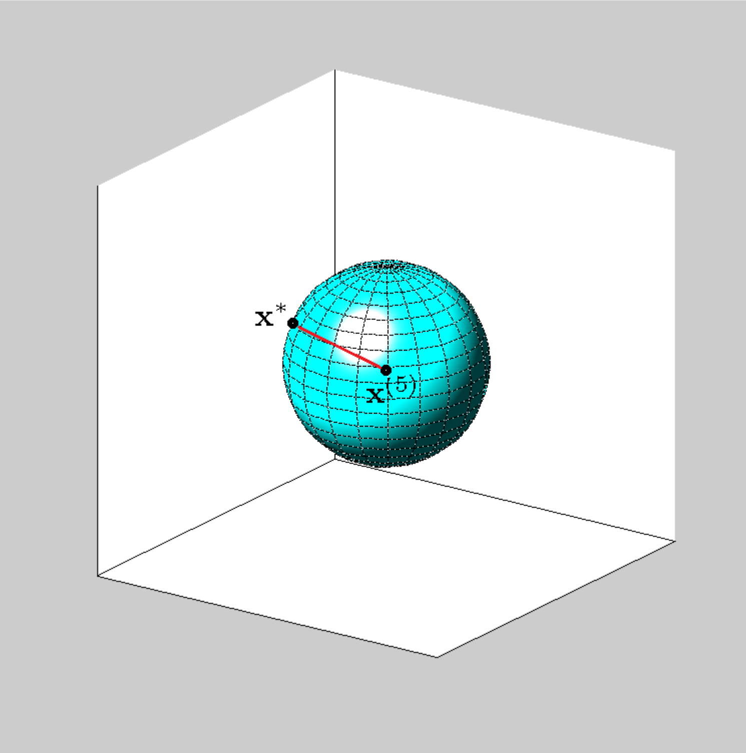
Odhadněme chybu $\mathbf{x}^{(5)}$, tj.

$$||\mathbf{x}^{(5)} - \mathbf{x}^{*}|| \le \frac{||\mathbf{H}||}{1 - ||\mathbf{H}||} \cdot ||\mathbf{x}^{(5)} - \mathbf{x}^{(4)}||$$

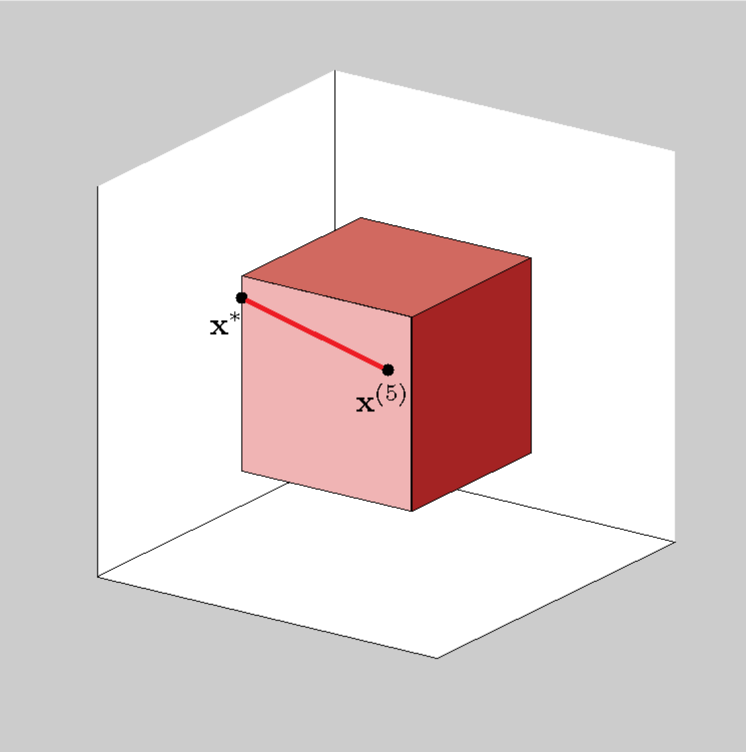
maticová norma	vektorová norma	odhad chyby
$\|\|\mathbf{H}\|\|_S = \max_k(\sum_i h_{ik}) = 0,5$	$\|\|\mathbf{r}^{(5)}\|\|_1 = \sum_i \|r_i\| = 0,011125$	$\frac{0,5}{1-0,5} \cdot 0,011125 =$ **0,011125**
$\|\|\mathbf{H}\|\|_R = \max_i(\sum_k h_{ik}) = 0,75$	$\|\|\mathbf{r}^{(5)}\|\|_\infty = \max_i \|r_i\| = 0,006875$	$\frac{0,75}{0,25} \cdot 0,006875 =$ **0,0206**
$\|\|\mathbf{H}\|\|_{SP} = \max_k \lambda_k^{\frac{1}{2}}(\mathbf{H}^H\mathbf{H}) \doteq 0,56$	$\|\|\mathbf{r}^{(5)}\|\|_2 = \sum_i r_i^2 \doteq 0,0081$	$\frac{0,56}{0,44} \cdot 0,0081 =$ **0,0103**

Geometrický význam

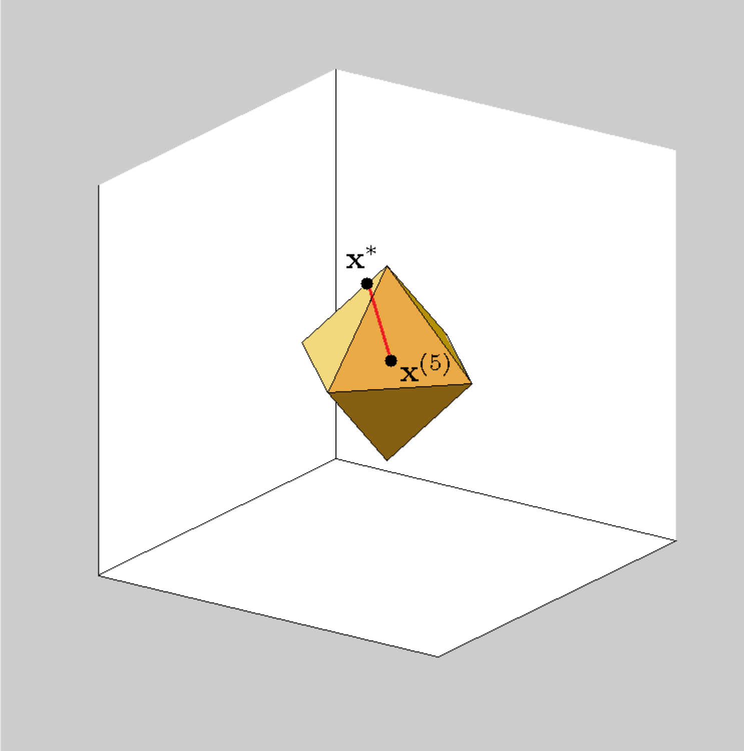
$\boxed{\|\mathbf{x}^{(5)} - \mathbf{x}^*\|_2 \leq 0,0103}$ vzdálenost $\mathbf{x}^{(5)}$ a $\mathbf{x}^*$ je menší než vypočtená hodnota



$\boxed{\|\mathbf{x}^{(5)} - \mathbf{x}^*\|_\infty \leq 0,0206}$



$\boxed{\|\mathbf{x}^{(5)} - \mathbf{x}^*\|_1 \leq 0,011125}$



Rychlost konvergence

- Lineární rychlost konvergence

$$\exists q \in (0,1)\ \exists k_0 \geq 0\ \forall k > k_0 : \quad \boxed{||\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^*|| \leq q||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*||}$$

- Superlineární rychlost konvergence

$$\boxed{||\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^*|| \leq q_k||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*||, \quad \text{kde} \quad q_k \to 0 \ (k \to \infty)}$$

- Konvergence řádu **r**

$$\boxed{||\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^*|| \leq q||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*||^{\mathsf{r}}}$$

Poznámka:

- Jacobiova, Gauss-Seidelova i SOR metoda mají lineární rychlost konvergence

$$\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^* = \mathbf{H}(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*)$$

během výpočtu se nemění iterační matice $\mathbf{H}$, jedná se o **stacionární metody**

$$||\mathbf{H}|| \leq q, \quad ||\mathbf{H}|| \quad \dots \text{ pevné číslo}$$

- Metody se superlineární rychlostí konvergence patří mezi **nestacionární procesy**

$$\boxed{\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{H}_k\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}_k}$$

V každém kroku se mohou měnit $\mathbf{H}_k$, $\mathbf{g}_k$.

Potom $||\mathbf{H}_k|| \leq q_k$, platí-li $q_k \to 0$ pak jde o superlineární metodu.

Definujeme asymptotickou rychlost konvergence

$$\boxed{R = -\log \frac{\|\mathbf{e}^{(k)}\|}{\|\mathbf{e}^{(k-1)}\|} \geq -\log \|\mathbf{H}\|},$$

ta určuje počet platných desetinných míst získaných v jednom iteračním kroku.

Prakticky:

$$\frac{\|\mathbf{e}^{(k)}\|}{\|\mathbf{e}^{(k-1)}\|} = \frac{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\|}{\|\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x}^*\|} \approx \frac{\frac{q}{1-q}\,\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|}{\frac{q}{1-q}\,\|\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x}^{(k-2)}\|}$$

Poznámka: Pro metody s lineární rychlostí konvergence (Jacobiova, Gauss-Seidelova, SOR metoda) lze pro urychlení použít **Aitkenovu extrapolační formuli** (viz dříve).

Posloupnost chyb je geometrická

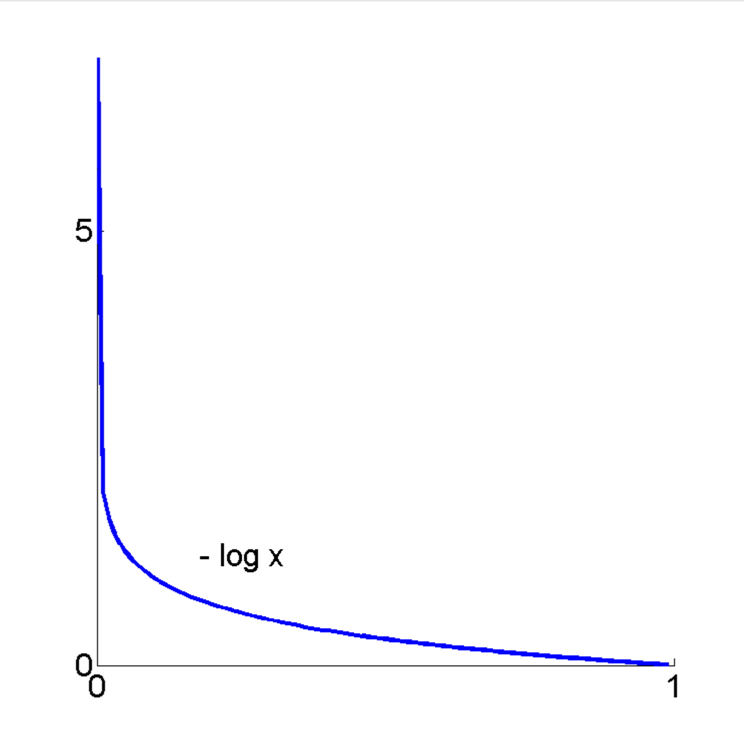
$$\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{H}\mathbf{e}^{(k-1)}$$

$$\frac{\overbrace{x_i^{(k+1)} - x_i^*}^{e_i^{(k+1)}}}{\underbrace{x_i^{(k)} - x_i^*}_{e_i^{(k)}}} \approx \frac{\overbrace{x_i^{(k)} - x_i^*}^{e_i^{(k)}}}{\underbrace{x_i^{(k-1)} - x_i^*}_{e_i^{(k-1)}}}$$

po úpravě:

$$\boxed{x_i^* \approx x_i^{(k+1)} - \frac{(x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)})^2}{x_i^{(k+1)} - 2x_i^{(k)} + x_i^{(k-1)}}}$$

Při odvození metody SOR jsme se pokusili urychlit výpočet změnou iterační matice $\mathbf{H}$ tak, aby měla menší spektrální poloměr $\varrho(\mathbf{H})$. Čím menší je $\varrho(\mathbf{H})$, tím je větší asymptotická rychlost konvergence.



Věta: Spektrální poloměr $\varrho(\mathbf{H}_{SOR})$ splňuje podmínku

$$\varrho(\mathbf{H}_{SOR}) \geq |\omega - 1| \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

Důkaz:

$$\mathbf{H}_{SOR} = (\omega\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\left[(1-\omega)\mathbf{D} - \omega\mathbf{U}\right]$$

Je známo, že součin vlastních čísel je roven determinantu

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det(\mathbf{H}_{SOR})$$

$$\underline{\det(\mathbf{H}_{SOR})} = \det\left[(\omega\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\left[(1-\omega)\mathbf{D} - \omega\mathbf{U}\right]\right] = \det\left[\left(\mathbf{D}(\omega\mathbf{D}^{-1}\mathbf{L}+\mathbf{I})\right)^{-1}\mathbf{D}\left[(1-\omega)\mathbf{I} - \omega\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}\right]\right] =$$

$$= \det\left[(\omega\mathbf{D}^{-1}\mathbf{L}+\mathbf{I})^{-1}\left[(1-\omega)\mathbf{I} - \omega\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}\right]\right] = \det(\underbrace{\omega\mathbf{D}^{-1}\mathbf{L}+\mathbf{I}}_{(*)})^{-1}\cdot\det\left[\underbrace{(1-\omega)\mathbf{I} - \omega\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}}_{(**)}\right] = \underline{(1-\omega)^n}$$

$(*)$ dolní trojúhelníková matice s 1 na diagonále
$(**)$ horní trojúhelníková matice a prvky $(1-\omega)$ na diagonále

---

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = (1-\omega)^n \quad \underbrace{\Rightarrow}_{(***)} \quad \boxed{\underbrace{\max_i |\lambda_i|}_{\varrho(\mathbf{H}_{SOR})} \geq |1-\omega|}$$

$(***)$ Důkaz sporem: $\forall \lambda_i$: $|\lambda_i| < |1-\omega| \quad / \prod_{i=1}^{n}$

$$\prod_{i=1}^{n} |\lambda_i| < |1-\omega|^n$$

Důsledek: Aby SOR konvergovala, musí platit:

$$|\omega - 1| \leq \boxed{\varrho(\mathbf{H}_{SOR}) < 1}$$

$$|\omega - 1| < 1 \Rightarrow \boxed{\omega \in (0,2)}$$

Poznámky:

Parametr ω v relaxační metodě SOR volíme z intervalu $(0,2)$.

Pro $\omega = 1$ přejde relaxační metoda na Gauss-Seidlovu metodu.

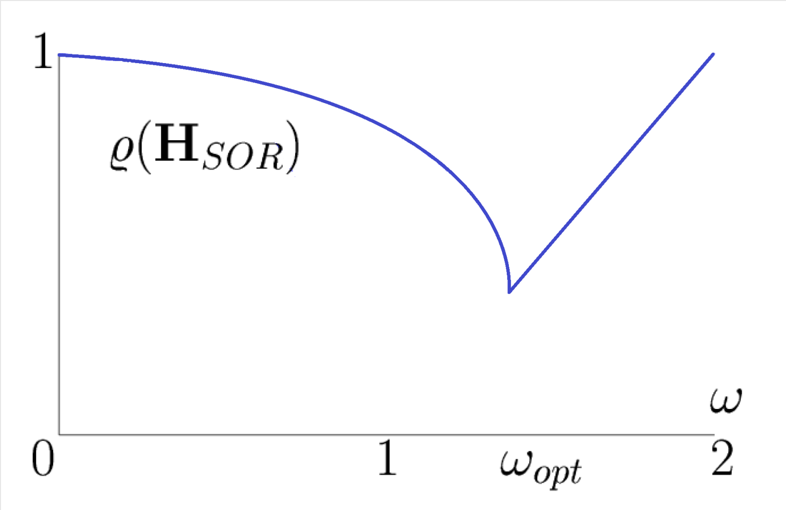
Volba parametru ω samozřejmě ovlivní rychlost konvergence iteračního procesu metody SOR.
Lze ukázat, že existuje optimální hodnota parametru omega

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\varrho^2(\mathbf{H}_J)}},$$

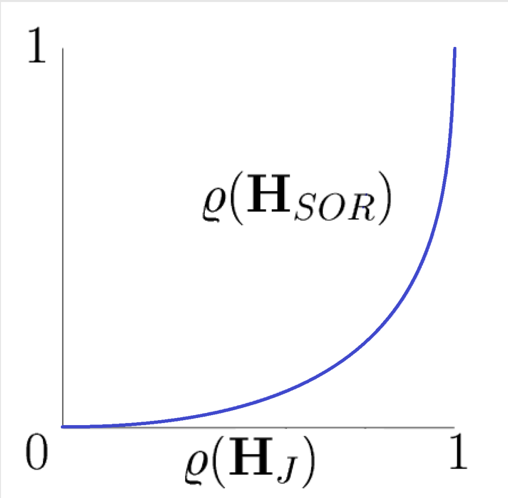
kde $\varrho(\mathbf{H}_J)$ je spektrální poloměr Jacobiovy iterační matice $\mathbf{H}_J$.

Pro spektrální poloměr iterační matice $\mathbf{H}_{SOR}$ relaxační metody lze odvodit následující závislosti:

- závislost spektrálního poloměru iterační matice metody SOR na relaxačním parametru ω



- závislost spektrálního poloměru iterační matice metody SOR na spektrálním poloměru iterační matice Jacobiovy metody



Konvergenční věty

Dosud jsme udávali podmínky pro iterační matici $\mathbf{H}$. To je ovšem nepraktické. Uvedeme několik snadněji ověřitelných podmínek.

Věta 1 Je-li matice $\mathbf{A}$ ostře diagonálně-dominantní, potom konverguje Jacobiova i Gauss-Seidelova metoda pro libovolnou volbu $\mathbf{x}^{(0)}$.

Věta 2 Je-li matice $\mathbf{A}$ symetrická a pozitivně-definitní, potom Gauss-Seidelova metoda konverguje pro libovolnou volbu $\mathbf{x}^{(0)}$.

Věta 3 Nutnou podmínkou konvergence metody SOR je $0 < \omega < 2$. Přidáme-li symetrii a pozitivní definitnost matice $\mathbf{A}$, dostaneme postačující podmínky konvergence.

Důkaz Věty 1 pro Jacobiovu metodu:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \qquad \text{rozklad matice} \quad \mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}$$

označíme-li $\mathbf{C} = \mathbf{L} + \mathbf{U}$, potom $\mathbf{A} = \mathbf{C} + \mathbf{D}$

- Jacobiova metoda

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{H}_J \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}_J$$
$$\mathbf{H}_J = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) = -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} \quad \text{a} \quad \mathbf{g}_J = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

- Matice $\mathbf{A}$ je ostře diagonálně-dominantní, tj. platí

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

- Pro náš rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{C} + \mathbf{D}$ tedy platí:

$$|d_{ii}| > \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad \Big/ : |d_{ii}| \neq 0$$

$\Big($ kdyby $|d_{ii}| = 0$, potom by byl celý řádek nulový ... $\mathbf{A}$ je ale regulární $\Big)$

- Platí:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \frac{|c_{ij}|}{|d_{ii}|} < 1} \qquad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, n \qquad (*)$$

- Pro iterační matici platí:

$$\mathbf{H}_J = -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} = -\begin{bmatrix} \frac{1}{d_{11}} & & & \\ & \frac{1}{d_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{d_{nn}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} & c_{ij} & \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} & \frac{c_{ij}}{d_{ii}} & \end{bmatrix}$$

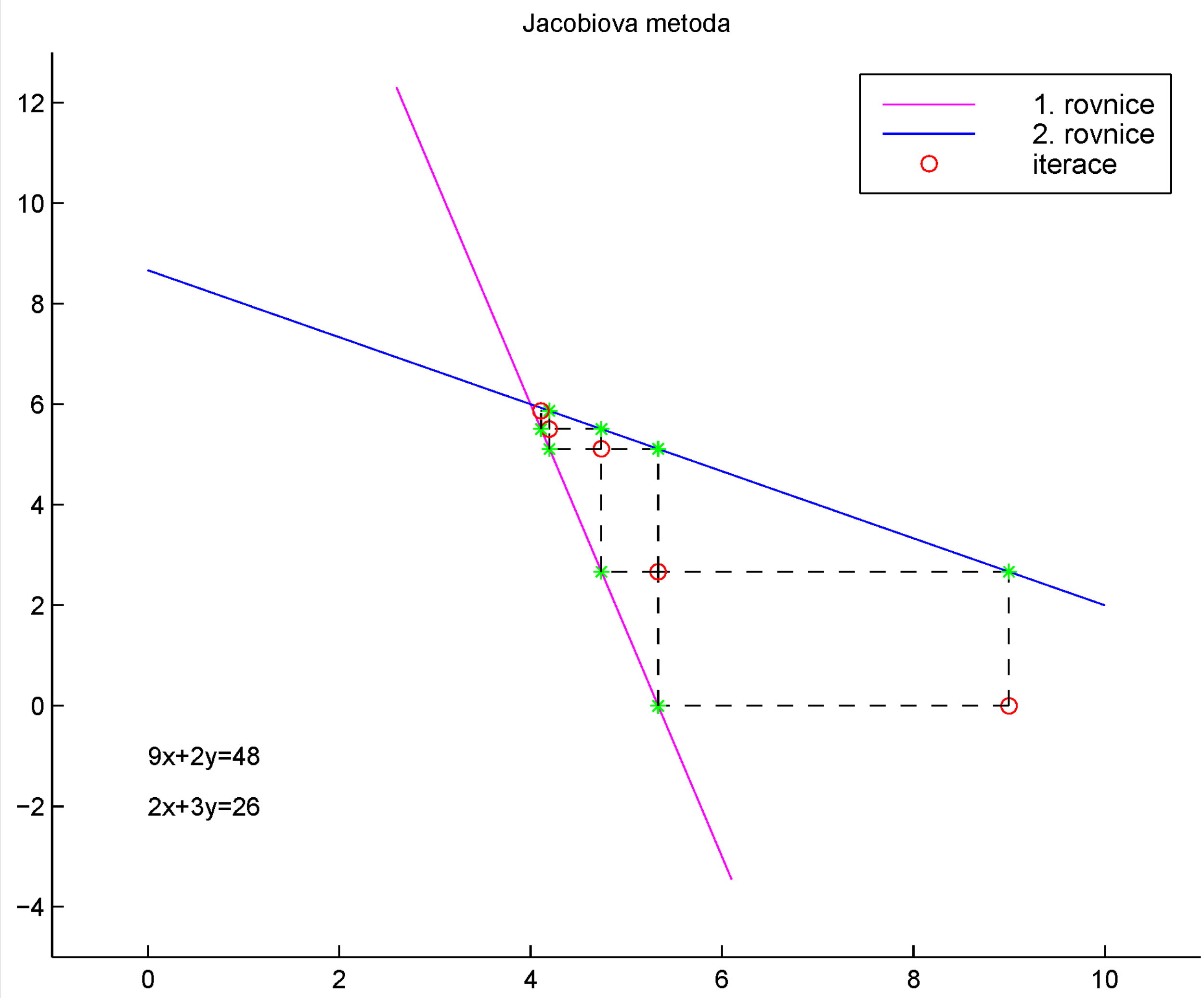
- Řádková norma matice $\mathbf{H}_J$:

$$||\mathbf{H}_J|| = \max_i \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{c_{ij}}{d_{ii}} \right| < 1 \qquad \text{plyne z } (*)$$

Geometrický význam Jacobiovy metody

$$9x + 2y = 48 \qquad x^{(k+1)} = \tfrac{1}{9}(48 - 2y^{(k)})$$
$$2x + 3y = 26 \qquad y^{(k+1)} = \tfrac{1}{3}(26 - 2x^{(k)})$$

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$
0	9.0000	0
1	5.3333	2.6667
2	4.7407	5.1111
3	4.1975	5.5062
4	4.1097	5.8683
5	4.0293	5.9268



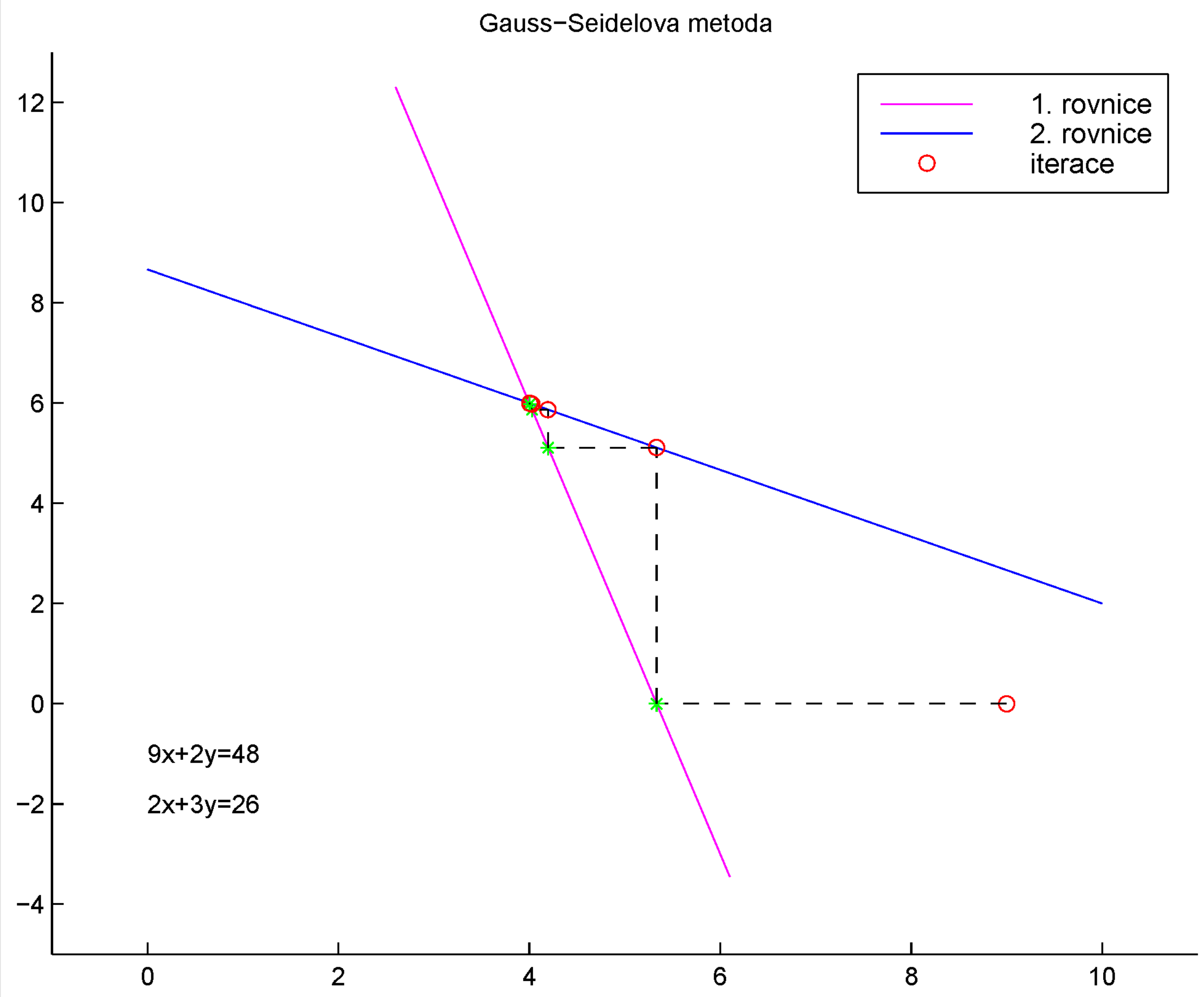
Geometrický význam Gauss-Seidelovy metody

$$\begin{aligned} 9x &+ 2y &= 48 \\ 2x &+ 3y &= 26 \end{aligned}$$

$$x^{(k+1)} = \tfrac{1}{9}(48 - 2y^{(k)})$$

$$y^{(k+1)} = \tfrac{1}{3}(26 - 2x^{(k+1)})$$

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$
0	9.0000	0
1	5.3333	5.1111
2	4.1975	5.8683
3	4.0293	5.9805
4	4.0043	5.9971
5	4.0006	5.9996



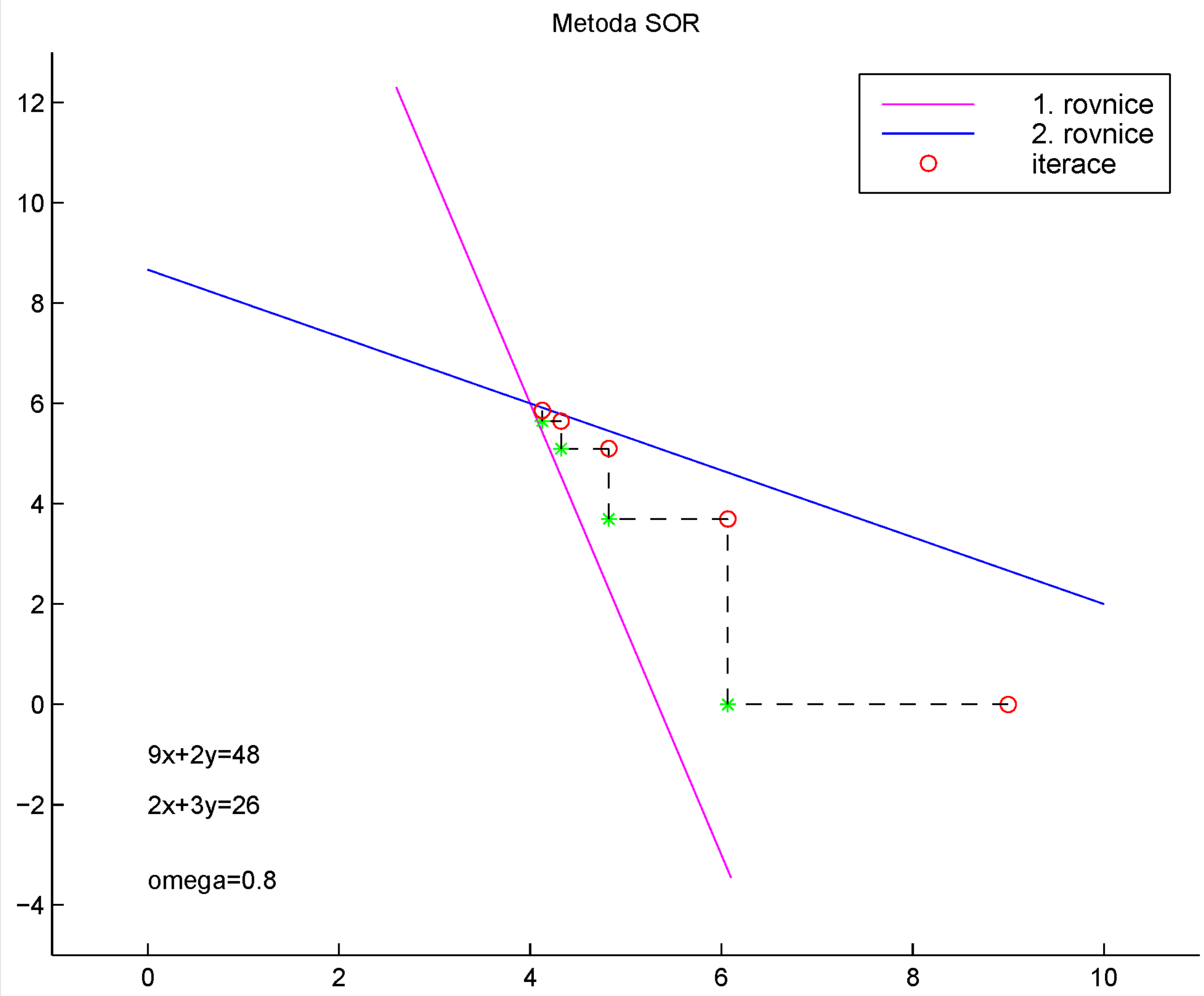
Geometrický význam metody SOR ($\omega < 1$)

$$\begin{aligned} 9x &+ 2y &= 48 \\ 2x &+ 3y &= 26 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_{GS}^{(k+1)} &= \tfrac{1}{9}(48 - 2y^{(k)}) \\ y_{GS}^{(k+1)} &= \tfrac{1}{3}(26 - 2x^{(k+1)}) \end{aligned}$$

$$x^{(k+1)} = \omega\tfrac{1}{9}(48 - 2y^{(k)}) + (1-\omega)x^{(k)}$$

$$y^{(k+1)} = \omega\tfrac{1}{3}(26 - 2x^{(k+1)}) + (1-\omega)y^{(k)}$$

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$
0	9.0000	0
1	6.0667	3.6978
2	4.8226	5.1008
3	4.3244	5.6472
4	4.1276	5.8614
5	4.0502	5.9455



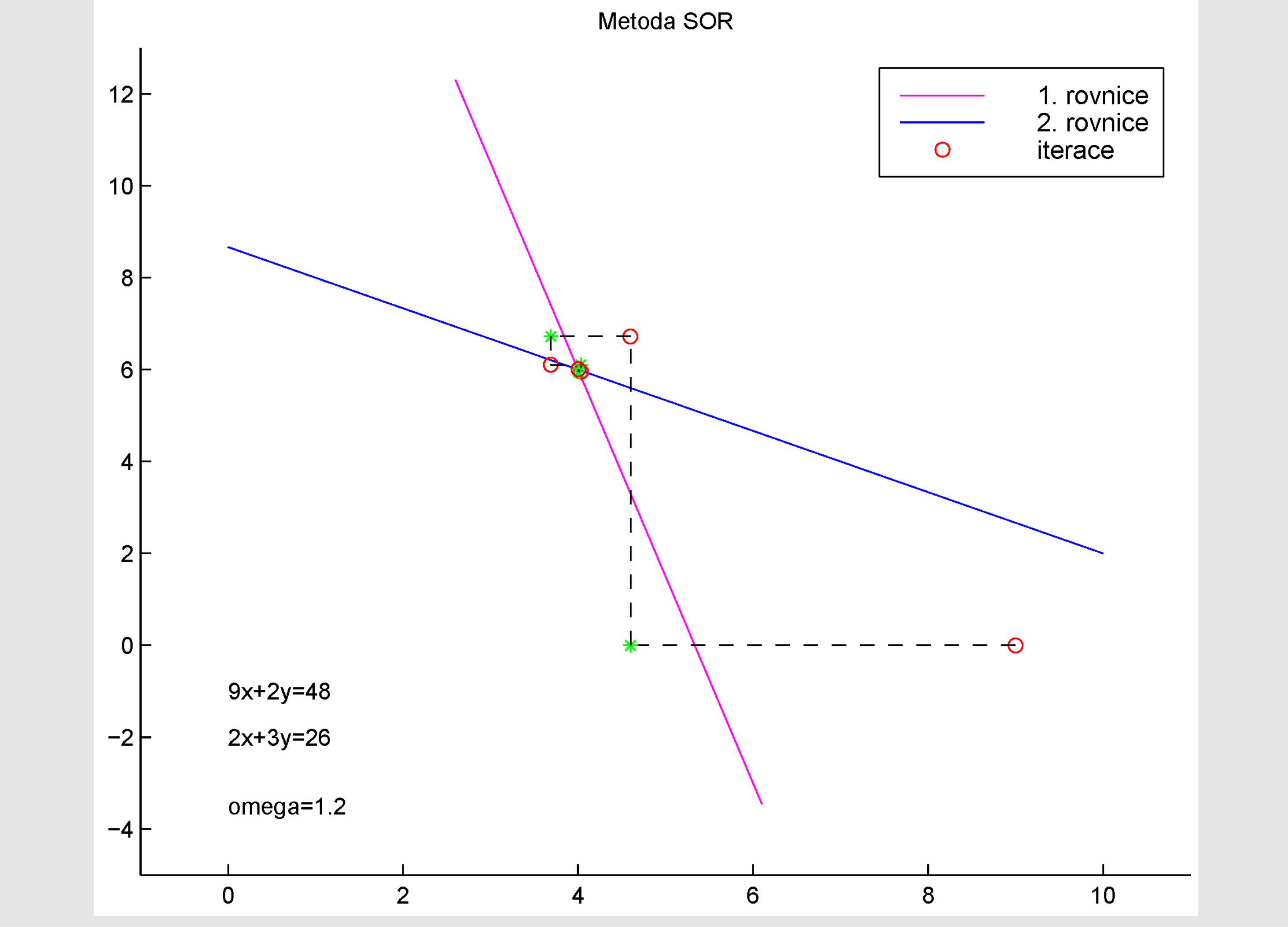
Geometrický význam metody SOR ($\omega > 1$)

$$\begin{array}{rcrcr} 9x & + & 2y & = & 48 \\ 2x & + & 3y & = & 26 \end{array} \qquad \begin{aligned} x_{GS}^{(k+1)} &= \tfrac{1}{9}(48 - 2y^{(k)}) \\ y_{GS}^{(k+1)} &= \tfrac{1}{3}(26 - 2x^{(k+1)}) \end{aligned}$$

$$x^{(k+1)} = \omega\tfrac{1}{9}(48 - 2y^{(k)}) + (1-\omega)x^{(k)}$$

$$y^{(k+1)} = \omega\tfrac{1}{3}(26 - 2x^{(k+1)}) + (1-\omega)y^{(k)}$$

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$
0	9.0000	0
1	4.6000	6.7200
2	3.6880	6.1056
3	4.0342	5.9515
4	4.0061	6.0048
5	3.9975	6.0010


Metoda SOR
1. rovnice
2. rovnice
iterace
9x+2y=48
2x+3y=26
omega=1.2
12
10
8
6
4
2
0
−2
−4
0
2
4
6
8
10