Kapitola 3. SLAR - přímé metody

Formulace:

Je dána čtvercová matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ a vektor pravé strany $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \ldots, b_n]^T$.
Hledáme vektor $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ tak, aby platilo

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

rozepsáno po složkách

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Předpokládáme, že je matice $\mathbf{A}$ regulární (tj. soustava má právě jedno řešení).

Máme dva základní typy soustav:

- soustavy s obecnou maticí
- soustavy se speciální maticí (symetrická, pozitivně definitní, řídká, pásová apod.)

Pro první skupinu se většinou používají přímé metody, pro druhou skupinu metody iterační nebo speciální modifikace přímých metod.

Cramerovo pravidlo

$$\boxed{\text{neznámá složka řešení} \qquad x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}}$$

počet operací:

Je nutné vypočítat $(n+1)$ determinantů.
Pro výpočet determinantu je třeba $n!$ sčítání a v každém sčítanci je $(n-1)$ násobení.
Dostáváme:

$$(n+1)\left[(n-1)n! + n!\right] = n(n+1)!$$

např: pro $n = 30$, 10^6 operací za sekundu $\rightarrow$ výpočet trvá $7{,}82 \cdot 10^{21}$ let

Idea dalších přímých metod vycházejí z faktu, že soustavy

$$\boxed{\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}} \quad \text{a} \quad \boxed{\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{b}},$$

kde $\mathbf{T}$ je regulární matice, mají totéž řešení, tj. jsou ekvivalentní.

Touto transformací lze získat trojúhelníkovou soustavu

$$\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}: \qquad \mathbf{U} = \mathbf{T}\mathbf{A}, \qquad \mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{b}$$

př:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Trojúhelníkovou soustavu lze velmi snadno řešit zpětnou substitucí. Realizovaný proces se nazývá zpětný chod.

Gaussova eliminační metoda

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{rozepsáno po složkách} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

Definujeme multiplikátory $\boxed{m_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}}}$, $\boxed{m_{31} = -\frac{a_{31}}{a_{11}}}$

$$\begin{aligned} \check{r}_1^{(1)} &= \check{r}_1 & b_1^{(1)} &= b_1 \\ \check{r}_2^{(1)} &= \check{r}_2 + m_{21}\check{r}_1 & b_2^{(1)} &= b_2 + m_{21}b_1 \\ \check{r}_3^{(1)} &= \check{r}_3 + m_{31}\check{r}_1 & b_3^{(1)} &= b_3 + m_{31}b_1 \end{aligned}$$

Získáme novou soustavu ... **1. fáze eliminace**

$$\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(1)} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & b_3^{(1)} \end{array}\right]$$

Definujeme multiplikátor $\boxed{m_{32} = -\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}}$

$$\begin{aligned} \check{r}_1^{(2)} &= \check{r}_1^{(1)} & b_1^{(2)} &= b_1^{(1)} \\ \check{r}_2^{(2)} &= \check{r}_2^{(1)} & b_2^{(2)} &= b_2^{(1)} \\ \check{r}_3^{(2)} &= \check{r}_3^{(1)} + m_{32}\check{r}_2^{(1)} & b_3^{(2)} &= b_3^{(1)} + m_{32}b_2^{(1)} \end{aligned}$$

Získáme novou soustavu ... **2. fáze eliminace**

$$\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(2)} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & b_3^{(2)} \end{array}\right]$$

Celý tento postup nazýváme přímý chod. Trojúhelníkovou soustavu řešíme zpětným chodem.

Efektivnost algoritmu GEM

Bereme v úvahu pouze operace násobení a dělení (počet operací sčítání je přibližně stejný).
(N ... je řád matice $\mathbf{A}$)

- Celkem je $N-1$ fází eliminace. V K-té fázi počítáme $N-K$ multiplikátorů (tj. $N-K$ dělení)

$$\sum_{K=1}^{N-1}(N-K) = (N-1)N - \sum_{K=1}^{N-1} K = (N-1)N - \frac{1}{2}(N-1)N = \underline{\underline{\frac{1}{2}(N-1)N}}$$

- Každým multiplikátorem vynásobíme $(N-K+1)$ prvků rozšířené matice (jeden rozšířený řádek), tj. $(N-K)(N-K+1)$ v K-té fázi

$$\sum_{K=1}^{N-1}(N-K)(N-K+1) = \sum_{K=1}^{N-1}\left[(N^2+N) - K(2N+1) + K^2\right] =$$

$$= (N-1)(N^2+N) - \frac{1}{2}N(N-1)(2N+1) + \frac{1}{6}(N-1)N(2N-1) =$$

$$= N^3 - N^2 + N^2 - N - N^3 + \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{2}N + \frac{1}{3}N^3 - \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{6}N =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{3}N^3 - \frac{1}{3}N}}$$

- Zpětný chod

$$1 + (\underbrace{1}_{\text{dělení}} + \underbrace{1}_{\text{násobení}}) + (1+2) + \cdots + (1+N-1) = \sum_{K=1}^{N} K = \underline{\underline{\frac{1}{2}N(N+1)}}$$

<u>Celkem</u>

$$\underbrace{\frac{1}{2}N(N-1)}_{\text{výpočet multiplikátorů}} + \underbrace{\frac{1}{3}N^3 - \frac{1}{3}N}_{\text{přímý chod}} + \underbrace{\frac{1}{2}N(N+1)}_{\text{zpětný chod}} = \boxed{\frac{1}{3}N^3 + N^2 - \frac{1}{3}N}$$

Příklad 1

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 14 \\ 2x & + & 4y & + & 5z & = & 25\ , \\ 7x & + & 8y & + & 9z & = & 50 \end{array} \qquad \text{tj.} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 25 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Řešení

Pro zápis budeme používat tvar *matice rozšířené*:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 3 & 14 \\ 2 & 4 & 5 & 25 \\ 7 & 8 & 9 & 50 \end{array}\right] \quad / \cdot \left(-\tfrac{2}{\mathbf{1}}\right) + \qquad / \cdot \left(-\tfrac{7}{\mathbf{1}}\right) +$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & \mathbf{0} & -1 & -3 \\ 0 & -6 & -12 & -48 \end{array}\right] \quad / \cdot \left(-\tfrac{6}{\mathbf{0}}\right) + \qquad !!! \text{ dělíme } \mathbf{0}$$

- Algoritmus Gaussovy eliminační metody pro tento příklad <u>není realizovatelný</u>.
- Snadno se přesvědčíme, že má daná soustava řešení

$$x = 1, \; y = 2 \;\text{ a }\; z = 3.$$

Gaussova eliminační metoda ale selhala.

Otázka 1: Pro jaké matice $\mathbf{A}$ má soustava $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ právě jedno řešení?

$\rightarrow$ matice $\mathbf{A}$ musí být **regulární**, tj.

všechna vlastní čísla musí být různá od nuly

jinak řečeno řádky matice $\mathbf{A}$ musí být lineárně nezávislé

jinak řečeno sloupce matice $\mathbf{A}$ musí být lineárně nezávislé

jinak řečeno $\det \mathbf{A} \neq 0$

<u>Poznámka:</u> Vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ je číslo λ splňující rovnici $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, kde $\mathbf{v}$ je vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu λ. Číslo λ tedy určitým způsobem charakterizuje matici $\mathbf{A}$.

Otázka 2: Pro jaké matice $\mathbf{A}$ je algoritmus Gaussovy eliminační metody realizovatelný?

$\rightarrow$ **Věta:** Je-li matice $\mathbf{A}$ **ostře diagonálně dominantní**, pak je algoritmus GEM realizovatelný.

<u>Poznámka:</u> Matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ je ostře diagonálně dominantní, platí-li

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|,$$

tj. absolutní hodnota diagonálního prvku je větší než součet absolutních hodnot ostatních prvků v řádku.

<u>Např.:</u>

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{7} & 1 & 2 \\ 1 & \mathbf{4} & 1 \\ 2 & 4 & \mathbf{9} \end{bmatrix}.$$

→ **Věta:** Je-li matice $\mathbf{A}$ **symetrická** a **pozitivně definitní**, pak je algoritmus GEM realizovatelný.

Poznámka: Matice $\mathbf{A}$ je symetrická, platí-li pro její prvky

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Poznámka: Matice $\mathbf{A}$ je pozitivně definitní,

má-li všechna vlastní čísla kladná

nebo jinak řečeno $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{o}: \ \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$.

Poznámka: Pro soustavu s maticí, která splňuje předpoklady některé z uvedených vět, je možné dopředu říci, že půjde řešit pomocí Gaussovy eliminační metody. Obráceně to ovšem neplatí, tj. není-li např. matice soustavy ostře diagonálně dominantní, ještě to obecně neznamená, že nepůjde pomocí Gaussovy eliminační metody řešit.

Poznámka: Abychom zaručili, že soustava půjde vyřešit pro libovolnou regulární matici, musíme algoritmus Gaussovy eliminační metody upravit. Zavedeme tzv. **výběr hlavního prvku (pivotaci)**.

Poznámka: **Pivot (hlavní prvek)** ... první nenulový prvek v daném řádku matice.

Příklad 2

Pomocí **GEM se sloupcovou pivotací** vyřešte soustavu rovnic z Příkladu 1, kde selhala klasická GEM, tj. řešíme soustavu $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 14 \\ 25 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

Řešení

1. sloupec

$$\text{vyměň} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 2 & 4 & 5 & 25 \\ \mathbf{7} & 8 & 9 & 50 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 8 & 9 & 50 \\ 2 & 4 & 5 & 25 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \end{array}\right) \quad / \cdot \left(-\tfrac{2}{7}\right) \ + \quad / \cdot \left(-\tfrac{1}{7}\right) \ +$$

2. sloupec

$$\text{není třeba měnit} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 8 & 9 & 50 \\ 0 & \mathbf{\frac{12}{7}} & \frac{17}{7} & \frac{75}{7} \\ 0 & \frac{6}{7} & \frac{12}{7} & \frac{48}{7} \end{array}\right) \quad / \cdot \left(-\frac{\frac{6}{7}}{\frac{12}{7}}\right) = -\frac{1}{2} \ +$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 8 & 9 & 50 \\ 0 & \frac{12}{7} & \frac{17}{7} & \frac{75}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right) \implies \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Poznámky:

- Při sloupcové pivotaci jsme postupně v každém sloupci (resp. jeho části pod diagonálou včetně) vybírali číslo, které bylo maximální v absolutní hodnotě a v případě, že toto číslo neleželo na diagonále, vyměnili jsme příslušné 2 rovnice. Dále jsme pokračovali jako v GEM bez pivotace, tj. nulovali jsme koeficienty pod diagonálou.
- Sloupcová pivotace není jediná možnost. Podobně můžeme vybírat i maximální prvek v absolutní hodnotě z příslušného řádku (resp. jeho části) a poté vyměnit příslušné sloupce. Pozor! Je ovšem třeba zaměnit i příslušné složky řešení $\mathbf{x}$. V tomto případě hovoříme o **řádkové pivotaci**.
- Další možností je vybírat maximální prvek v absolutní hodnotě z celé matice $\mathbf{A}$ (resp. příslušné podmatice). V tomto případě hovoříme o **úplné pivotaci**. Opět je třeba mít na paměti, že je třeba zaměnit složky ve vektoru řešení. Nevýhodou úplné pivotace je pomalejší výpočet neboť hlavní prvek vyhledáváme z celé dosud neupravené části.
- Libovolnou pivotací dosáhneme realizovatelnosti GEM pro libovolnou regulární matici $\mathbf{A}$.

Metoda LU-rozkladu

Opět uvažujeme regulární matici $\mathbf{A}$ řádu N. Matici $\mathbf{A}$ lze rozložit na součin $\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{LU}}$, kde $\mathbf{L}$ je dolní trojúhelníková matice řádu N a $\mathbf{U}$ je horní trojúhelníková matice řádu N.

Např:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Tento rozklad není dán jednoznačně (12 neznámých a 9 podmínek), jednoznačnosti dosáhneme např. tím, že položíme $\boxed{l_{ii} = 1,\ i = 1, 2, \ldots, N}$.

Algoritmus: (viz skripta)

je odvozen z postupného násobení řádků matice $\mathbf{L}$ a sloupců matice $\mathbf{U}$

$$\begin{array}{lll} (1,1)\ u_{11} = a_{11} & (2,1)\ a_{21} = l_{21}u_{11} & (3,1)\ a_{31} = l_{31}u_{11} \\ (1,2)\ u_{12} = a_{12} & (2,2)\ a_{22} = l_{21}u_{12} + u_{22} & (3,2)\ a_{32} = l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} \\ (1,3)\ u_{13} = a_{13} & (2,3)\ a_{23} = l_{21}u_{13} + u_{23} & (3,3)\ a_{33} = l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{array}$$

Řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ metodou LU-rozkladu:

1. Realizace LU-rozkladu: $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$
2. Řešení trojúhelníkové soustavy: $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ $\boxed{\mathbf{L}\underbrace{\mathbf{Ux}}_{\mathbf{y}} = \mathbf{b}}$
3. Řešení trojúhelníkové soustavy: $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$

Souvislost GEM a metody LU-rozkladu

Gaussovu eliminaci lze popsat pomocí násobení regulárními maticemi.

První fázi popíšeme takto ... $\boxed{\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{M}_1\mathbf{A}}$, kde $\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ m_{21} & 1 & & & & \\ m_{31} & & 1 & & & \\ m_{41} & & & 1 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ m_{n1} & & & & & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ m_{21}a_{11}+a_{21} & m_{21}a_{12}+a_{22} & m_{21}a_{13}+a_{23} & \dots & m_{21}a_{1n}+a_{2n} \\ m_{31}a_{11}+a_{31} & m_{31}a_{12}+a_{32} & m_{31}a_{13}+a_{33} & \dots & m_{31}a_{1n}+a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n1}a_{11}+a_{n1} & m_{n1}a_{12}+a_{n2} & m_{n1}a_{13}+a_{n3} & \dots & m_{n1}a_{1n}+a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ m_{21} & 1 & & & & \\ m_{31} & & 1 & & & \\ m_{41} & & & 1 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ m_{n1} & & & & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Druhou fázi popíšeme takto ... $\boxed{\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{M}_2\mathbf{A}^{(1)}}$, kde $\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & m_{32} & 1 & & & \\ & m_{42} & & 1 & & \\ & \vdots & & & \ddots & \\ & m_{n2} & & & & 1 \end{bmatrix}$

$\vdots$

Nakonec $(n-1)$ fázi popíšeme ... $\boxed{\mathbf{A}^{(n-1)} = \mathbf{M}_{n-1}\mathbf{A}^{(n-2)}}$, kde $\mathbf{M}_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$

Dostali jsme horní trojúhelníkovou matici, označíme ji např. $\mathbf{V}$

$$\boxed{\mathbf{V} = \mathbf{A}^{(n-1)} = \underbrace{\mathbf{M}_{n-1}\mathbf{M}_{n-2}\mathbf{M}_{n-3}\dots\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1}_{\text{ozn.}\mathbf{M}}\,\mathbf{A}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{V}}$$

$$\boxed{\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{M}_2^{-1}\dots\mathbf{M}_{n-1}^{-1}}$$

Jak vypadá např. $\mathbf{M}_2^{-1}$?

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & m_{32} & 1 & & & \\ & m_{42} & & 1 & & \\ & \vdots & & & \ddots & \\ & m_{n2} & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{M}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & -m_{32} & 1 & & & \\ & -m_{42} & & 1 & & \\ & \vdots & & & \ddots & \\ & -m_{n2} & & & & 1 \end{bmatrix}$$

protože po vynásobení:

- i-tý řádek $\times$ j-tý sloupec $(j \neq i)$
  - buď $\quad m_{42} \cdot 1 + 1 \cdot (-m_{42}) = 0$
  - nebo $\quad m_{42} \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$
- i-tý řádek $\times$ i-tý sloupec
  - $m_{42} \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$

tj. $\mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{M}_2^{-1} = \mathbf{I}$

Jak vypadá $\mathbf{M}^{-1}$?

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -m_{21} & 1 & & & \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -m_{n1} & -m_{n2} & -m_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Př.:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Platí

$$\boxed{\mathbf{A} = \underbrace{\mathbf{M}^{-1}}_{(*)} \cdot \underbrace{\mathbf{V}}_{(**)}}$$

(*) dolní trojúhelníková s 1 na diagonále

(**) horní trojúhelníková

$\Rightarrow$ jedná se o LU-rozklad (rozklad je jednoznačný) $\boxed{\mathbf{L} = \mathbf{M}^{-1} \text{ a } \mathbf{U} = \mathbf{V}}$

Výpočet determinantů

1. Užití GEM

$$\mathbf{U} = \mathbf{M}_{N-1}\mathbf{M}_{N-2}\dots\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\mathbf{A}$$

$$\det\mathbf{U} = \underbrace{\det\mathbf{M}_{N-1}}_{=1}\underbrace{\det\mathbf{M}_{N-2}}_{=1}\dots\underbrace{\det\mathbf{M}_2}_{=1}\underbrace{\det\mathbf{M}_1}_{=1}\det\mathbf{A}$$

$$\det\mathbf{A} = \det\mathbf{U} = \prod_{i=1}^{N} u_{ii}$$

2. Užití LU-rozkladu

$$\det\mathbf{A} = \det\mathbf{L}\ \det\mathbf{U} = \prod_{i=1}^{N} u_{ii}$$

Výpočet inverzní matice

1. Užití GEM

$$\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{I} \qquad \text{(maticová soustava)}$$
$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$$

2. Užití LU-rozkladu

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\,\mathbf{U}$$
$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\,\mathbf{L}^{-1}$$

Numerické aspekty GEM a metody LU-rozkladu

Při numerické realizaci nevypočteme přesně matice $\mathbf{L}$ a $\mathbf{U}$, ale přibližné matice $\tilde{\mathbf{L}}$ a $\widetilde{\mathbf{U}}$.

Teoreticky platí $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$.

Označíme $\widetilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{L}}\widetilde{\mathbf{U}}$ ... dopočteno pro získané matice $\tilde{\mathbf{L}}$ a $\widetilde{\mathbf{U}}$.

Budeme zkoumat rozdíl $\widetilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}$.

Označme $\mathbf{E}$ a $\mathbf{F}$ matice chyb takové, že platí:

$$\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L} + \mathbf{E}, \quad \widetilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U} + \mathbf{F}$$

Potom:

$$\widetilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A} = \tilde{\mathbf{L}}\widetilde{\mathbf{U}} - \mathbf{L}\mathbf{U} = (\mathbf{L}+\mathbf{E})(\mathbf{U}+\mathbf{F}) - \mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{E}\mathbf{U} + \mathbf{L}\mathbf{F} + \mathbf{E}\mathbf{F}$$

Odtud plyne závěr: Pokud jsou multiplikátory v absolutní hodnotě velké, pak prvky $\mathbf{L}$ jsou v absolutní hodnotě velké $\Rightarrow$ chyba může být velká. Toto je jeden z důvodů realizace pivotace.

Přímé metody pro soustavy se speciální maticí

Uvažujeme matice:

- symetrická
- symetrická a pozitivně definitní
- diagonálně dominantní
- pásová

Platí: Je-li matice $\mathbf{A}$ symetrická a $\mathbf{A}^{(k)}$ jsou matice získané GEM v základní verzi, pak podmatice $\mathbf{A}^{(k)}$ jsou také symetrické.

př:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \qquad / \cdot \left(-\tfrac{b}{a}\right) + \qquad / \cdot \left(-\tfrac{c}{a}\right) +$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d-\frac{b^2}{a} & e-\frac{bc}{a} \\ 0 & e-\frac{bc}{a} & f-\frac{c^2}{a} \end{bmatrix}$$

Lze pak použít **symetrickou verzi GEM a LU-rozkladu**.

Je-li matice $\mathbf{A}$ navíc pozitivně definitní, pak lze realizovat **Choleského metodu** rozkladu

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{U}^T\mathbf{U}}$$

Poznámka: V algoritmu je potřeba realizovat výpočet odmocnin a to lze pouze pro pozitivně definitní matice.

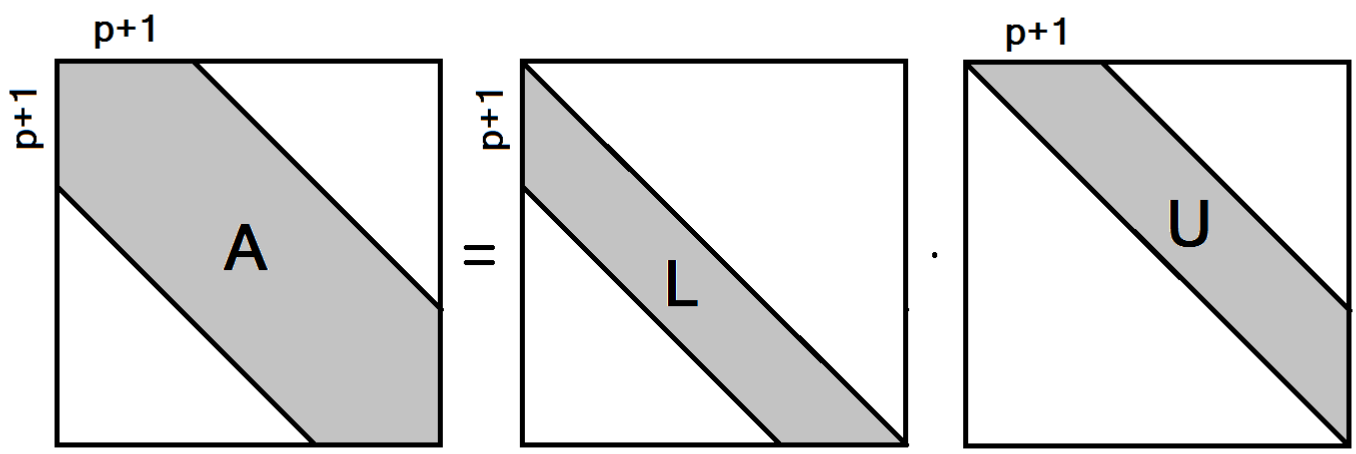
př:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ u_{21} & u_{22} & 0 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} (1,1):\ a_{11} = u_{11}^2 & (2,1):\ a_{21} = u_{12}\cdot u_{11} & (3,1):\ a_{31} = u_{13}\cdot u_{11} \\ (1,2):\ a_{12} = u_{11}\cdot u_{12} & (2,2):\ a_{22} = u_{12}^2 + u_{22}^2 & (3,2):\ a_{32} = u_{13}\cdot u_{12} + u_{23}\cdot u_{22} \\ (1,3):\ a_{13} = u_{11}\cdot u_{13} & (2,3):\ a_{23} = u_{12}\cdot u_{13} + u_{22}\cdot u_{23} & (3,3):\ a_{33} = u_{13}^2 + u_{23}^2 + u_{33}^2 \end{array}$$

Metoda LU-rozkladu pro pásové matice

Uvažujeme matici $\mathbf{A}$ takovou, že $\boxed{a_{ij} = 0}$, když $\boxed{|i-j| > p}$ (šířka pásu je $2p+1$).



Pokud lze realizovat LU-rozklad, pak

$$
\begin{aligned}
l_{ij} &= 0, \ \text{když} \quad j > i \quad \text{a} \quad j < i - p, \\
u_{ij} &= 0, \ \text{když} \quad j < i \quad \text{a} \quad j > i + p.
\end{aligned}
$$

Poznámka: V případě obecné matice však nelze čekat, že matice $\mathbf{L}$ a $\mathbf{U}$ bude mít nulový prvek v téže pozici jako jej měla matice $\mathbf{A}$.

Pro pásové, symetrické, pozitivně definitní matice používáme **speciální verzi Choleského rozkladu**.

Metoda faktorizace pro třídiagonální matici

Uvažujeme soustavu $n+1$ lineárních algebraických rovnic $\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{F}}$ ve tvaru:

$$
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
c_0 & -b_0 & & & & & & & f_0 \\
-a_1 & c_1 & -b_1 & & & & & & f_1 \\
 & -a_2 & c_2 & -b_2 & & & & & f_2 \\
 & & -a_3 & c_3 & -b_3 & & & & f_3 \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
 & & & & -a_{n-1} & c_{n+1} & -b_{n-1} & & f_{n-1} \\
 & & & & & -a_n & c_n & & f_n
\end{array}\right)
$$

Označíme

$$
\boxed{\alpha_1 = \frac{b_0}{c_0}}, \quad \boxed{\beta_1 = \frac{f_0}{c_0}}
$$

První dvě rovnice (první rovnice je vydělená c_0) lze psát ve tvaru:

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
y_0 & - & \alpha_1 y_1 & & & = & \beta_1 \quad / \cdot a_1 \\
-a_1 y_0 & + & c_1 y_1 & - & b_1 y_2 & = & f_1 \quad + \\
\hline
\end{array}
$$

$$
(c_1 - a_1 \alpha_1)\, y_1 - b_1\, y_2 = f_1 + a_1\, \beta_1
$$

Přepíšeme (rovnice vydělená koeficientem u y_1) na tvar:

$$y_1 - \alpha_2 y_2 = \beta_2$$

kde

$$\boxed{\alpha_2 = \frac{b_1}{c_1 - a_1\alpha_1}}, \quad \boxed{\beta_2 = \frac{f_1 + a_1\beta_1}{c_1 - a_1\alpha_1}}$$

Po zobecnění:

- PŘÍMÝ CHOD

$$\boxed{\alpha_1 = \frac{b_0}{c_0}} \qquad \boxed{\beta_1 = \frac{f_0}{c_0}}$$

$$\boxed{\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i \cdot \alpha_i}} \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \qquad \boxed{\beta_{i+1} = \frac{f_i + a_i \cdot \beta_i}{c_i - a_i \cdot \alpha_i}} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- ZPĚTNÝ CHOD

Pro poslední dvě rovnice získáme:

$$\begin{array}{rcrcrcl} y_{n-1} & - & \alpha_n y_n & & = & \beta_n & / \cdot a_n \\ -a_n y_{n-1} & + & c_n y_n & \clubsuit & = & f_n & + \\ \hline & & (c_n - a_n\,\alpha_n)\,y_n & & = & f_n + a_n\,\beta_n & \end{array}$$

$\clubsuit$ ve druhé rovnici již není člen $-b_n y_{n+1}$

Vyjádříme poslední složku řešení:

$$\boxed{y_n = \frac{f_n + a_n\beta_n}{c_n - a_n\alpha_n} =: \beta_{n+1}}$$

Zpětně dosazujeme:

$$\boxed{y_{i-1} = \beta_i + \alpha_i \cdot y_i} \quad i = n, n-1, \dots, 1 \qquad (*)$$

Efektivnost algoritmu

dělení		$2n+1$	$(1+n-1+1+n)$
násobení	$\cdot$	$3n$	$(n+n+n)$
sčítání a odčítání	$\pm$	$3n$	$(n+n+n)$
celkem		$(8n+1)$ operací	

Poznámka: Pokud budeme řešit tuto soustavu pro různé pravé strany $\mathbf{F}$, nemusíme již znovu vyjadřovat koeficienty α_i, protože nezávisí na $\mathbf{F}$. Stačí tedy přepočítat β_i.

Zatím jsme neuvedli předpoklady pro metodu faktorizace

- je třeba zajistit, aby jmenovatel $c_i - a_i\alpha_i$ byl nenulový pro $i = 1, 2, \ldots, n$
- y_i se určuje z rekurentní formule $(*)$, přitom může dojít k akumulaci zaokrouhlovacích chyb.

Nechť α_i, β_i jsou dokonce přesně vypočítané a nechť máme $\tilde{y}_n = y_n + \varepsilon_n$ (s chybou ε_n).

Potom postupně vypočítáme podle $(*)$

$$\boxed{\tilde{y}_{i-1} = \beta_i + \alpha_i \tilde{y}_i}, \quad i = n, n-1, \ldots, 1$$

Označíme-li $\boxed{\varepsilon_i = \tilde{y}_i - y_i}$ chybu, bude jistě splňovat homogenní rovnici

$$\boxed{\varepsilon_{i-1} = \alpha_i \varepsilon_i}, \quad i = n, n-1, \ldots, 1$$

(protože přesné hodnoty y_i splňují $y_{i-1} = \beta_i + \alpha_i y_i$)

$\Rightarrow$ Pokud by byly koeficienty $|\alpha_i| > 1$, dojde k velkému nárůstu chyby ε_0 !!!

Pro $\underbrace{\boxed{|\alpha_i| \leq 1, i = 1, 2, ..., n}}_{(\bullet)}$ je algoritmus stabilní.

Postačující podmínky pro zajištění $(\bullet)$: Matice soustavy je ostře diagonálně dominantní.

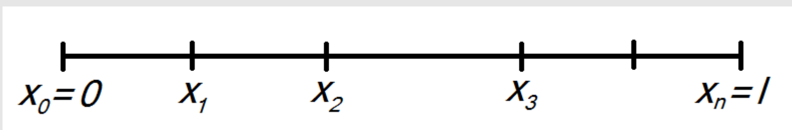
Důkaz viz literatura.

Příklady aplikací, které vedou na soustavu s třídiagonální maticí

1. Řešení okrajové úlohy

$$\boxed{\begin{array}{rcll} (k(x)u'(x))' - q(x)u(x) & = & -f(x) & x \in (0, l) \\ u(0) & = & 0 & \\ u(l) & = & 0 & \\ k(x) & > & 0 & \\ q(x) & \geq & 0 & \end{array}}$$

x na $\langle 0, l \rangle$ diskretizujeme ... síť x_i

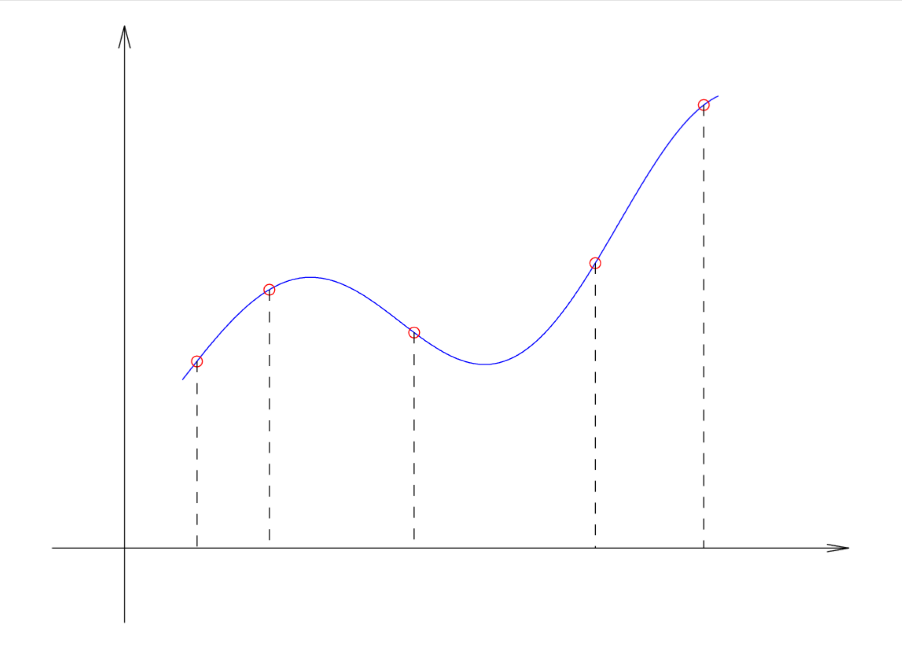


původní úlohu nahradíme úlohou s diferenční rovnicí a použijeme vzorec pro poměrnou diferenci

2. Diferenční schémata pro rovnici vedení tepla

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad x \in (0, l), \quad t > 0 \\ u(0,t) &= \mu_1(t) \\ u(l,t) &= \mu_2(t) \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{aligned}}$$

3. Soustava pro výpočet koeficientů kubického spline
   (aproximace funkce) ... budeme probírat



Podmíněnost úlohy řešit SLAR

Uvažujeme opět soustavu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A}$ ... $n \times n$ regulární, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

Označení:

$\Delta\mathbf{A}$ ... malá změna matice $\mathbf{A}$

$\Delta\mathbf{b}$ ... malá změna vektoru $\mathbf{b}$

$\Delta\mathbf{x}$ ... odpovídající změna vektoru neznámých

$\mathbf{x}^*$ ... přesné řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

Platí:

$$\boxed{(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})(\mathbf{x}^* + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}}$$

1. Uvažujme situaci $\underline{\Delta\mathbf{A} = \mathbf{0}}$, tj. $\mathbf{A}$ je zadána přesně

   Otázka: Jakou změnu řešení vyvolá změna pravé strany?

$$\underline{\mathbf{Ax}^*} + \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} = \underline{\mathbf{b}} + \Delta\mathbf{b}$$
$$\mathbf{A}\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{b}$$

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{b}$$

Z vlastností maticové normy plyne:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b} \;\Rightarrow\; ||\mathbf{b}|| \le ||\mathbf{A}|| \cdot ||\mathbf{x}^*|| \;\Rightarrow\; \frac{1}{||\mathbf{x}^*||} \le \frac{||\mathbf{A}||}{||\mathbf{b}||}$$

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{b} \;\Rightarrow\; ||\Delta\mathbf{x}|| \le ||\mathbf{A}^{-1}|| \cdot ||\Delta\mathbf{b}||$$

$$\frac{||\Delta\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}^*||} \le \frac{||\mathbf{A}^{-1}|| \cdot ||\Delta\mathbf{b}|| \cdot ||\mathbf{A}||}{||\mathbf{b}||}$$

$$\boxed{C_p = \frac{\frac{||\Delta\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}^*||}}{\frac{||\Delta\mathbf{b}||}{||\mathbf{b}||}} \le ||\mathbf{A}^{-1}|| \cdot ||\mathbf{A}||}$$

2. Případ, kdy $\underline{\Delta\mathbf{b} = \mathbf{0}}$, tj. $\mathbf{b}$ je zadána přesně

$$(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})(\mathbf{x}^* + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

$$\underline{\mathbf{A}\mathbf{x}^*} + \Delta\mathbf{A}\mathbf{x}^* + \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \Delta\mathbf{A}\Delta\mathbf{x} = \underline{\mathbf{b}}$$

$$\mathbf{A}\Delta\mathbf{x} = -\Delta\mathbf{A}(\mathbf{x}^* + \Delta\mathbf{x})$$

$$\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{A}(\mathbf{x}^* + \Delta\mathbf{x})$$

$$||\Delta\mathbf{x}|| \le ||\mathbf{A}^{-1}|| \cdot ||\Delta\mathbf{A}|| \cdot ||\mathbf{x}^* + \Delta\mathbf{x}|| \cdot \frac{||\mathbf{A}||}{||\mathbf{A}||}$$

$$\frac{||\Delta\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}^* + \Delta\mathbf{x}||} \le \underbrace{||\mathbf{A}^{-1}|| \cdot ||\mathbf{A}||}_{\ge C_p} \cdot \frac{||\Delta\mathbf{A}||}{||\mathbf{A}||}$$

$$\boxed{C_p = \frac{\frac{||\Delta\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}^* + \Delta\mathbf{x}||}}{\frac{||\Delta\mathbf{A}||}{||\mathbf{A}||}} \le ||\mathbf{A}^{-1}|| \cdot ||\mathbf{A}||}$$

3. Rozmyslete obecný případ $\Delta\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, $\Delta\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ viz skripta (D.cv.)

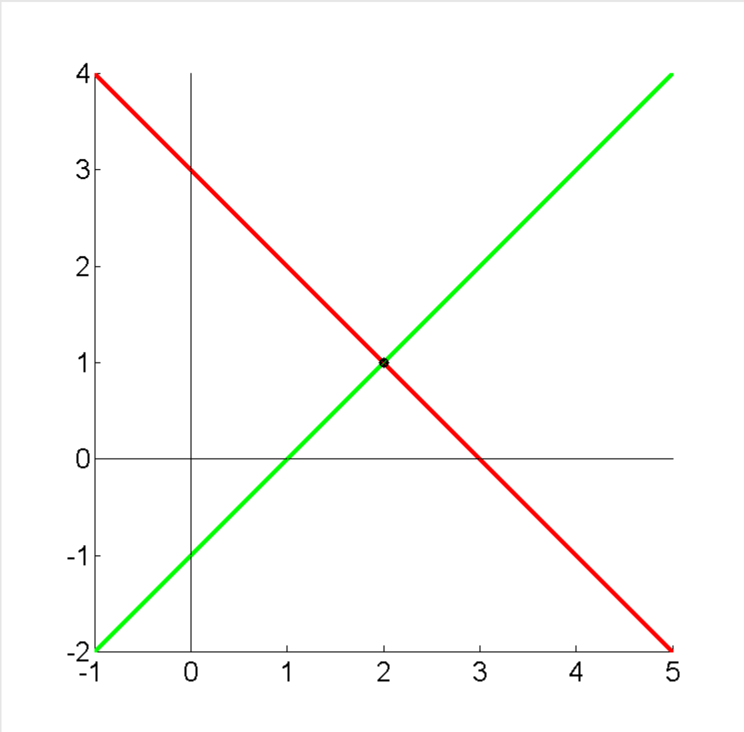
<u>Poznámka:</u> Pro symetrické matice je číslo podmíněnosti podíl největší a nejmenší absolutní hodnoty vlastního čísla.

$$C_p = \underbrace{||\mathbf{A}^{-1}||}_{\frac{1}{\lambda_{min}}} \cdot \underbrace{||\mathbf{A}||}_{\lambda_{max}} = \frac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|}$$

(Pro symetrické matice platí, že mají reálná vlastní čísla.)

Geometrická interpretace - dobře podmíněná úloha (2D)

$$\boxed{\begin{array}{l} x+y=3 \\ x-y=1 \end{array}} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} {\color{red} y=3-x} \\ {\color{green} y=x-1} \end{array}\right\} \quad \text{řešení} \quad \begin{array}{l} x^*=2 \\ y^*=1 \end{array}$$



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dobře podmíněná úloha - malá relativní změna vstupních dat vyvolá malou relativní změnu výstupních dat.

$$C_p = ||A^{-1}|| \cdot ||A||$$

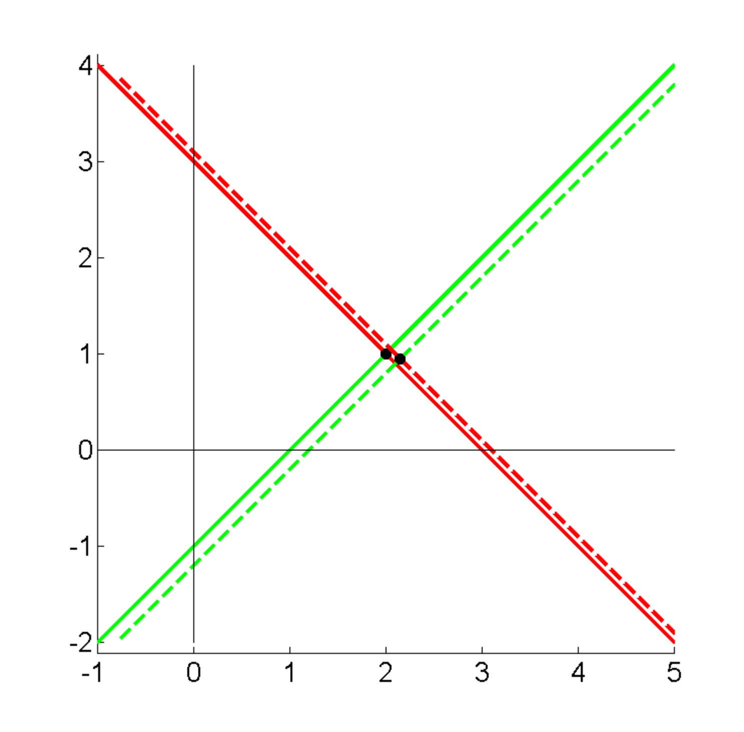
$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -0,5 \end{bmatrix} = 0,5\,\mathbf{A}$$

$$\boxed{C_p = 1 \cdot 2 = \mathbf{2} \text{ (řádková, sloupcová norma)}; \quad C_p = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2} = \mathbf{1} \text{ (spektrální norma)}}$$

$$\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad ||\mathbf{A}||_{SP} = \sqrt{2}, \quad ||\mathbf{A}^{-1}||_{SP} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

1. změna pravé strany (změna matice $\Delta\mathbf{A} = \mathbf{0}$)

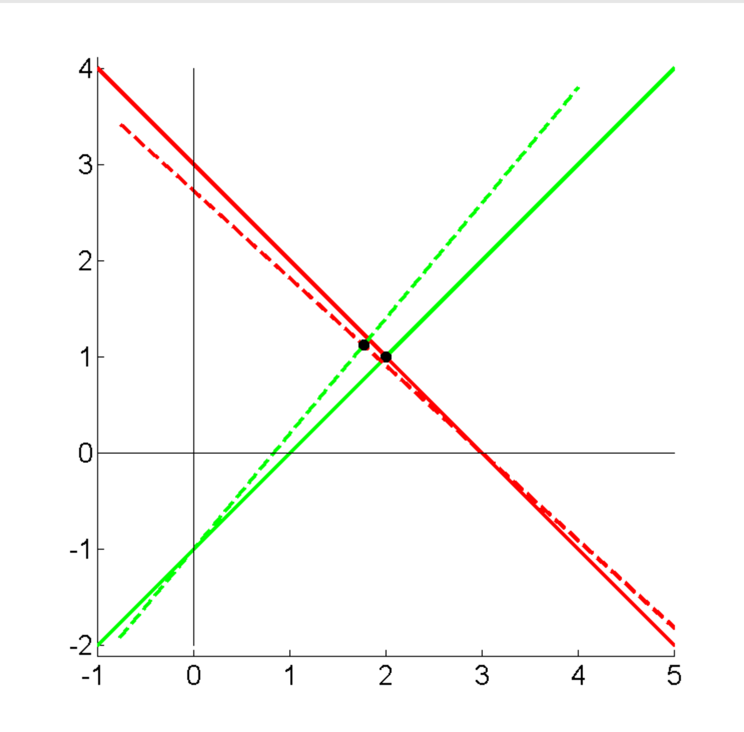
$$\Delta\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3,1 \\ 1,2 \end{bmatrix}$$



změněná soustava $y = 3,1 - x$; $y = x - 1,2$

2. změna matice soustavy (změna pravé strany $\Delta \mathbf{b} = \mathbf{0}$)

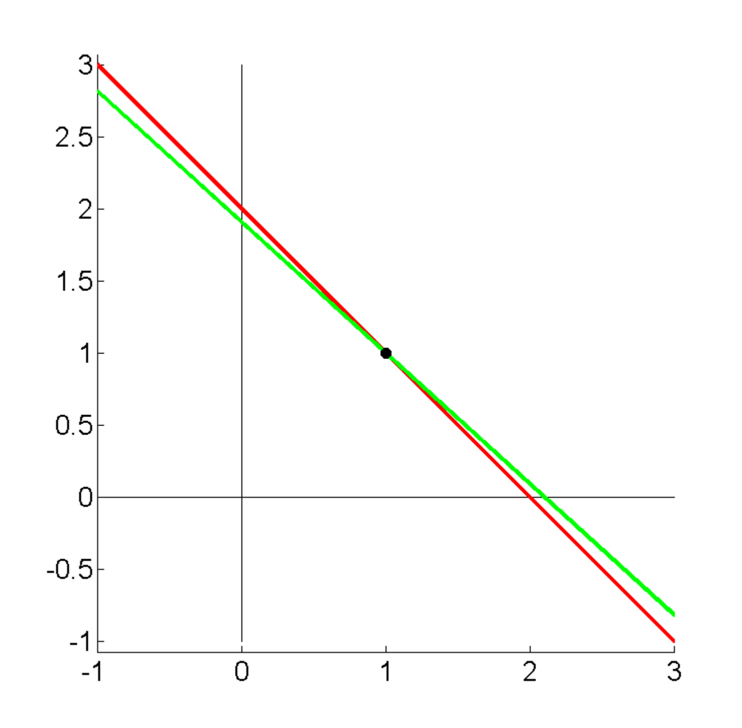
$$\Delta \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0,1 \\ 0,2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} + \Delta \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1,1 \\ 1,2 & -1 \end{bmatrix}$$



změněná soustava $y = \frac{1}{1,1}(3 - x)$; $y = 1,2\,x - 1$

Geometrická interpretace - špatně podmíněná úloha (2D)

$$\boxed{\begin{array}{c} x + y = 2 \\ x + 1{,}1\, y = 2{,}1 \end{array}} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{c} y = 2 - x \\ y = \frac{1}{1{,}1}(2{,}1 - x) \end{array}\right\} \text{ řešení } \begin{array}{c} x^* = 1 \\ y^* = 1 \end{array}$$



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1{,}1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2{,}1 \end{bmatrix}$$

Špatně podmíněná úloha - malá relativní změna vstupních dat vyvolá velkou relativní změnu výstupních dat.

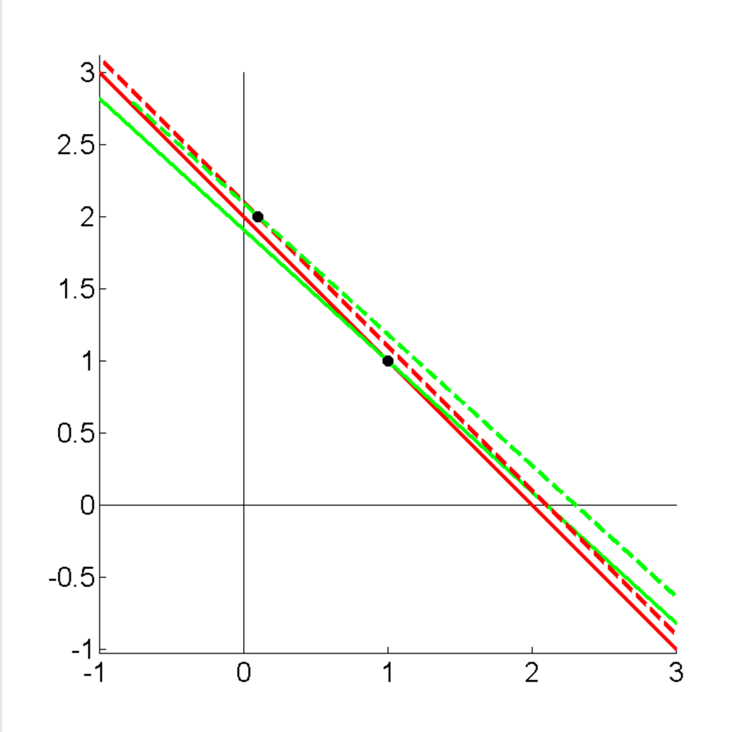
$$C_p = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ -10 & 10 \end{bmatrix}$$

$C_p = 2{,}1 \cdot 21 =$ **44,1** (řádková, sloupcová norma); $C_p = 2{,}0512 \cdot 20{,}5125 =$ **42,07** (spektrální norma)

1. změna pravé strany (změna matice $\Delta\mathbf{A} = \mathbf{0}$)

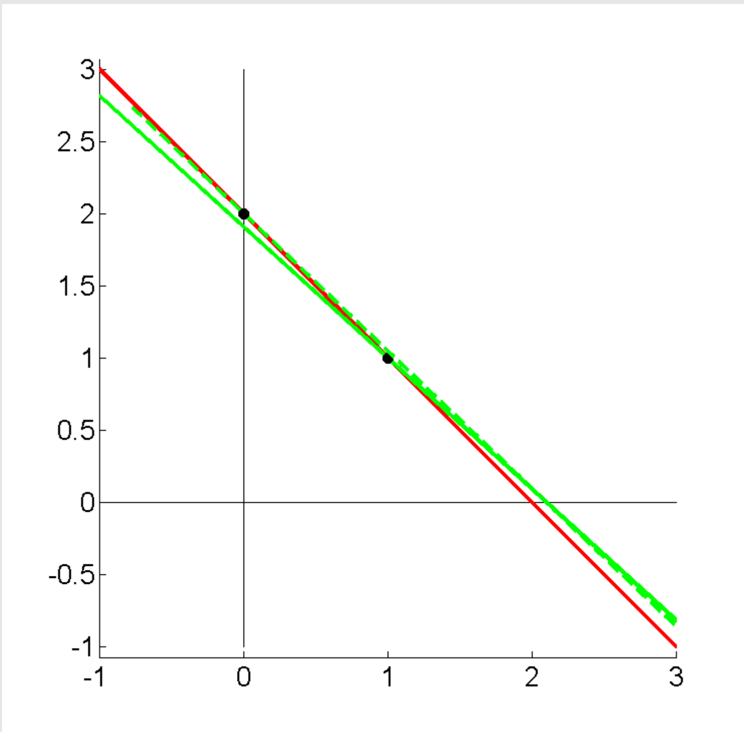
$$\Delta\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2{,}1 \\ 2{,}3 \end{bmatrix}$$



změněná soustava $y = 2,1 - x$; $y = \frac{1}{1,1}(2,3 - x)$

2. <u>změna matice soustavy</u> (změna pravé strany $\Delta\mathbf{b} = \mathbf{0}$)

$$\Delta\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0,05 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} + \Delta\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1,05 \end{bmatrix}$$



změněná soustava $y = 2 - x$; $y = \frac{1}{1,05}(2,1 - x)$

Poznámka: Jiný výpočet čísla podmíněnosti (prakticky)

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

změna na vstupu ... $\Delta\mathbf{A}$

vyvolá změnu na výstupu ... $\Delta\mathbf{x}$

$$(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

$$C_p = \frac{\dfrac{||\Delta\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}||}}{\dfrac{||\Delta\mathbf{A}||}{||\mathbf{A}||}}$$

Příklad

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 50 & -100 \\ 50 & -101 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

změna matice soustavy

$$\Delta\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0,1 \\ 0,2 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \Delta\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 50 & -99,9 \\ 50,2 & -101 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \widetilde{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2,8527 \\ 1,4278 \end{bmatrix}$$

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2,8527 \\ 1,4278 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,8527 \\ -0,4278 \end{bmatrix}$$

$\|\|.\|\|$	1.vektorová / sloupcová	maximová / řádková	euklidovská / spektrální
$\Delta\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -0,8527 \\ -0,4278 \end{bmatrix}$	1,2805	0,8527	0,9539
$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	3	2	2,2361
$\Delta\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0,1 \\ 0,2 & 0 \end{bmatrix}$	0,2	0,2	0,2
$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 50 & -100 \\ 50 & -101 \end{bmatrix}$	201	151	158,7479
C_p	428,97	321,89	338,6

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_i |x_i|, \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |x_i|, \quad \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}$$

$$\|\mathbf{A}\|_S = \max_k \sum_i |a_{ik}|, \quad \|\mathbf{A}\|_R = \max_i \sum_k |a_{ik}|, \quad \|\mathbf{A}\|_{SP} = \max_k \lambda_k^{\frac{1}{2}}(A^H A)$$

(Při použití různých norem dostáváme obecně různá čísla podmíněnosti.)

$$C_p = \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}\|$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2,02 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C_p = 151 \cdot 4,02 = 607,02 \quad (\text{řádková } \|.\|);$$

$$C_p = 201 \cdot 3,02 = 607,02 \quad (\text{sloupcová } \|.\|);$$

$$C_p = 158,7479 \cdot 3,1750 \doteq 504,03 \quad (\text{spektrální } \|.\|)$$

Poznámky k podmíněnosti

- Stále předpokládáme, že $\mathbf{A}$ je regulární matice.

  Soustava $\boxed{\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}}$ má potom právě jedno řešení.

  Předpokládejme, že je matice $\mathbf{A}$ normalizována tak, že její max. prvek v absolutní hodnotě je roven 1.

  Je-li soustava špatně podmíněná, potom matice $\mathbf{A}^{-1}$ musí obsahovat velké prvky.

  např:

  $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0,99999 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -99999 & 100000 \\ 100000 & -100000 \end{bmatrix}$$

  To odpovídá faktu, že číslo podmíněnosti je velké $\boxed{C_p = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|}$ (norma $\|\mathbf{A}^{-1}\|$ je velká).

- Rozbor chyb

  $$\boxed{\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}}, \quad \mathbf{x}^* \ \dots \ \text{přesné}, \quad \mathbf{x}_c \ \dots \ \text{vypočtené}$$

  $\Rightarrow$ chybu můžeme měřit pomocí rezidua $\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{A}\mathbf{x}_c - \mathbf{b}}$ (pro přesné řešení je $\mathbf{r} = \mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{b} = \mathbf{0}$)

  Platí: Je-li $\mathbf{x}_c$ blízko $\mathbf{x}^*$ $\Rightarrow$ reziduum je malé. Bohužel to **neplatí obráceně** !!!

  $$\mathbf{r} = \mathbf{A}(\mathbf{x}_c - \mathbf{x}^*)$$

  $$\boxed{\mathbf{x}_c - \mathbf{x}^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{r}}$$

Pro špatně podmíněnou úlohu obsahuje $\mathbf{A}^{-1}$ velké prvky, které i pro malé hodnoty $\mathbf{r}$ mohou znamenat velkou chybu.

př:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0,99999 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1,99999 \end{bmatrix}$$

přesné řešení: $\mathbf{x}^* = [1, 1]^T$
vypočtené může být: $\mathbf{x}_c = [-98, 100]^T$

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}\mathbf{x}_c - \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1,999 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1,99999 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,00099 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ je lepší pokoušet se odhadovat $||\mathbf{x}_c - \mathbf{x}^*||$.

Bohužel se v odhadech vždy vyskytuje norma $||\mathbf{A}^{-1}||$!!! Podrobněji viz literatura.