Kapitola 2. Nelineární rovnice

Formulace:

Je dána funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$. Hledáme $x \in \langle a, b\rangle$ tak, aby $f(x) = 0$.
(x ... kořen rovnice)

Poznámka:

Najít přesné řešení analyticky je možné jen ve velmi jednoduchých případech, např. při řešení lineární rovnice $12x - 3 = 0$, při řešení kvadratické rovnice $4x^2 - 5x + 8 = 0$ nebo např. při řešení rovnice $\sin 5x = \pi$. Proto je nutné pro nalezení kořenů použít nějakou numerickou metodu.

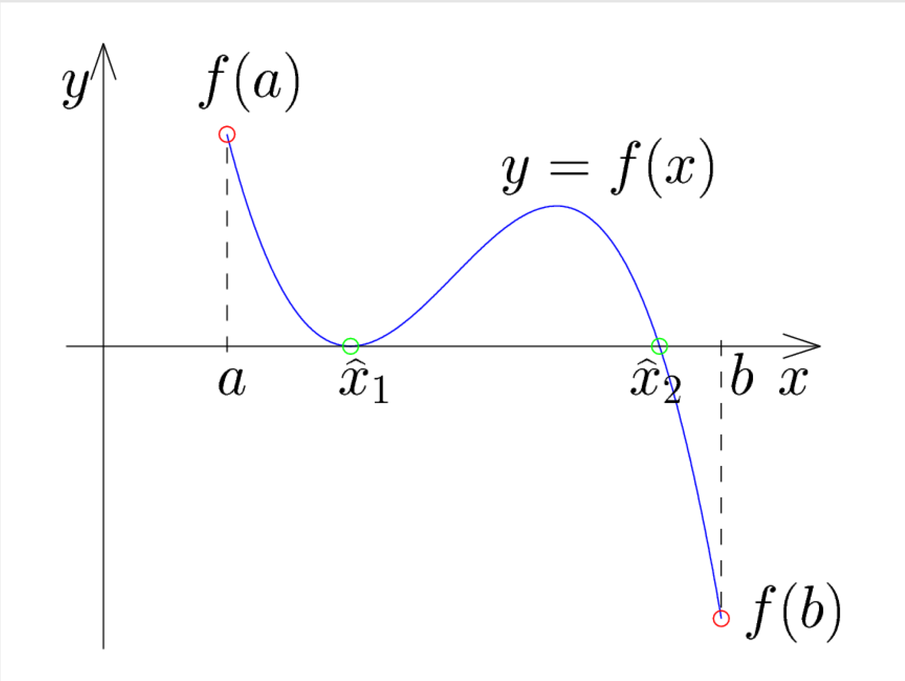
Numerické metody, kterými se budeme zabývat jsou založeny na **iteračních principech**. Pro každou iterační metodu nás budou zajímat odpovědi na dvě otázky:

- Konverguje posloupnost iterací ke hledanému kořenu?
- Jestliže ano, jak rychle?

Věta:

Předpokládejme, že
(i) reálná funkce f je spojitá pro $x \in \langle a, b\rangle$,
(ii) $f(a).f(b) < 0$.
Potom existuje aspoň jedno řešení x rovnice $f(x) = 0$ na $\langle a, b\rangle$.

Větu ilustruje následující obrázek.



Startovací metody

- metoda půlení intervalu

- regula falsi
- metoda prosté iterace

Zpřesňující metody

- Newtonova metoda
- metoda sečen
- Mullerova metoda

Metoda prosté iterace

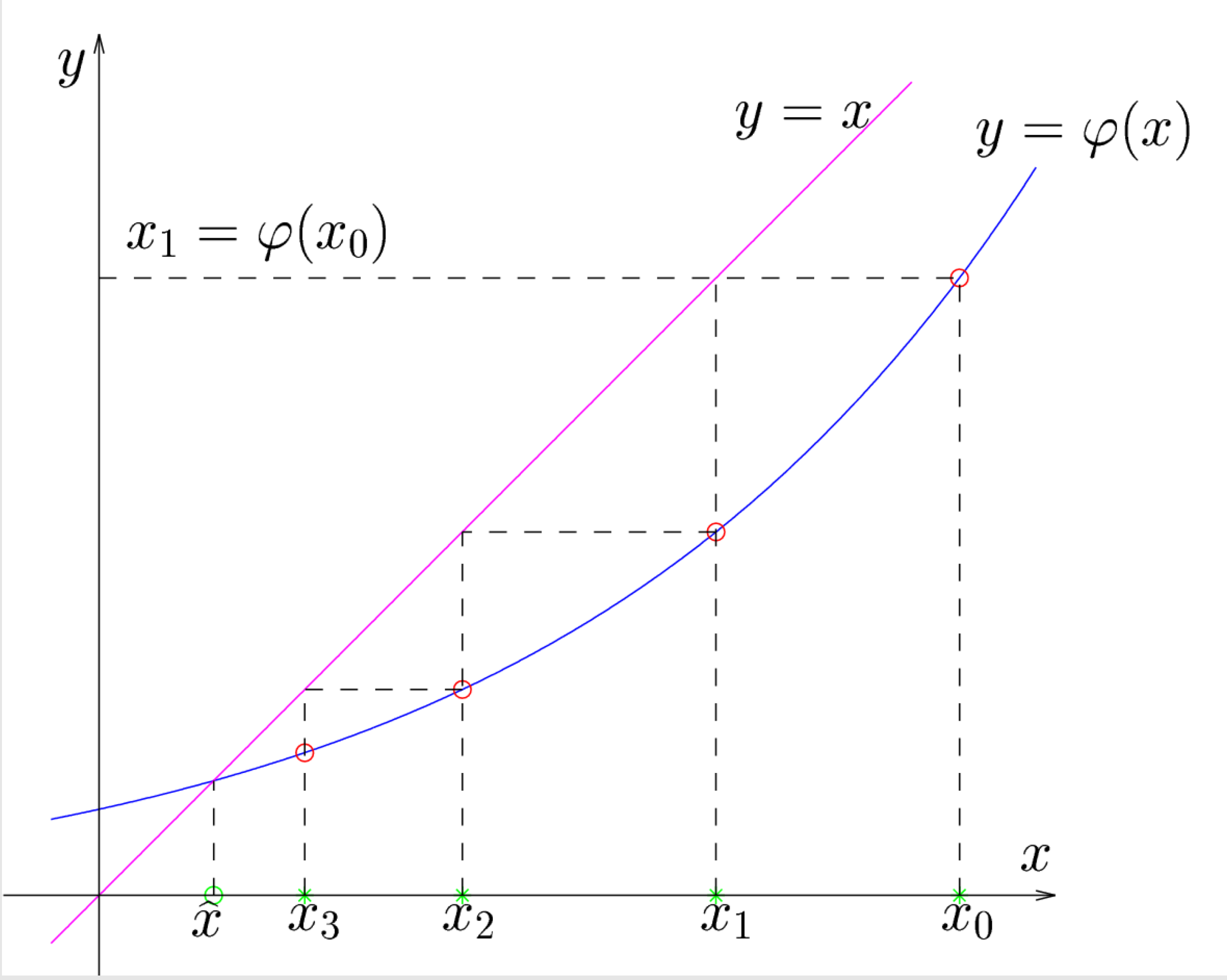
Všechny (jednobodové) iterační metody lze pokládat za speciální případ této metody.

Princip:

- původní rovnici $\boxed{f(x) = 0}$ přepíšeme na tvar $\boxed{x = \varphi(x)}$
- existuje celá řada možností, jak to udělat!
- na konkrétní volbě funkce φ závisí
  konvergence metody
  rychlost konvergence

Algoritnus:

1) Zadáme $x_0 \in \langle a, b \rangle$, $\varepsilon > 0$
2) $x_{k+1} = \varphi(x_k)$
3) Je-li $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$, pak $x = x_{k+1}$, KONEC
   jinak jdi na 2)



Příklad 1

Metodou prosté iterace najděte na intervalu $\langle 1, 4\rangle$ řešení rovnice

$$\boxed{x^2 + \ln x - \frac{10}{x} = 0.}$$

Za počáteční iteraci volte střed zadaného intervalu, tj. $x_0 = 2{,}5$.

Řešení

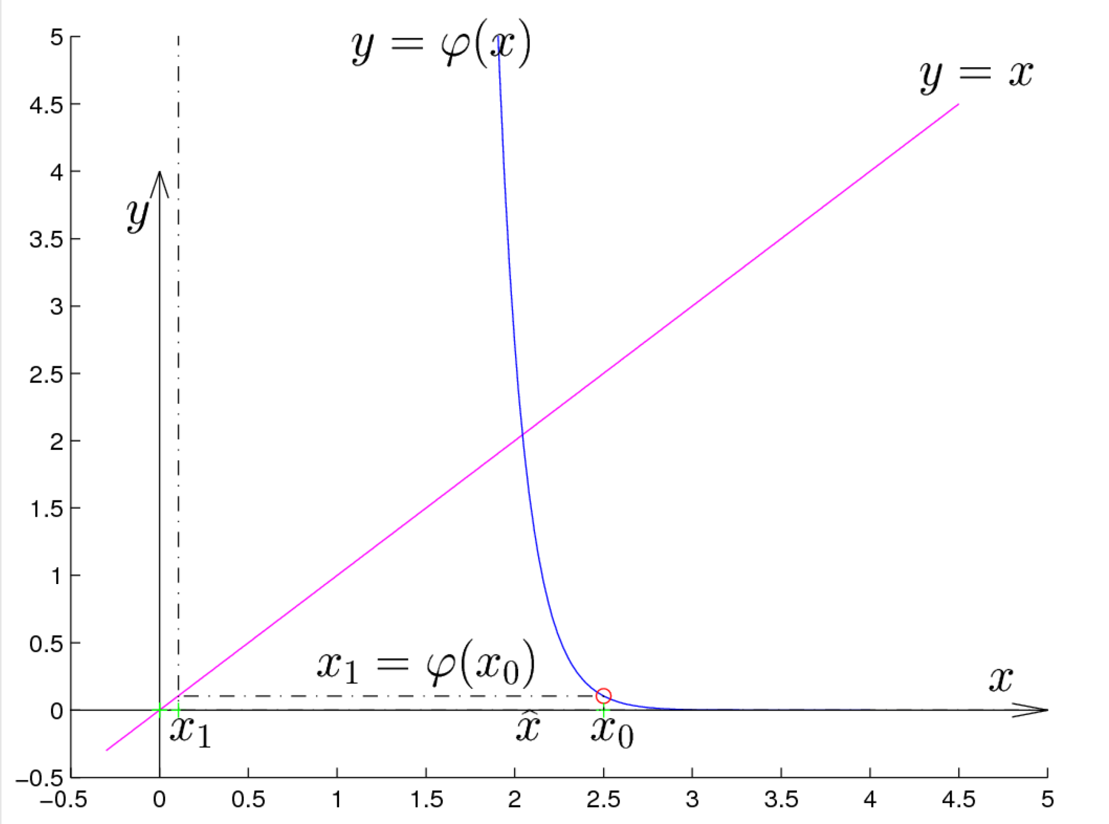
Ukážeme si 4 způsoby přepisu rovnice $f(x) = 0$ na tvar $x = \varphi(x)$.

1. způsob:

$$\ln x = \frac{10}{x} - x^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = e^{\left(\frac{10}{x} - x^2\right)}} \quad \text{tj.} \quad \varphi(x) = e^{\left(\frac{10}{x} - x^2\right)}$$

k	x_k
0	2.5
1	0.1054
2	$1.5845 \cdot 10^{41}$

Již první iterace x_1 je mimo zadaný interval, navíc druhá iterace x_2 je velmi velké číslo a proto metoda prosté iterace nekonverguje.

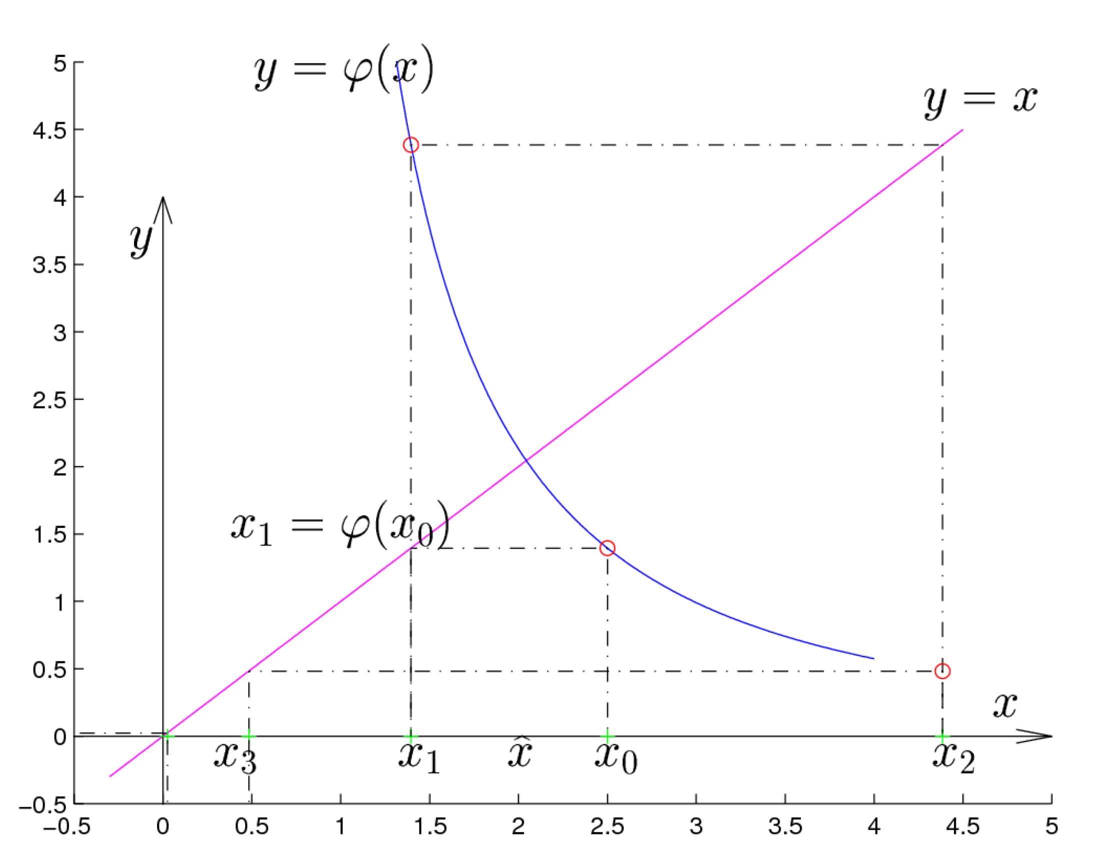


2. způsob:

$$x^2 + \ln x = \frac{10}{x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{10}{x^2 + \ln x}} \quad \text{tj.} \quad \varphi(x) = \frac{10}{x^2 + \ln x}$$

k	x_k
0	2.5
1	1.3954
2	4.3852
3	0.4829
4	-20.2122

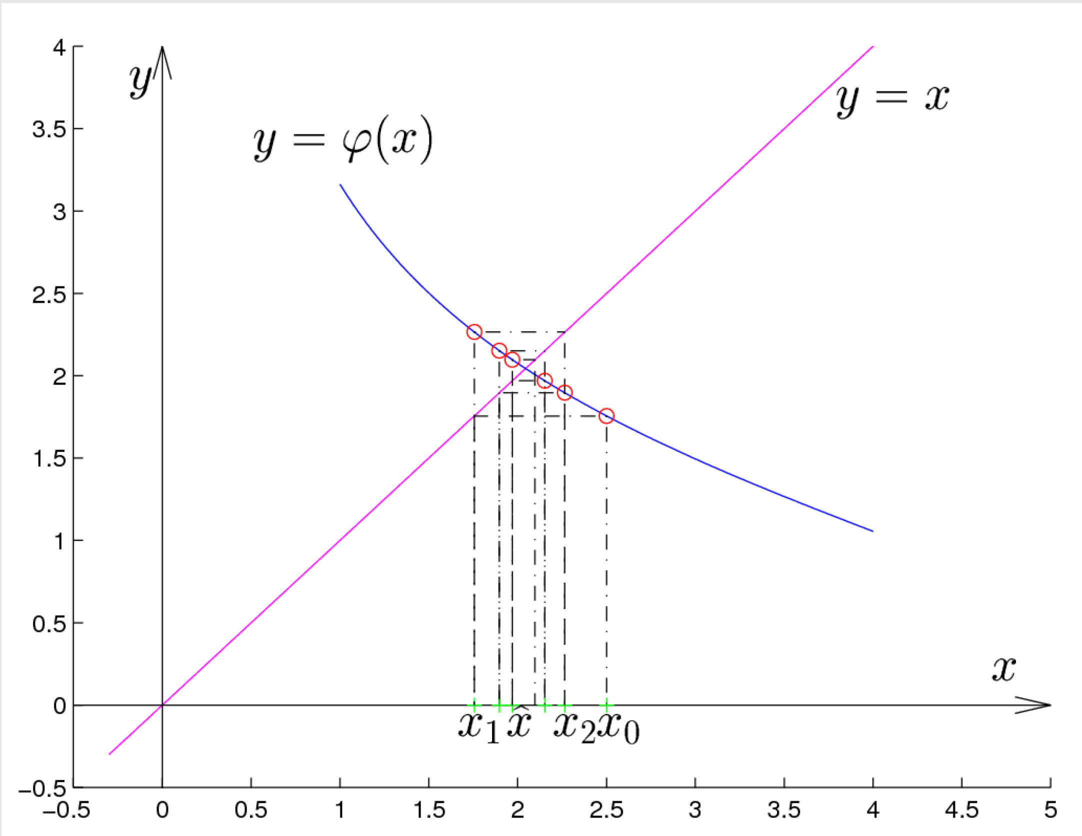
Podobně jako v předchozím případě, zde je 2. iterace x_2 mimo zadaný interval a metoda prosté iterace opět nekonverguje.



3. způsob:

$$x^2 = \frac{10}{x} - \ln x \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \sqrt{\frac{10}{x} - \ln x}} \quad \text{tj.} \quad \varphi(x) = \sqrt{\frac{10}{x} - \ln x}$$

k	x_k
0	2.5
1	1.7560
2	2.2653
3	1.8965
4	2.1524
5	1.9696
6	2.0974
7	2.0067
8	2.0704
9	2.0254
10	2.0571
11	2.0347
12	2.0505
13	2.0393
14	2.0472
15	2.0416
16	2.0455
17	2.0428
18	2.0447
19	2.0434

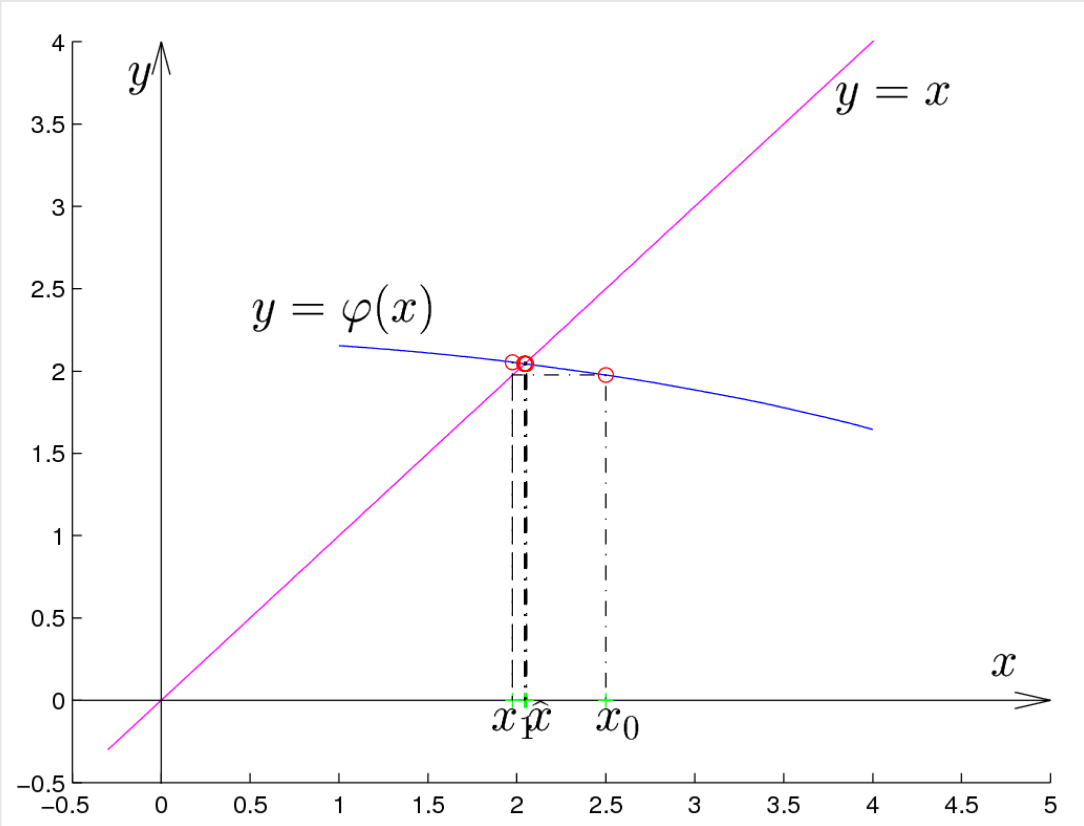


V tomto případě metoda prosté iterace konvergovala k výsledku $\hat{x}$, rychlost "zahušťování" byla ovšem malá.

4. způsob:

$$x^3 + x\ln x - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \sqrt[3]{10 - x\ln x}} \quad \text{tj.} \quad \varphi(x) = \sqrt[3]{10 - x\ln x}$$

k	x_k
0	2.5
1	1.9755
2	2.0532
3	2.0427
4	2.0441
5	2.0439



V tomto posledním případě metoda prosté iterace konvergovala k výsledku $\hat{x}$ velmi rychle. To dokazuje ten fakt, že kdybychom použili pro zastavení podmínku, aby absolutní hodnota rozdílu dvou po sobě jdoucích iterací byla menší než 10^{-10} potřebovali bychom k tomu pouze 10 iterací.

Poznámka:

Chování metody prosté iterace je závislé na zvoleném předpisu pro funkci $\varphi = \varphi(x)$. Porovnáním grafů z předchozího příkladu lze usoudit, že je vhodné, aby se funkce $\varphi(x)$ co nejvíce blížila konstantní funkci.

Věta (Postačující podmínky konvergence metody prosté iterace.)

Předpokládejme, že je funkce φ na intervalu $I = \langle a, b\rangle$ spojitá a platí:

(a) $\forall x \in I : \varphi(x) \in I$ **(funkce φ zobrazuje I do sebe),**

(b) $\exists q \in \langle 0, 1) : \ |\varphi(x) - \varphi(y)| \le q|x - y| \quad \forall x, y \in I$ **(funkce φ je kontrakce).**

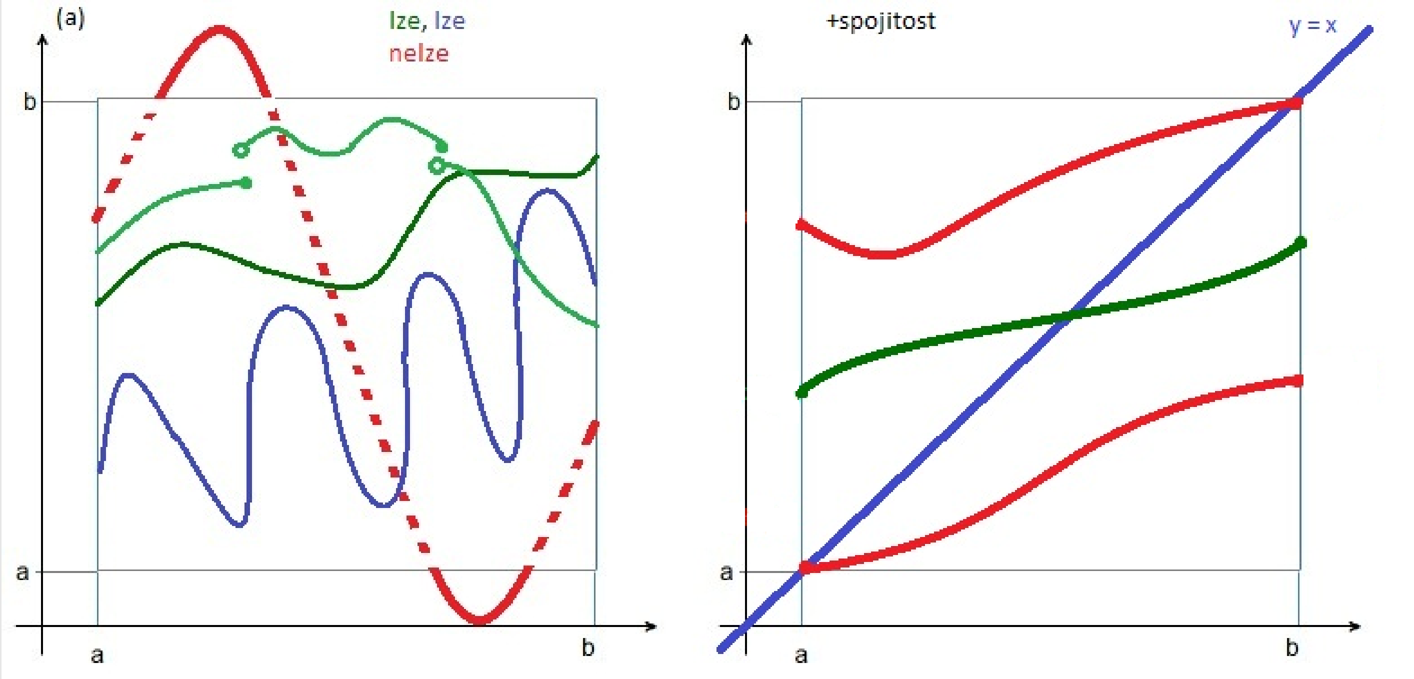
Potom

1) v intervalu I existuje právě jeden kořen α rovnice $x = \varphi(x)$,

2) posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ určená formulí $x_k = \varphi(x_{k-1})$ konverguje pro každé $x_0 \in I$ a $\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha$.

Důkaz

1) $\boxed{\text{existence}}$ je důsledkem podmínky (a) a spojitosti φ



$\Rightarrow \quad \varphi(x) \geq a, \quad \varphi(x) \leq b \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$

$\Rightarrow$ musí platit

$$\varphi(a) \geq a, \; \varphi(b) \leq b$$
$$\varphi(a) \leq b, \; \varphi(b) \geq a$$

$\boxed{\text{jednoznačnost}}$ plyne z vlastnosti (b)

DK sporem: Předpokládejme, že existují 2 různé hodnoty $\alpha_1 \neq \alpha_2$ takové, že

$$\alpha_1 = \varphi(\alpha_1), \quad \alpha_2 = \varphi(\alpha_2)$$

Potom platí:

$$|\alpha_2 - \alpha_1| = |\varphi(\alpha_2) - \varphi(\alpha_1)| \underbrace{\leq}_{(b)} q \cdot |\alpha_2 - \alpha_1| \underbrace{<}_{spor} |\alpha_2 - \alpha_1|$$

---

2) Platí:

$$x_k = \varphi(x_{k-1})$$
$$\underline{\alpha = \varphi(\alpha)}$$

po odečtení:

$$x_k - \alpha = \varphi(x_{k-1}) - \varphi(\alpha)$$

$$|x_k - \alpha| = |\varphi(x_{k-1}) - \varphi(\alpha)| \underbrace{\leq}_{(b)} q \cdot |x_{k-1} - \alpha| \qquad (*)$$

$(*) \Rightarrow$

$$|x_1 - \alpha| \leq q \cdot |x_0 - \alpha|$$
$$|x_2 - \alpha| \leq q \cdot |x_1 - \alpha| \leq q^2 \cdot |x_0 - \alpha|$$
$$\dots$$

$$\boxed{|x_k - \alpha| \leq \underbrace{q^k}_{(**)} \underbrace{|x_0 - \alpha|}_{konst} \qquad \forall x_0 \in \langle a, b \rangle}$$

$(**)$ $q^k \to 0$ pro $k \to \infty$ $(|q| < 1)$

Poznámka:

Podívejte se na souvislost předpokladů předchozí věty a volby funkce φ v jednotlivých případech příkladu 1.

Poznámka:

Pro diferencovatelnou funkci φ lze podmínku (b) nahradit podmínkou

(b') $\exists q \in \langle 0,1) : \ |\varphi'(x)| \leq q \quad \forall x \in I$

Poznámka:

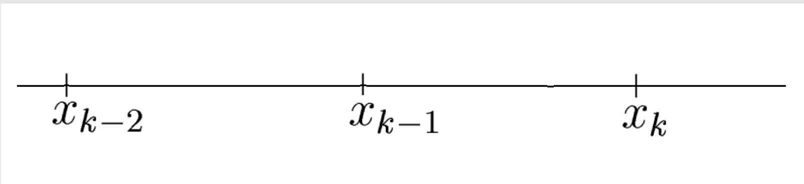
Rychlost konvergence metody prosté iterace je charakterizována $|\varphi'(x_k)|$, jelikož lze psát

$$\varphi'(x_k) \approx \frac{\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)}{x_{k+1} - x_k} = \frac{x_{k+2} - x_{k+1}}{x_{k+1} - x_k}.$$

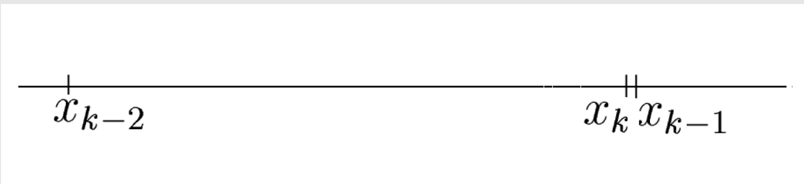
Poznámka:

Souvislost "zahušťování iterací" a hodnotě φ'

a) $q \lessapprox 1 \quad \Rightarrow \quad |x_k - x_{k-1}| \lessapprox |x_{k-1} - x_{k-2}|$



b) $q \approx 0 \quad \Rightarrow \quad |x_k - x_{k-1}| \ll |x_{k-1} - x_{k-2}|$



Poznámka:

Jak bylo řečeno hodnota rozdílu dvou po sobě jdoucích iterací neodpovídá obecně chybě přibližného řešení. Geometricky si to lze představit takto:

Odhad chyby metody prosté iterace

- Máme konvergentní proces $x_k = \varphi(x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots$
- Přesné řešení α splňuje vztah $\alpha = \varphi(\alpha), \quad \lim_{k\to\infty} x_k = \alpha$

- Po odečtení dostaneme $x_k - \alpha = \varphi(x_{k-1}) - \varphi(\alpha)$

$$\text{tj.} \quad |x_k - \alpha| = |\varphi(x_{k-1}) - \varphi(\alpha)| \qquad \leftarrow$$

- Předpokládáme, že φ je lipchitzovská s konstantou $q \in (0,1)$, tj. musí platit:

$$|\varphi(x_{k-1}) - \varphi(\alpha)| \leq q \cdot |x_{k-1} - \alpha| \qquad \leftarrow$$

- Dále použijeme $\triangle$ nerovnost:

$$|x_{k-1} - \alpha| = |x_{k-1} - x_k + x_k - \alpha| \leq |x_{k-1} - x_k| + |x_k - \alpha| \qquad \leftarrow$$

- Z posledních 3 vztahů dostaneme:

$$|x_k - \alpha| \leq q \cdot |x_{k-1} - x_k| + q \cdot |x_k - \alpha|$$

$$(1-q) \cdot |x_k - \alpha| \leq q \cdot |x_{k-1} - x_k| \qquad / \cdot \frac{1}{1-q} > 0$$

$$\boxed{|x_k - \alpha| \leq \frac{q}{1-q} \cdot |x_{k-1} - x_k|}$$

- Použijeme-li zastavovací podmínku

$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon,$$

potom platí odhad chyby

$$\boxed{|x_k - \alpha| \leq \frac{q}{1-q} \varepsilon}$$

Příklad 2

Pomocí metody prosté iterace řešte na intervalu $\langle 0, 4 \rangle$ rovnici

$$x - \sqrt{x+4} = 0.$$

---

přesné řešení:

$$x = \sqrt{x+4} \quad /^2$$

$$x^2 = x + 4$$

$$x^2 - x - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{x_1 \approx 2,5615}, \quad x_2 \approx -1,5615 \notin \langle 0, 4 \rangle$$

- Rovnici přepíšeme na tvar: $x = \underbrace{\sqrt{x+4}}_{\varphi(x)}$

- Ověříme splnění předpokladů věty o postačujících podmínkách konvergence metody prosté iterace:

(a) $\forall x \in \langle 0, 4 \rangle :$

$$0 \leq \sqrt{x+4} \leq 4$$

$$0 \leq x + 4 \leq 16$$

$$-4 \leq x \leq 12$$

(b′) $\forall x \in \langle 0,4\rangle$: $|\varphi'(x)| < 1$

$$\left|\frac{1}{2\sqrt{x+4}}\right| < 1$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x+4}} < 1$$

$$1 < 2\sqrt{x+4}$$

$$1 < 4x+16$$

$$-15 < 4x$$

- Vlastní výpočet:

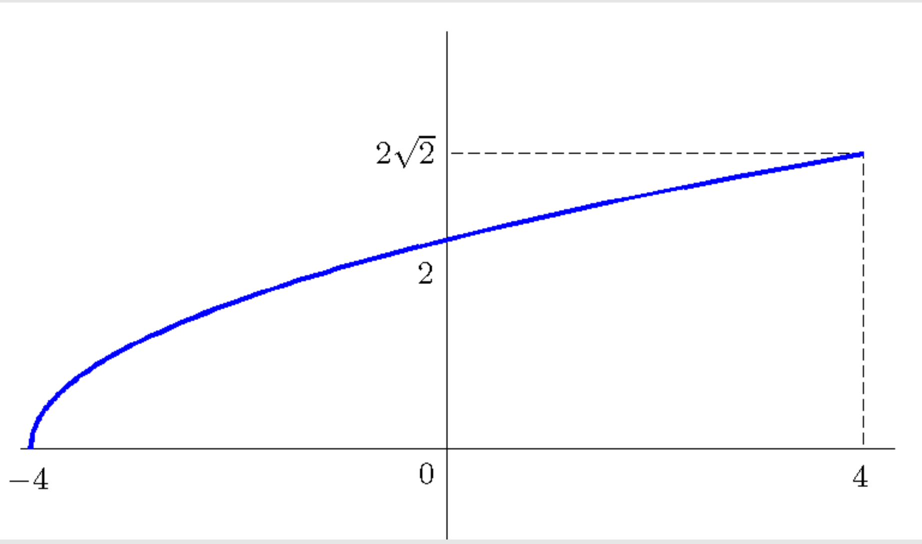
  volíme $x_0 = 2$ a pro zastavovací podmínku hodnotu $\varepsilon = 0.001$.

k	x_k
0	2
1	2.4494
2	2.5395
3	2.5572
4	2.5607
5	2.5613

$\Rightarrow$ $\underline{\tilde{x} = x_5 = 2.5613}$.

- Odhadněme velikost chyby přibližného řešení předchozího příkladu.

  Graf funkce $\varphi(x)$:



Platí:

$$\varphi' = \frac{1}{2\sqrt{x+4}} \quad \ldots \quad \text{kladná klesající funkce}$$

$$(\varphi'' = (\frac{1}{2}(x+4)^{-\frac{1}{2}})' = -\frac{1}{4}(x+4)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4(x+4)\sqrt{x+4}} < 0)$$

$$\Downarrow$$

$$\max_{0\leq x\leq 4}|\varphi'(x)| = |\varphi'(0)| = \frac{1}{4} = q \quad \dots \quad \text{podmínka (b')}$$

Zvolili jsme $\varepsilon = 0,001$ a proto platí odhad chyby:

$$\boxed{|x_5 - \alpha| \leq \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} \,.\, 0,001 = 0,000333}$$

Definice: Říkáme, že posloupnost x_k **konverguje** k číslu α **rychlostí** r, jestliže pro $k \to \infty$

$$|x_{k+1} - \alpha| = c|x_k - \alpha|^{r} + O(|x_k - \alpha|^{r+1}).$$

Mluvíme o asymptotické rychlosti konvergence ($k \to \infty$).

Poznámka:

$$f(x) = O(g(x)) \text{ pro } x \to a \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \text{ je omezená (a nenulová) pro } x \to a.$$

Příklady:

a) $\boxed{x^5 \cdot \sin x = O(x^5) \quad \text{pro} \quad x \to \infty} \Leftrightarrow \left|\frac{x^5 \cdot \sin x}{x^5}\right| = |\sin x| \leq 1 \quad \text{pro } x \to \infty$

b) $\boxed{x^5 \cdot \sin x = O(x^6) \quad \text{pro} \quad x \to 0} \Leftrightarrow \left|\frac{x^5 \cdot \sin x}{x^6}\right| = \left|\frac{\sin x}{x}\right| \to 1 \quad \text{pro } x \to 0$

Rychlost konvergence metody prosté iterace

Je-li funkce φ dostatečně hladká, můžeme napsat její Taylorův rozvoj v bodě α a potom pro $x = x_{k-1}$ platí:

$$\varphi(x_{k-1}) = \varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha)(x_{k-1} - \alpha) + \frac{\varphi''(\alpha)}{2}(x_{k-1} - \alpha)^2 + \frac{\varphi'''(\xi)}{6}(x_{k-1} - \alpha)^3$$

$$x_k - \alpha = \varphi'(\alpha)(x_{k-1} - \alpha) + \frac{\varphi''(\alpha)}{2}(x_{k-1} - \alpha)^2 + \frac{\varphi'''(\xi)}{6}(x_{k-1} - \alpha)^3$$

- je-li $\varphi'(\alpha) \neq 0$, potom

$$x_k - \alpha = \varphi'(\alpha)(x_{k-1} - \alpha)^1 + O((x_{k-1} - \alpha)^2)$$

$\Rightarrow$ rychlost konvergence je řádu 1

- je-li $\varphi'(\alpha) = 0$ a $\varphi''(\alpha) \neq 0$, potom

$$x_k - \alpha = \frac{\varphi''(\alpha)}{2}(x_{k-1} - \alpha)^2 + O((x_{k-1} - \alpha)^3)$$

$\Rightarrow$ rychlost konvergence je řádu 2

Newtonova metoda

Předpoklady:

Nechť v intervalu $I = \langle a, b\rangle$ leží jediný jednoduchý kořen $\widehat{x}$ rovnice $f(x) = 0$. Jelikož mluvíme o zpřesňující metodě, předpokládáme, že máme zadánu nultou iteraci $x_0 \in I$, která je relativně blízko hledanému řešení. Vyjádříme Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0. Přitom předpokládáme, že existují příslušné derivace funkce f.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2$$

Rovnici $f(x) = 0$ nahradíme lineární rovnicí

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

Ta má kořen

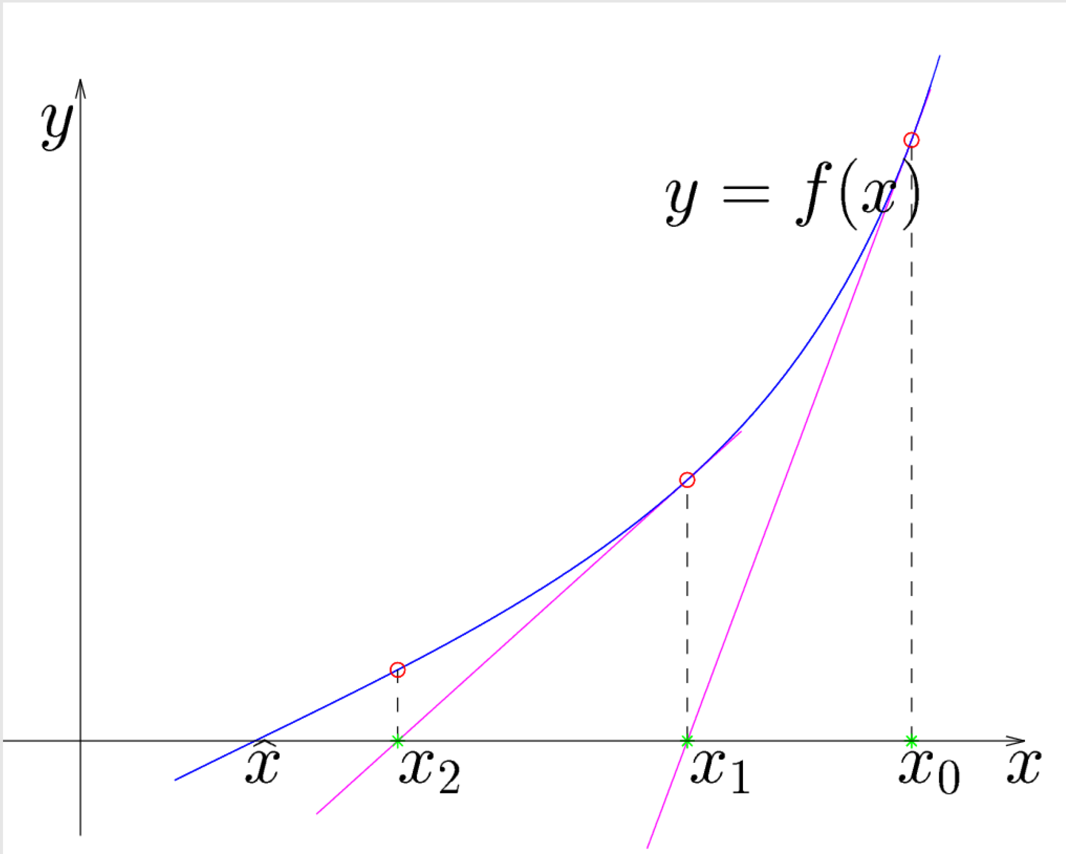
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Celý postup opakujeme a dostáváme iterační formuli

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Geometrický význam Newtonovy metody:

Křivku $y = f(x)$ nahradíme tečnou ke grafu v bodě x_k a hodnotu x_{k+1} získáme jako průsečík tečny s osou x. Proto se také Newtonova metoda nazývá **metoda tečen** nebo **metoda linearizace**.



Poznámka:

Jako zastavovací podmínku lze např. volit $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ nebo $|f(x_k)| < \delta$.

Poznámka:

Algoritmus Newtonovy metody je speciálním případem metody prosté iterace. Za funkci φ jsme volili funkci

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Rychlost konvergence Newtonovy metody

1. způsob odvození (Newtonova metoda jako speciální případ metody prosté iterace)

Rychlost konvergence závisí na $\varphi'(\alpha)$, resp. $\varphi''(\alpha)$ ... (viz dříve).

Platí:

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\varphi' = 1 - \frac{f'.f' - f.f''}{(f')^2} = 1 - 1 + \frac{f.f''}{(f')^2} = \frac{f.f''}{(f')^2}$$

$$\varphi'(\alpha) = 0, \quad \text{protože } f(\alpha) = 0$$

Platí:

$$\varphi'' = \frac{(f'.f'' + f.f''').(f')^2 - f.f''.2.f'.f''}{(f')^4}$$

$$\varphi''(\alpha) = \frac{(f')^3.f''}{(f')^4} = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}, \quad \text{protože } f(\alpha) = 0$$

Platí tedy $\varphi'(\alpha) = 0$ a obecně $\varphi''(\alpha) \neq 0$ $\Rightarrow$ rychlost konvergence je řádu 2.

2. způsob odvození

Pomocí Taylorova rozvoje funkce f v bodě x_0 (nechť existují $f'(x)$ a $f''(x)$ v I):

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} \cdot f''(\xi_0) \cdot (x - x_0)^2$$

Dosadíme za x přesné řešení α (tj. $f(\alpha) = 0$)

$$\underbrace{f(\alpha)}_{=0} = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (\alpha - x_0) + \frac{1}{2} \cdot f''(\xi_0) \cdot (\alpha - x_0)^2$$

Vydělíme $f'(x_0) \neq 0$:

$$0 = \underline{\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}} + \alpha \; \underline{- x_0} + \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_0)}{f'(x_0)}(\alpha - x_0)^2$$

$$= -x_1$$

$$x_1 - \alpha = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_0)}{f'(x_0)}(\alpha - x_0)^2$$

Proces opakujeme:

$$\boxed{\underbrace{x_{k+1} - \alpha}_{\text{chyba } k+1 \text{ iterace}} = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)} \underbrace{(\alpha - x_k)^2}_{\substack{\text{kvadrát chyby} \\ k\text{-té iterace}}}} \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ rychlost konvergence $= 2$

Nechť platí

$$\boxed{\frac{1}{2}\left|\frac{f''(\xi)}{f'(\eta)}\right| \leq C \qquad \forall \xi, \eta \in I}$$

(Určit C může být obecně problém.)

Označíme-li $\varepsilon_k = x_k - \alpha$ chybu k-té iterace, potom z $(*)$ plyne

$$|\varepsilon_{k+1}| \leq C|\varepsilon_k|^2, \text{ tj. } |C\varepsilon_{k+1}| \leq |C\varepsilon_k|^2$$

$$\begin{aligned} |C\varepsilon_1| &\leq |C\varepsilon_0|^2 \\ |C\varepsilon_2| &\leq |C\varepsilon_1|^2 \leq (|C\varepsilon_0|^2)^2 \\ |C\varepsilon_3| &\leq |C\varepsilon_2|^2 \leq ((|C\varepsilon_0|^2)^2)^2 \\ &\vdots \\ |C\varepsilon_k| &\leq |C\varepsilon_0|^{2^k} \end{aligned}$$

Dostáváme odhad chyby:

$$\boxed{|\varepsilon_k| \leq \frac{1}{C}|C\varepsilon_0|^{2^k}}$$

Postačující podmínka konvergence:

$$\text{Platí} \quad |\varepsilon_1| \leq C|\varepsilon_0|^2 = \underbrace{C|\varepsilon_0|}_{\#}|\varepsilon_0|$$

Pokud bude $\# < 1$, dostaneme kontrakci.

$$|C\varepsilon_0| = \boxed{|C(\alpha - x_0)| < 1}$$

$$|C\underbrace{(\alpha - x_1)}_{\varepsilon_1}| \leq |C\underbrace{(\alpha - x_0)}_{\varepsilon_0}| < 1, \quad \text{tj. } |C\varepsilon_1| < 1$$

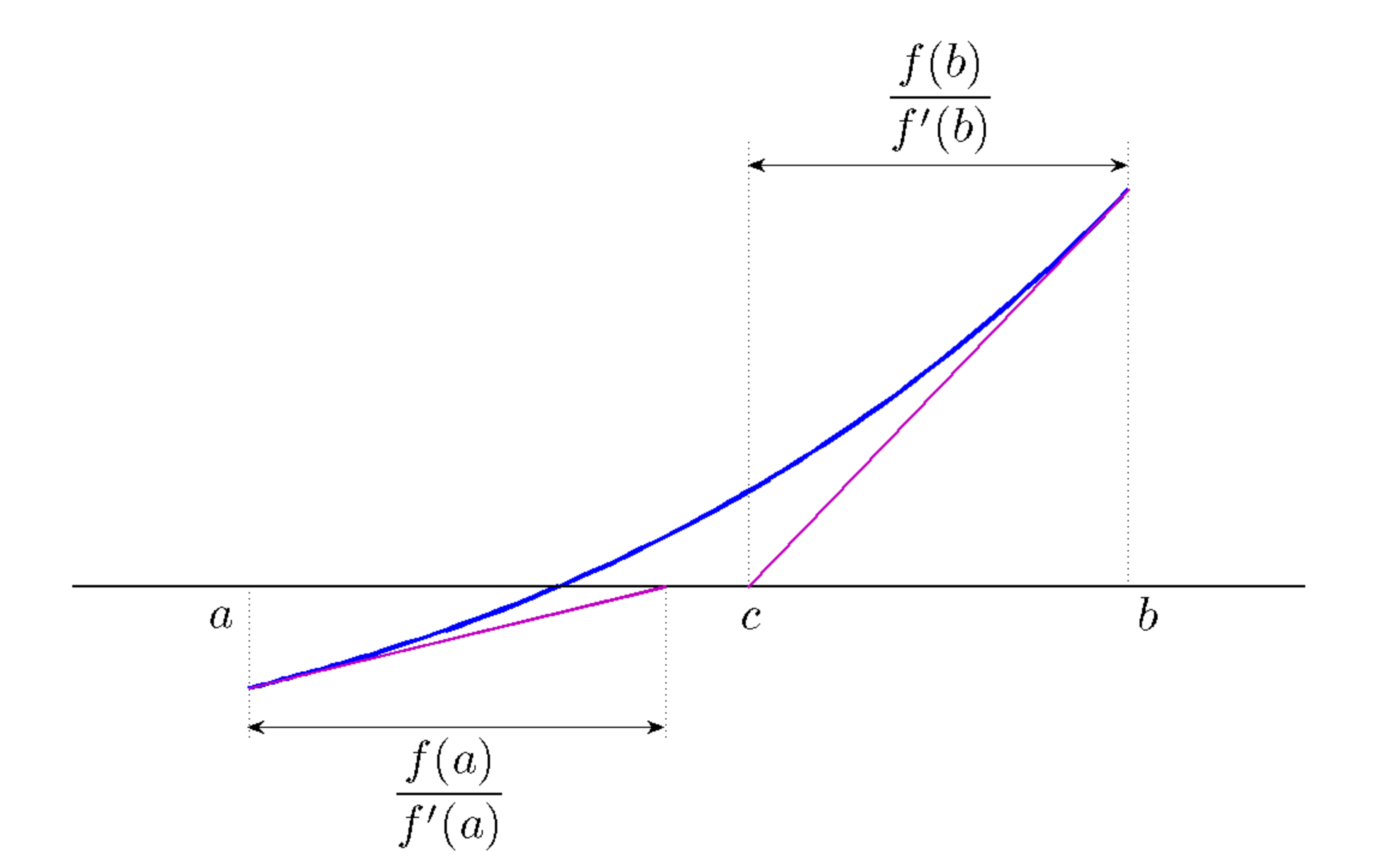
$$\vdots$$

Pro "velkou" hodnotu C musí být počáteční iterace x_0 "velmi přesná".

Věta (Postačující podmínky konvergence Newtonovy metody.)

Je-li $f'(x) \neq 0$, f'' nemění znaménko v $I = \langle a, b\rangle$, platí-li $f(a) \cdot f(b) < 0$ a $\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right| < b - a$, $\left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right| < b - a$, potom Newtonova metoda konverguje $\forall x_0 \in I$

Platnost tvrzení lze ověřit pomocí následujícího obrázku.



$$\text{např.} \qquad \frac{f(b) - \overbrace{f(c)}^{=0}}{b - c} = f'(b) \quad \Rightarrow \quad b - c = \frac{f(b)}{f'(b)}$$

Praktické pravidlo pro odhad přesnosti:

$$\text{Je-li } \; |\alpha - x_k| < 10^{-d} \; \text{ potom } \; |\alpha - x_{k+1}| < 10^{-2d}.$$

(pokud jsou splněny předpoklady pro odvození metody)

Poznámka:

Dosud jsme řešili nelineární rovnici pouze v $\mathbb{R}$. Algoritmus Newtonovy metody můžeme však použít i pro řešení dané rovnice v oboru **komplexních čísel**.

Příklad 1

Newtonovou metodou řešte v komplexním oboru rovnici

$$z^4 + z = 0, \qquad z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

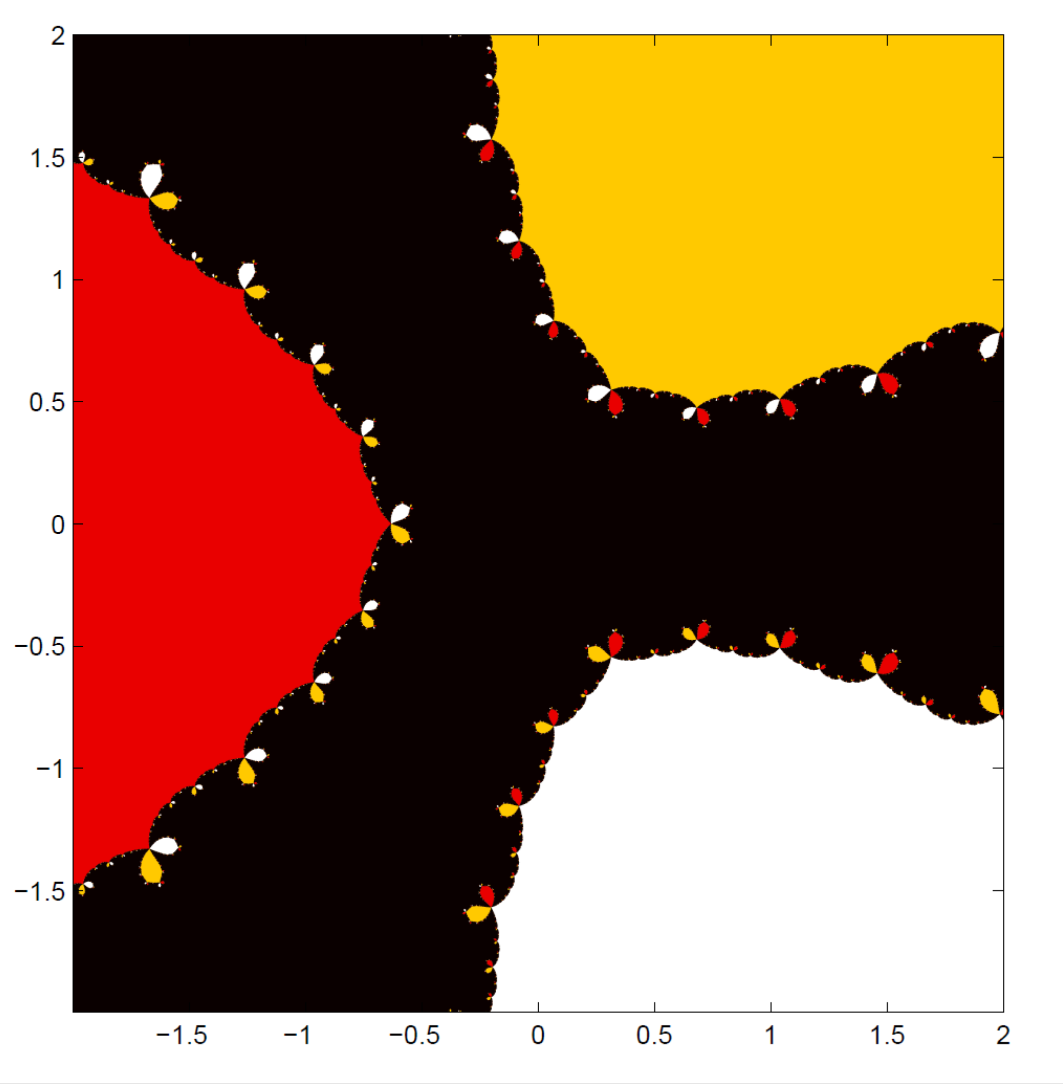
Iterační formule bude mít tvar

$$z_{k+1} = z_k - \frac{z_k^4 + z_k}{4z_k^3 + 1}$$

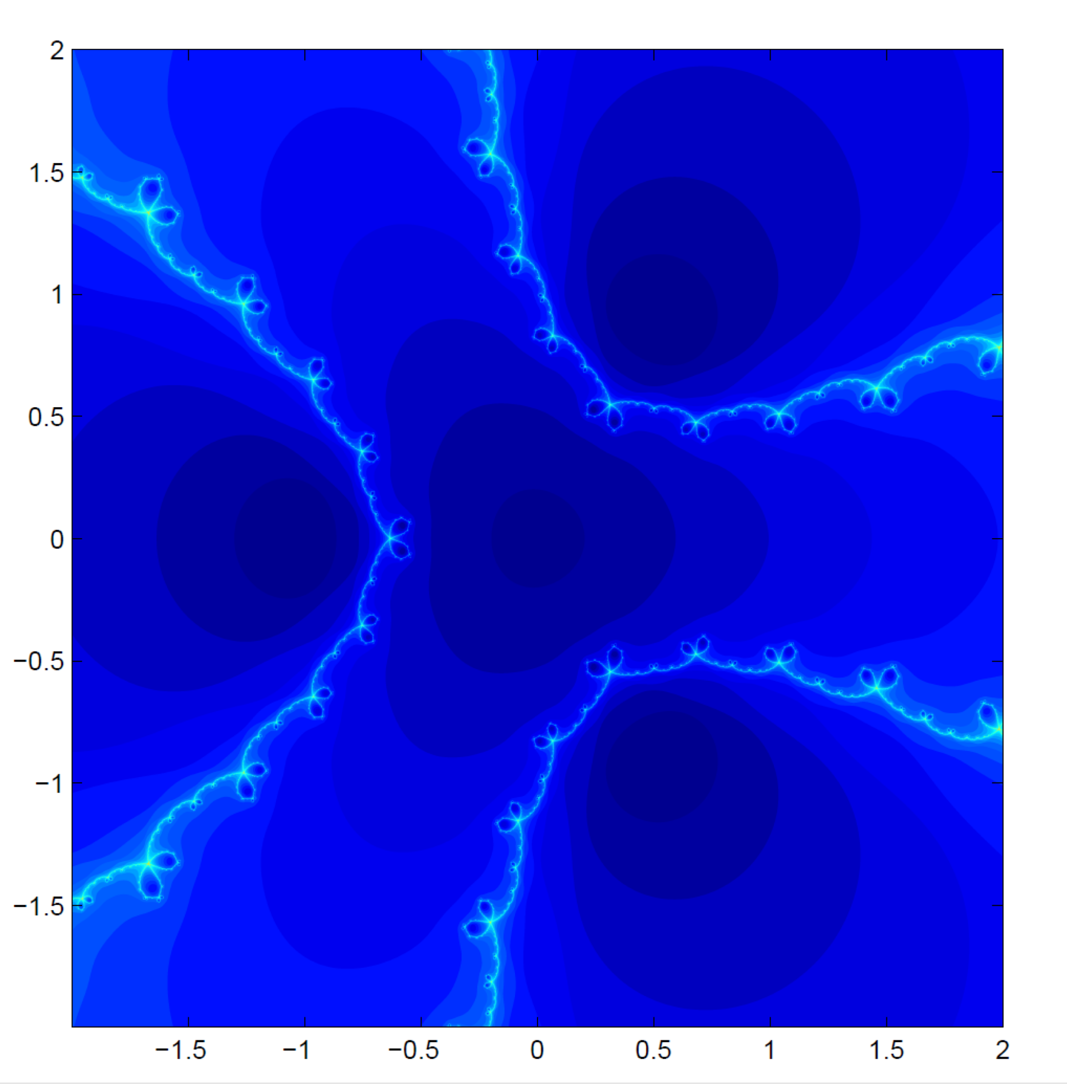
Je zřejmé, že daná rovnice bude mít 4 řešení:

$$0, \quad -1, \quad \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Řešíme-li danou rovnici Newtonovou metodou pro konkrétní počáteční aproximaci ze čtverce $\langle -2; 2\rangle \times \langle -2; 2\rangle$, dostaneme jedno ze čtyř uvedených řešení. Obarvíme-li bod představující počáteční aproximaci různou barvou, podle toho k jakému řešení dospějeme, získáme fraktálovou strukturu.



Pokud vykreslíme pro každý počáteční bod počet iterací nutných k rozhodnutí, ke kterému z možných kořenů metoda konverguje, dostaneme následující obrázek (tmavé odstíny znamenají malý počet iterací, světlé odstíny velký počet iterací).



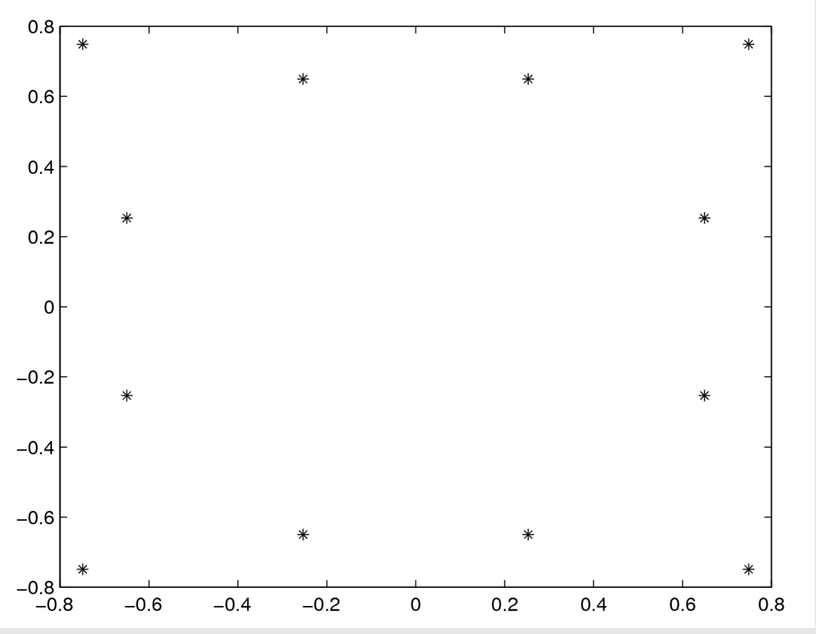
Příklad 2

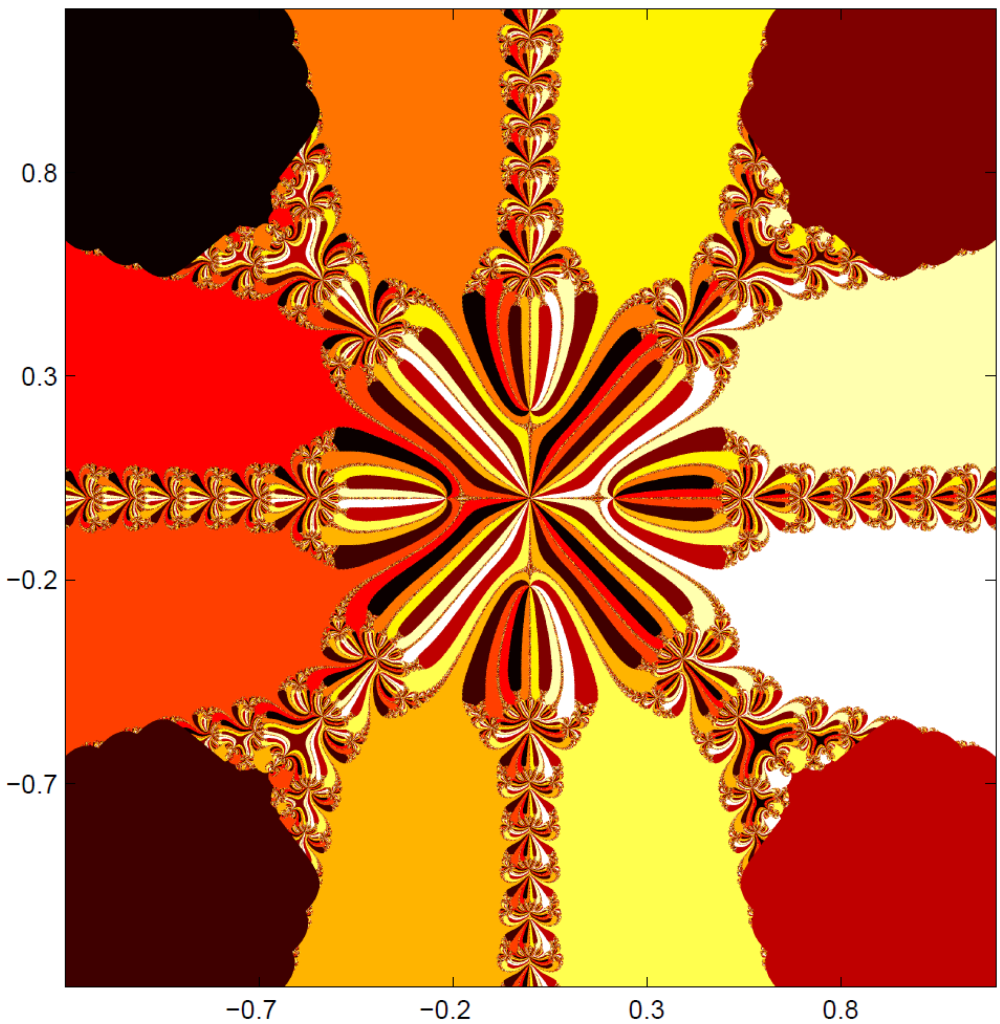
Newtonovou metodou řešte v komplexním oboru na čtverci $\langle -1.2; 1.2\rangle \times \langle -1.2; 1.2\rangle$ rovnici

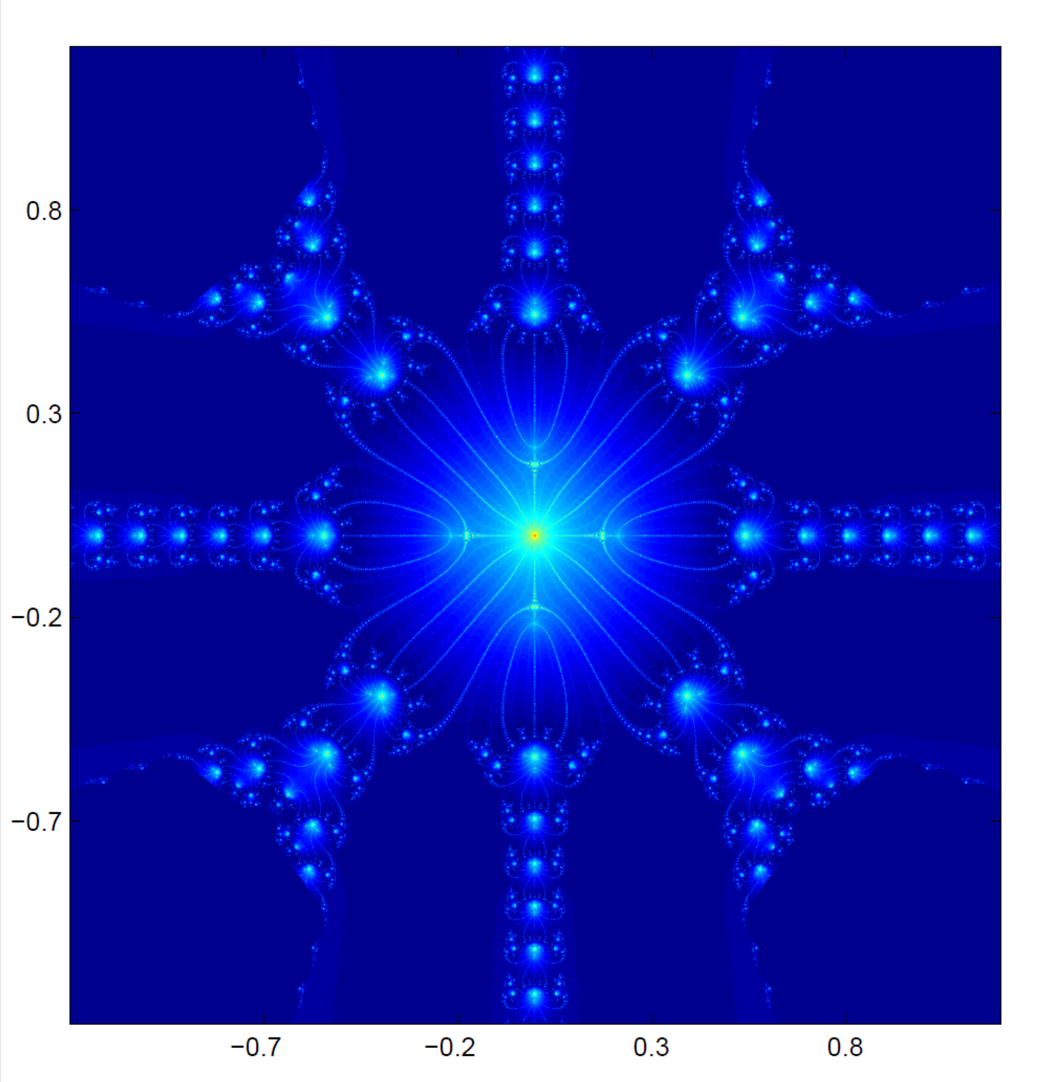
$$z^{12} + 744/611z^8 - 86/16057z^4 + 25/357 = 0$$

Kořeny:

$$\begin{array}{r} -0.75+0.75i \\ -0.75-0.75i \\ 0.75+0.75i \\ 0.75-0.75i \\ -0.65+0.25i \\ -0.65-0.25i \\ -0.25+0.65i \\ -0.25-0.65i \\ 0.25+0.65i \\ 0.25-0.65i \\ 0.65+0.25i \\ 0.65-0.25i \end{array}$$




0.8
0.3
−0.2
−0.7
−0.7
−0.2
0.3
0.8

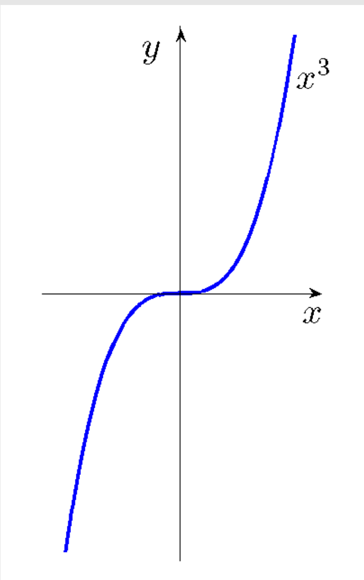


Poznámka:

Při odvozování Newtonovy metody jsme předpokládali, že $f'(\alpha) \neq 0$, tj. α je jednoduchý kořen.

Příklad:

Pomocí Newtonovy metody najděte kořen rovnice $\boxed{x^3 = 0}$.



$\alpha = 0 \quad \dots \quad$ trojnásobný kořen

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3}{3x_k^2}$$

$$\boxed{x_{k+1} = \frac{2}{3} x_k} \qquad \Rightarrow \qquad \text{rychlost konvergence je } \mathbf{1} \text{ !!!}$$

$$x_{k+1} = \frac{2}{3} x_k \ \wedge \ \alpha = \frac{2}{3}\alpha \quad \Rightarrow \quad (x_{k+1} - \alpha) = \frac{2}{3}(x_k - \alpha)^{\mathbf{1}}$$

Definice: Kořen α rovnice $f(x) = 0$ má **násobnost** s, jestliže $\boxed{0 \neq g(\alpha) < \infty}$, kde $\boxed{g(x) = \frac{f(x)}{(x-\alpha)^s}}$

Modifikovaná iterační formule

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - s\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}} \qquad \ldots \quad \text{již opět kvadratický iterační proces}$$

pro předchozí příklad: $\quad x_{k+1} = x_k - 3\frac{x_k^3}{3x_k^2} = x_k - x_k = 0$

nevýhoda - musíme znát násobnost s

Jiný přístup pro hledání násobných kořenů

Je-li α s-násobný kořen rovnice $f(x) = 0$, potom je α $(s-1)$-násobným kořenem rovnice $f'(x) = 0$ a tedy jednoduchým kořenem rovnice

$$g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} = 0.$$

D.cv: $g'(x) = ?$

Aitkenův proces

Konverguje-li iterační metoda lineárně, lze pomocí Aitkenova procesu urychlit konvergenci.
Platí:

$$\boxed{\alpha - x_{k+1} = C_{k+1}(\alpha - x_k), \quad |C_k| < 1}$$

kde $|C_k| \to C$ je asymptotická konstanta chyby.

Jsme-li blízko limity, jsou čísla C_k přibližně stejná a lze psát

$$\alpha - x_{k+1} \approx \bar{C}(\alpha - x_k), \; |\bar{C}| = C$$

Pro další iteraci

$$\alpha - x_{k+2} \approx \bar{C}(\alpha - x_{k+1})$$

Po vyloučení $\bar{C}$:

$$\frac{\alpha - x_{k+1}}{\alpha - x_k} \approx \frac{\alpha - x_{k+2}}{\alpha - x_{k+1}}$$

$$(\alpha - x_{k+2})(\alpha - x_k) \approx (\alpha - x_{k+1})^2$$

$$\alpha^2 - \alpha(x_k + x_{k+2}) + x_k x_{k+2} \approx \alpha^2 - 2\alpha x_{k+1} + x_{k+1}^2$$

$$x_k x_{k+2} - x_{k+1}^2 \approx \alpha(x_k - 2x_{k+1} + x_{k+2})$$

$$\boxed{\alpha \approx \frac{x_k x_{k+2} - x_{k+1}^2}{x_k - 2x_{k+1} + x_{k+2}}}$$

Prakticky:

$$x_0, x_1, x_2 \;\to\; \alpha =: x_3$$

$$x_3, x_4, x_5 \;\to\; \alpha =: x_6$$

$$\ldots$$

Příklad 3

Pomocí **metody prosté iterace** řešte rovnici $x^2 - x = 0$. Použijte přepis $\boxed{x = \sqrt{x}}$, počáteční iteraci $x_0 = 3$ a zastavovací podmínku $|x_k - x_{k-1}| < 10^{-5}$.

výsledky získané v MATLABu

krok	x(k)	dx(k)=x(k)-x(k-1)	dx(k)/dx(k-1)
0	3.000000		
1	1.732051	-1.267949	
2	1.316074	-0.415977	0.328071
3	1.147203	-0.168871	0.405963
4	1.071075	-0.076127	0.450800
5	1.034928	-0.036148	0.474833
6	1.017314	-0.017614	0.487272
7	1.008620	-0.008694	0.493600
8	1.004301	-0.004319	0.496791
9	1.002148	-0.002153	0.498393
10	1.001073	-0.001075	0.499196
11	1.000537	-0.000537	0.499598
12	1.000268	-0.000268	0.499799
13	1.000134	-0.000134	0.499899
14	1.000067	-0.000067	0.499950
15	1.000034	-0.000034	0.499975
16	1.000017	-0.000017	0.499987
17	1.000008	-0.000008	0.499994

Předchozí výpočet urychlete použitím **Aitkenova procesu**.

výsledky získané v MATLABu

```
| krok |        x(k)        | dx(k)=x(k)-x(k-1)  |    dx(k)/dx(k-1)    |
---------------------------------------------------------------------
|    0 |     3.000000       |                    |                     |
|    1 |     1.732051       |      -1.267949     |                     |
|    2 |     1.316074       |      -0.415977     |       0.328071      |
  Zpresneni pomoci Aitkenovy formule
|    3 |     1.112973       |      -0.203101     |       0.488251      |
|    4 |     1.054975       |      -0.057997     |       0.285559      |
|    5 |     1.027120       |      -0.027855     |       0.480285      |
  Zpresneni pomoci Aitkenovy formule
|    6 |     1.001378       |      -0.025742     |       0.924133      |
|    7 |     1.000689       |      -0.000689     |       0.026771      |
|    8 |     1.000344       |      -0.000344     |       0.499742      |
  Zpresneni pomoci Aitkenovy formule
|    9 |     1.000000       |      -0.000344     |       0.998968      |
|   10 |     1.000000       |      -0.000000     |       0.000344      |
```

Příklad 4

Pomocí **Newtonovy metody** řešte rovnici $x^2 - x = 0$. Použijte počáteční iteraci $x_0 = 3$ a zastavovací podmínku $|x_k - x_{k-1}| < 10^{-5}$.

výsledky získané v MATLABu

```
| krok |        x(k)        | dx(k)=x(k)-x(k-1)  |    dx(k)/dx(k-1)    |
---------------------------------------------------------------------
|    0 |     3.000000       |                    |                     |
|    1 |     1.800000       |      -1.200000     |                     |
|    2 |     1.246154       |      -0.553846     |       0.461538      |
|    3 |     1.040603       |      -0.205551     |       0.371134      |
|    4 |     1.001525       |      -0.039078     |       0.190113      |
|    5 |     1.000002       |      -0.001522     |       0.038959      |
|    6 |     1.000000       |      -0.000002     |       0.001522      |
```

Rychlost konvergence Newtonovy metody je 2, tj. pro urychlení nelze použít Aitkenův proces. Pokud bychom jej použili, výpočet se naopak zpomalí.

výsledky získané v MATLABu

```
| krok |        x(k)        | dx(k)=x(k)-x(k-1) |    dx(k)/dx(k-1)    |
----------------------------------------------------------------------
|    0 |      3.000000      |                   |                     |
|    1 |      1.800000      |     -1.200000     |                     |
|    2 |      1.246154      |     -0.553846     |      0.461538       |
  Zpresneni pomoci Aitkenovy formule
|    3 |      0.771429      |     -0.474725     |      0.857143       |
|    4 |      1.096241      |      0.324812     |     -0.684211       |
|    5 |      1.007767      |     -0.088473     |     -0.272383       |
  Zpresneni pomoci Aitkenovy formule
|    6 |      1.026707      |      0.018940     |     -0.214073       |
|    7 |      1.000677      |     -0.026030     |     -1.374350       |
|    8 |      1.000000      |     -0.000677     |      0.025995       |
  Zpresneni pomoci Aitkenovy formule
|    9 |      0.999982      |     -0.000018     |      0.026688       |
|   10 |      1.000000      |      0.000018     |     -0.974664       |
|   11 |      1.000000      |     -0.000000     |     -0.000018       |
```

Nevýhody Newtonovy metody

- zadaná funkce f musí být diferencovatelná
- derivace se přímo vyskytuje v iterační formuli
- v každé iteraci musíme kromě funkční hodnoty počítat také hodnotu derivace

Pro odbourání poslední vlastnosti můžeme za předpokladu, že se derivace f' na okolí kořene příliš nemění, Newtonovu metodu modifikovat tak, že hodnotu derivace vypočteme pouze jednou, tj. v bodě x_0 a položíme

$$f'(x_k) \approx f'(x_0).$$

Dostaneme iterační formuli **modifikované Newtonovy metody**

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}}.$$

Chceme-li modifikovat Newtonovu metodu pro funkce, které nejsou diferencovatelné, nahradíme v iterační formuli derivaci $f'(x_k)$ diferenčním podílem

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

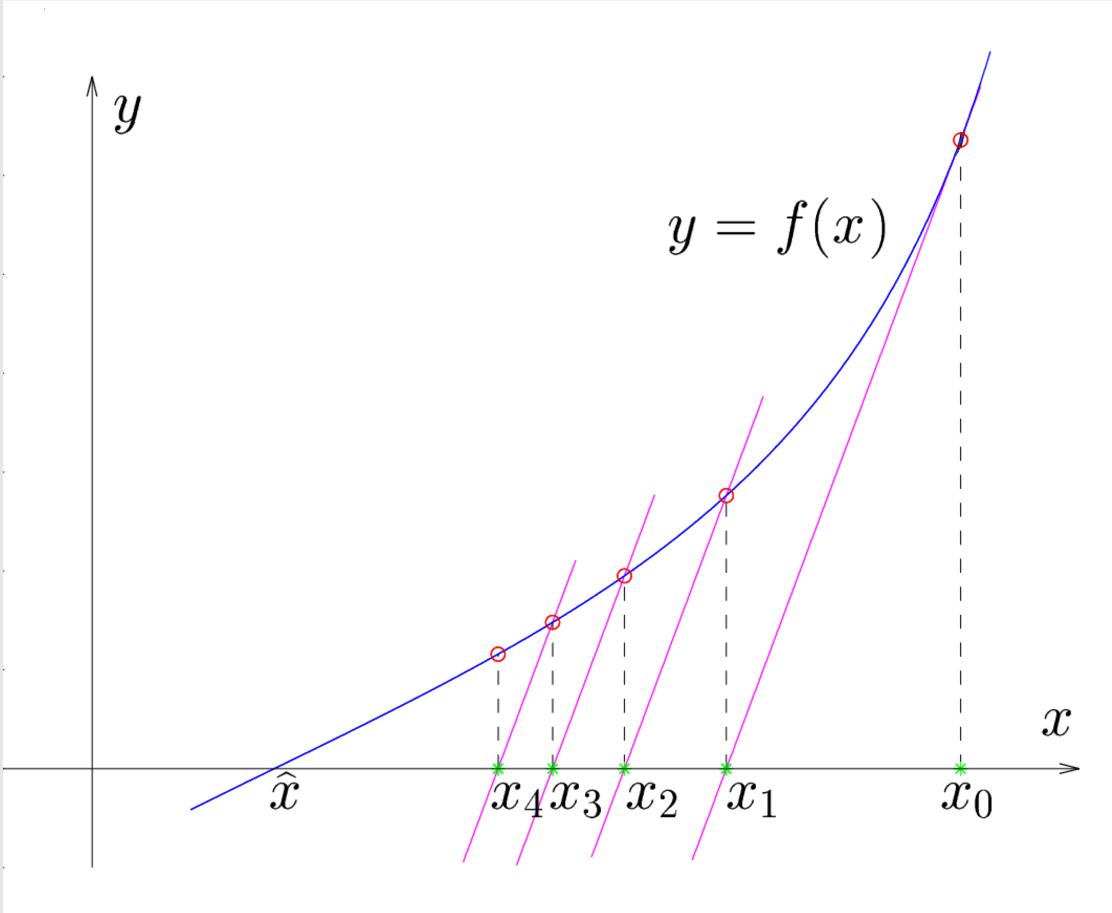
Dostaneme iterační formuli **metody sečen**

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}}.$$

Geometrický význam modifikované Newtonovy metody

Tečny ke grafu v bodech $[x_k, f(x_k)]$ nahrazujeme přímkami rovnoběžnými s tečnou ke grafu funkce $y =$

$f(x)$ v bodě $[x_0, f(x_0)]$.



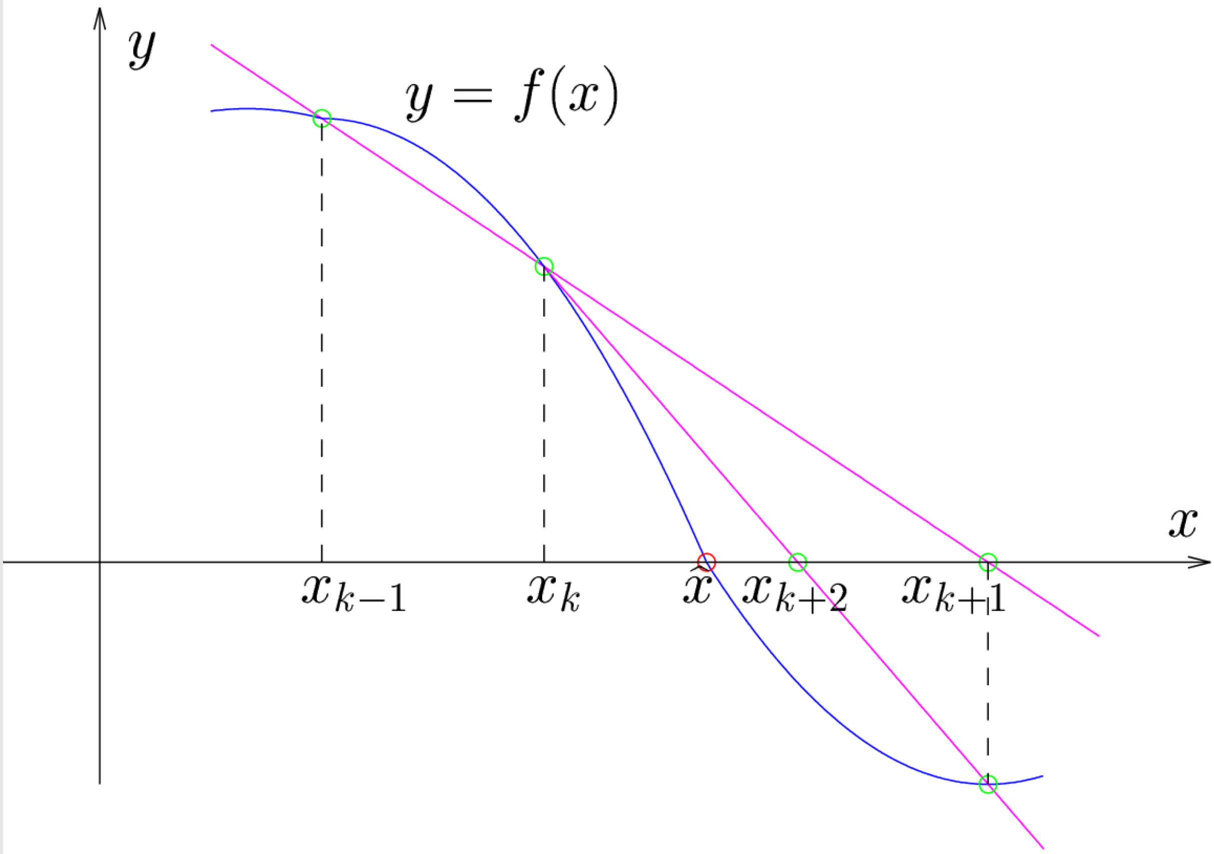
Poznámka:

V této modifikaci počítáme pouze jednu hodnotu derivace $f'(x_0)$, a proto je tento postup vhodný je-li derivace $f'(x)$ složitá. Nemění-li $f'(x)$ a $f''(x)$ znaménko, je možné dokázat konvergenci této metody.

Geometrický význam metody sečen

Mějme dvě dobré aproximace x_{k-1} a x_k kořene $\hat{x}$ rovnice $f(x) = 0$. Křivku $y = f(x)$ nahradíme přímkou (sečnou), která prochází body $[x_{k-1}, f(x_{k-1})]$ a $[x_k, f(x_k)]$.

Další iteraci x_{k+1} získáme jako průsečík sečny s osou x.



Poznámka:

Pro zahájení výpočtu potřebujeme znát $\mathbf{2}$ počáteční aproximace, ale na rozdíl od Newtonovy metody počítáme v každém kroku pouze jednu novou funkční hodnotu, což je úspora času.

Poznámka:

Metoda sečen má obdobný algoritmus jako metoda regula falsi, nepožadujeme však splnění podmínky $f(x_{k-1}) \cdot f(x_k) < 0$.

Rychlost konvergence metody sečen

Odvozuje se podobně jako u Newtonovy metody. Nechť platí

$$\boxed{\frac{1}{2}\left|\frac{f''(\xi)}{f'(\eta)}\right| \leq C \qquad \forall \xi, \eta \in I}.$$

Potom

$$|\varepsilon_{k+1}| \leq C \cdot |\varepsilon_k| \cdot |\varepsilon_{k-1}|.$$

Náznak odvození:

Označme $d_k = C|\varepsilon_k|$, potom

$$d_{k+1} \leq d_k\, d_{k-1}.$$

Nechť čísla d_0 a d_1 jsou rovna číslu $d < 1$ nebo menší, potom dosazováním dostáváme

$$d_2 \leq d_1\, d_0 \leq d\, d = d^2$$

$$d_3 \leq d_2\, d_1 \leq d^2\, d = d^3$$
$$d_4 \leq d_3\, d_2 \leq d^3\, d^2 = d^5$$
$$d_5 \leq d_4\, d_3 \leq d^5\, d^3 = d^8$$
$$\vdots$$
$$d_{k+1} \leq d^{n_{k+1}}, \quad \text{kde} \quad n_{k+1} = n_k + n_{k-1}, \ n_1 = 1, \ n_0 = 1.$$

Rekurentně daná posloupnost n_k definuje tzv. **Fibonacciova čísla**. Odpovídající charakteristická rovnice je

$$\varrho^2 = \varrho + 1.$$

Pro její kořeny platí:

$$\varrho_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \doteq \begin{cases} \ \ 1{,}618 \\ -0{,}618 \end{cases}.$$

Snadno se ověří, že explicitní vyjádření pro n_k je následující

$$n_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right].$$

Hledaný řád metody r potom získáme ze vztahu

$$d_{k+1} \approx d_k^r,$$

tj. po zlogaritmování

$$r = \frac{\log d_{k+1}}{\log d_k} = \frac{\log d^{n_{k+1}}}{\log d^{n_k}} = \frac{n_{k+1}}{n_k}, \qquad \text{pro } k \to \infty.$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} \right]}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right]} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Pro rychlost konvergence tedy dostáváme

$$r = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \doteq 1{,}618 \qquad (\text{pro } k \to \infty).$$

Poznámka:

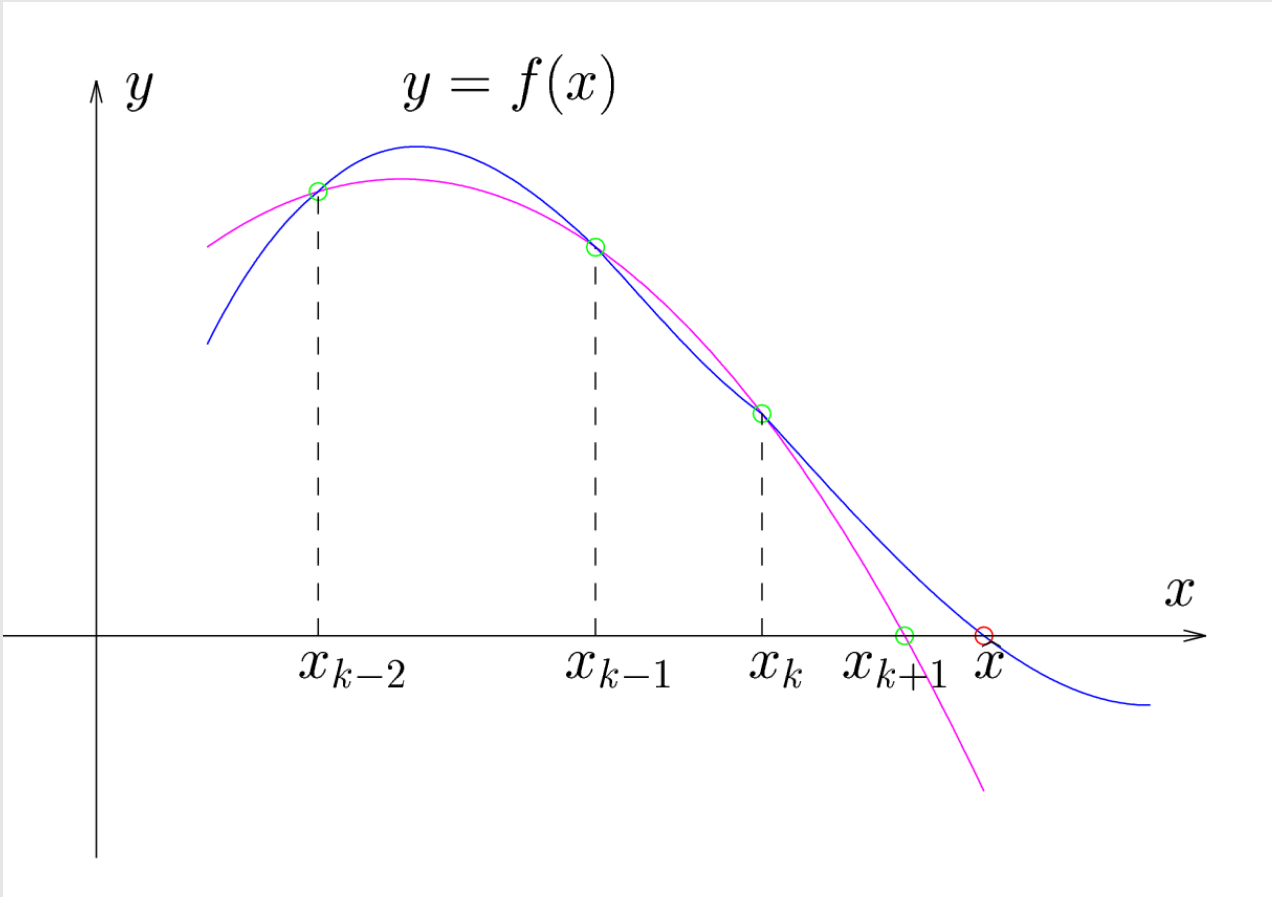
Metoda sečen je tzv. dvoukroková interpolační metoda, analogicky lze odvodit tříkrokovou interpolační metodu, kterou nazýváme **Mullerova metoda**.

Geometrický význam Mullerovy metody

Mějme tři dobré aproximace x_{k-2}, x_{k-1} a x_k kořene x rovnice

$$f(x) = 0.$$

Křivku $y = f(x)$ nahradíme parabolou (kvadratickou funkcí), která prochází body $[x_{k-2}, f(x_{k-2})]$ $[x_{k-1}, f(x_{k-1})]$ a $[x_k, f(x_k)]$.
Další iteraci x_{k+1} získáme jako průsečík paraboly s osou x. (Ten, který je blíže k x_k.)



Prostředky MATLABu pro řešení nelineárních rovnic

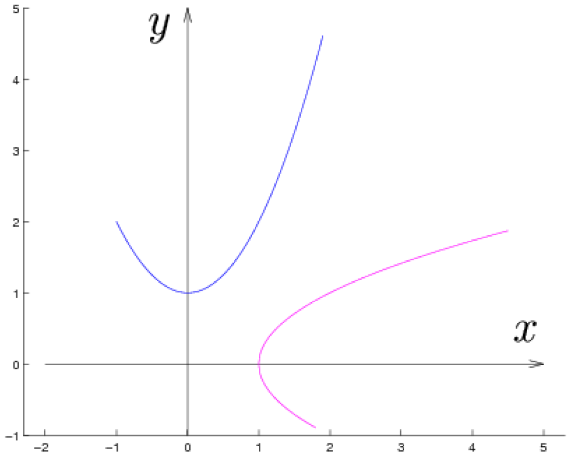
`fzero` pro obecnou nelineární rovnici
`roots` pro kořeny polynomu

Příklad:

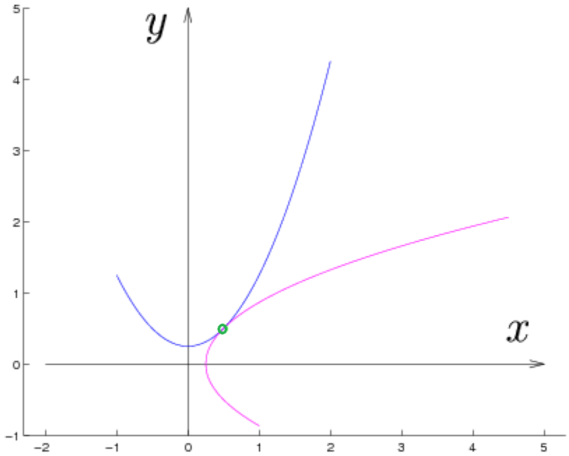
Řešte soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé ($a \in \mathbb{R}$ ... parametr)

$$x^2 - y + a = 0$$
$$-x + y^2 + a = 0$$

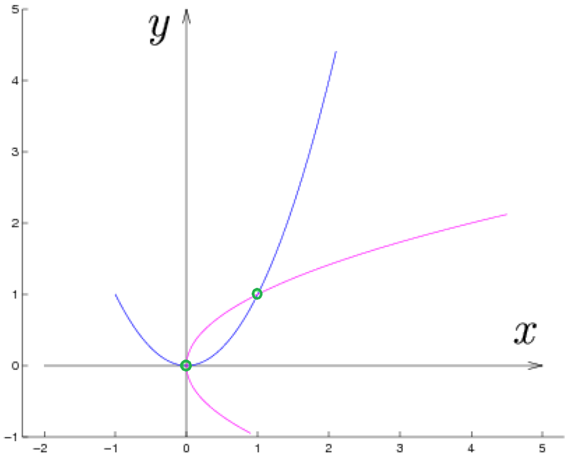
1) $a = 1$



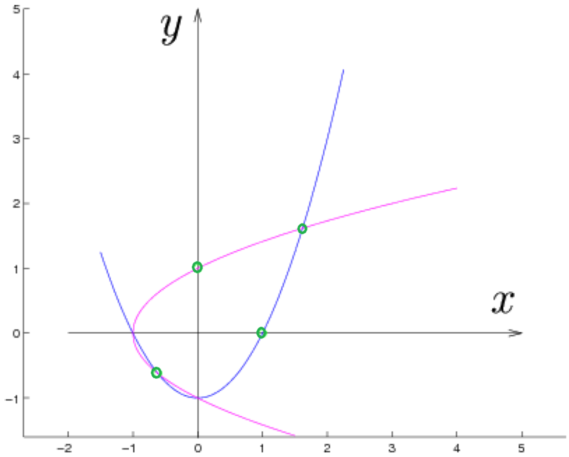
2) $a = \frac{1}{4}$



3) $a = 0$



4) $a = -1$



Formulace:

Jsou dány funkce $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n$ definované na $\langle a_i, b_i \rangle$.
Označme $I = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle$.
Hledáme $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in I$ tak, aby

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

Vektorově:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \qquad \text{kde } \mathbf{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n)^T.$$

Věta (Postačující podmínky konvergence metody prosté iterace.)

Předpokládejme, že je funkce $\mathbf{\Phi}$ na I spojitá a platí:

(a) $\forall \mathbf{x} \in I: \ \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) \in I$ (funkce $\mathbf{\Phi}$ zobrazuje I do sebe),

(b) $\exists q \in \langle 0, 1) : \ \|\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) - \mathbf{\Phi}(\mathbf{y})\| \leq q\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in I$ (funkce $\mathbf{\Phi}$ je kontrakce).

Potom

1. v množině I existuje právě jedno řešení $\mathbf{x}$ soustavy rovnic $\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$,
2. posloupnost $\{\mathbf{x}^k\}_{k=1}^{\infty}$ určená formulí $\mathbf{x}^k = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}^{k-1})$ konverguje pro každé $\mathbf{x}^0 \in I$ a $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^k = \mathbf{x}$.

Metoda prosté iterace

Soustavu rovnic $\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}}$ nahradíme soustavou rovnic $\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})}$ (více možností).

Algoritmus:

1) Zadáme $\mathbf{x}^0 \in I$, $\varepsilon > 0$
2) $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}^k)$
3) Je-li $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| < \varepsilon$, pak $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{k+1}$, KONEC
jinak jdi na 2)

Příklad 5

Řešte metodou prosté iterace soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé

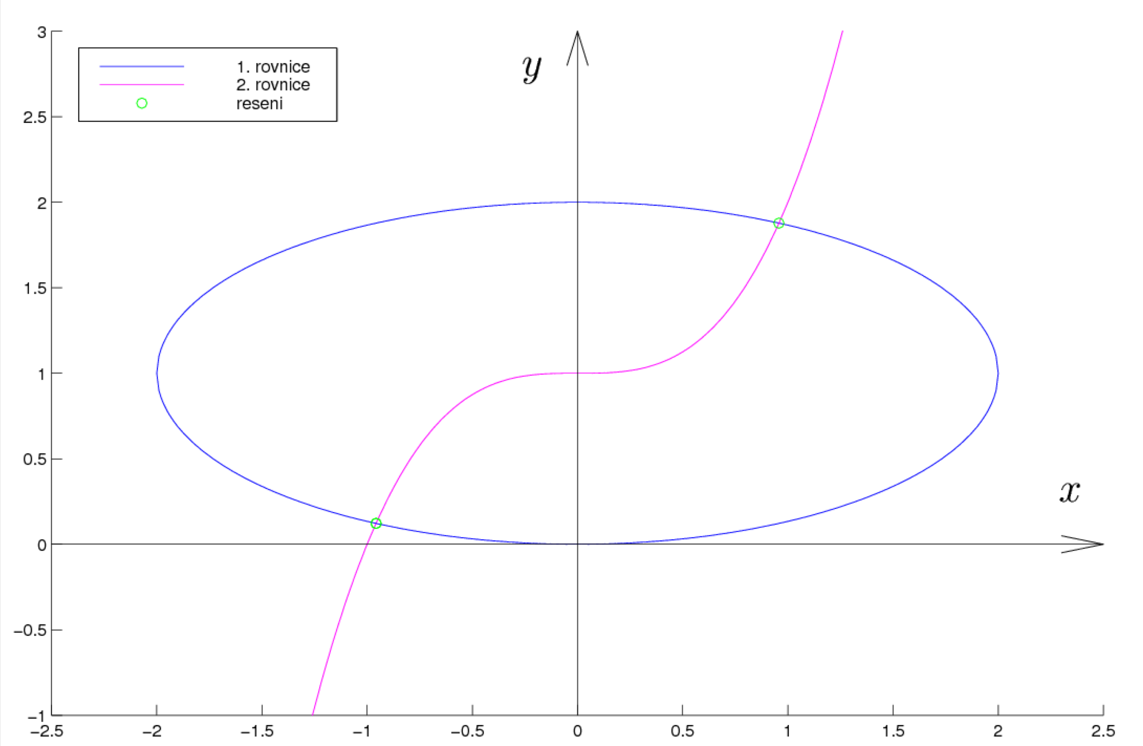
$$x^2 + 4y^2 - 8y = 0$$
$$x^3 - y + 1 = 0$$

---

1. rovnice je rovnicí eplipsy $x^2 + 4(y-1)^2 = 4$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = 1$$

2. rovnici upravíme na tvar $y = x^3 + 1$



Z 2.rovnice vyjádříme x:

$$x^3 = y - 1$$

$$x = \sqrt[3]{y-1}$$

Z 1.rovnice vyjádříme y:

$$4y^2 = 8y - x^2$$

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{8y - x^2}$$

Rekurentní formule:

$$x_{k+1} = \sqrt[3]{y_k - 1} \qquad y_{k+1} = \frac{1}{2}\sqrt{8y_k - x^2_{k(+1)}}$$

výsledky získané v MATLABu

krok	x_1(k)	x_2(k)	||x(k)-x(k-1)||
0	1.000000	1.000000	
1	0.000000	1.322876	1.050832
2	0.686033	1.626577	0.750250
3	0.855706	1.770732	0.222643
4	0.916856	1.832595	0.086985
5	0.940758	1.858772	0.035448
6	0.950516	1.869836	0.014752
7	0.954580	1.874514	0.006197
8	0.956288	1.876492	0.002613
9	0.957009	1.877328	0.001104
10	0.957313	1.877682	0.000467

výsledky získané v MATLABu

```
| krok |      x_1(k)       |      x_2(k)       |  ||x(k)-x(k-1)||  |
----------------------------------------------------------------------
|    0 |    -1.000000      |      0.000000     |                   |
|    1 |     0.500000      |      0.000000     |      1.802776     |
|    2 |     0.651123      |      0.677644     |      2.108913     |
|    3 |     0.670383      |      1.241743     |      1.749676     |
|    4 |     0.716783      |      1.573937     |      1.015477     |
|    5 |     0.838816      |      1.743370     |      0.454007     |
|    6 |     0.906819      |      1.820267     |      0.181812     |
|    7 |     0.936234      |      1.853465     |      0.074113     |
|    8 |     0.948577      |      1.867581     |      0.030794     |
|    9 |     0.953759      |      1.873559     |      0.012921     |
|   10 |     0.955941      |      1.876088     |      0.005446     |
|   11 |     0.956862      |      1.877158     |      0.002300     |
|   12 |     0.957251      |      1.877610     |      0.000972     |
```

Poznámka:

Pozor na definiční obory funkcí.
Pozor na zápis funkcí v MATLABu.

```
>> (-8)^(1/3)
ans =
   1.0000 + 1.7321i
```

Poznámka: Pokud chceme v předchozím příkladě najít druhé řešení, je třeba zvolit jiný předpis pro funkci Φ.

výsledky získané v MATLABu

```
Metoda proste iterace pro reseni soustavy nelinearnich rovnic
   F(x)=0    s vyuzitim prepisu na tvar    x=Phi(x)
pro pocatecni aproximaci x0=[1,1] a
zastavovaci podminku ||x(k)-x(k-1)||<0.001

Funkce Phi(x) je zadana takto:

function out=Phi(in);
x=in(1);
y=in(2);
if (y-1)>=0
 out(1)=(y-1)^(1/3);
else
 out(1)=-(1-y)^(1/3);
end;
out(2)=(x^2+4*y^2)/8;
out=out';

| krok |      x_1(k)      |      x_2(k)      |  ||x(k)-x(k-1)||  |
-------------------------------------------------------------------
|    0 |     1.000000     |     1.000000     |                   |
|    1 |     0.000000     |      0.625000    |      1.068000     |
|    2 |    -0.721125     |      0.195312    |      0.839436     |
|    3 |    -0.930127     |      0.084076    |      0.236761     |
|    4 |    -0.971150     |      0.111677    |      0.049444     |
|    5 |    -0.961296     |      0.124127    |      0.015879     |
|    6 |    -0.956783     |      0.123215    |      0.004604     |
|    7 |    -0.957116     |      0.122020    |      0.001240     |
|    8 |    -0.957550     |      0.121953    |      0.000440     |
```

Newtonova metoda

Odvození je opět analogické případu funkce jedné reálné proměnné.
Vyjádříme si Taylorův rozvoj funkce $\mathbf{F}$ v bodě $\mathbf{x}^k$.
(Předpokládáme, že existují derivace !)
Soustavu rovnic $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ nahradíme soustavou lineárních rovnic

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^k) + \mathbf{F}'(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) = \mathbf{0}$$

Její řešení označíme $\mathbf{x}^{k+1}$, tj.

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^k) + \mathbf{F}'(\mathbf{x}^k)\underbrace{(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k)}_{\mathbf{h}^k} = \mathbf{0}$$

Dostáváme soustavu

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}^k)\mathbf{h}^k = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^k),$$

která má řešení

$$\mathbf{h}^k = -[\mathbf{F}'(\mathbf{x}^k)]^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^k)$$

Novou iteraci $\mathbf{x}^{k+1}$ získáme ze vztahu

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{h}^k$$

Poznámka:

$\mathbf{F}'(\mathbf{x}^k)$ je Jacobiho matice funkce $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{x}^k$.
Je zřejmé, že musí být regulární (musí existovat matice k ní inverzní).

Příklad 6

Řešte Newtonovou metodou soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 - 8y &= 0 \\ x^3 - y + 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{bmatrix} x^2 + 4y^2 - 8y \\ x^3 - y + 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} = 8y - 8$$

$$\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} = 3x^2 \qquad \frac{\partial F_2(x,y)}{\partial y} = -1$$

$$\mathbf{F}'(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & 8y-8 \\ 3x^2 & -1 \end{bmatrix}$$

---

1. iterace

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ y^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1^0 \\ h_2^0 \end{bmatrix}$$

Platí

$$\mathbf{h}^0 = -[\mathbf{F}'(x^0,y^0)]^{-1}\mathbf{F}(x^0,y^0)$$

Abychom nemuseli počítat inverzní matici, vypočteme $\mathbf{h}^0$ jako řešení soustavy

$$\mathbf{F}'(x^0,y^0)\mathbf{h}^0 = -\mathbf{F}(x^0,y^0)$$

$$\mathbf{F}(x^0,y^0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F}'(x^0,y^0) = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 12 & -1 \end{bmatrix}$$

Dostaneme

$$\mathbf{h}^0 = \begin{bmatrix} -0.6 \\ -0.2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x^1 \\ y^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1^0 \\ h_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.6 \\ -0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,4 \\ 1,8 \end{bmatrix}$$

---

2. iterace

$$\begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 \\ y^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1^1 \\ h_2^1 \end{bmatrix}$$

Platí

$$\mathbf{h}^1 = -[\mathbf{F}'(x^1, y^1)]^{-1}\mathbf{F}(x^1, y^1)$$

Abychom nemuseli počítat inverzní matici, vypočteme $\mathbf{h}^1$ jako řešení soustavy

$$\mathbf{F}'(x^1, y^1)\mathbf{h}^1 = -\mathbf{F}(x^1, y^1)$$

$$\mathbf{F}(x^1, y^1) = \begin{bmatrix} 0,52 \\ 1,944 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F}'(x^1, y^1) = \begin{bmatrix} 2,8 & 6,4 \\ 5,88 & -1 \end{bmatrix}$$

Dostaneme

$$\mathbf{h}^1 = \begin{bmatrix} -0,3206 \\ 0,0590 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 \\ y^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1^1 \\ h_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,4 \\ 1,8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,3206 \\ 0,0590 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0794 \\ 1,8590 \end{bmatrix}$$

Další iterace bychom počítali podobně. V následují tabulce jsou shrnuty 4. iterace Newtonovy metody.

k	x_k	y_k	$\|\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\|\|$
0	2.0000	2.0000	
1	1.4000	1.8000	0.6325
2	1.0794	1.8590	0.3260
3	0.9703	1.8763	0.1105
4	0.9577	1.8779	0.0127

Normy vektorů a matic

Připomenutí:

Norma je zobrazení n lineárního vektorového prostoru $\mathcal{L}$ do $\mathbb{R}_0^+$:

1. $n(x) = 0 \iff x = 0$ (definitnost)
2. $n(\lambda x) = |\lambda| n(x)$ (homogenita)
3. $n(x + y) \leq n(x) + n(y)$ ($\triangle$ nerovnost)

VEKTORY:

$||\mathbf{x}||_p = (\sum_i |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$
... p-tá vektorová norma

$||\mathbf{x}||_1 = \sum_i |x_i|$ ... první vektorová norma $\leftrightarrow$ $||\mathbf{A}||_S = \max_k\{\sum_i |a_{ik}|\}$ ... sloupcová maticová norma

$||\mathbf{x}||_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}$ ... euklidovská vektorová norma $\leftrightarrow$ $||\mathbf{A}||_{SP} = \max_k\{\lambda_k^{\frac{1}{2}}(\mathbf{A}^H\mathbf{A})\}$ ... spektrální norma

$||\mathbf{x}||_\infty = \max_i |x_i| = \lim_{p\to\infty} (\sum_i |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ ... maximová norma $\leftrightarrow$ $||\mathbf{A}||_R = \max_i\{\sum_k |a_{ik}|\}$ ... řádková maticová norma

MATICE: (pravý sloupec výše)

Poznámky:

$\mathbf{A}^H$ ... hermitovsky transponovaná matice; $\mathbf{A}^H = [a_{ij}^H] = [\bar{a}_{ji}]$; $\bar{a}$ je komplexně sdružené číslo k číslu a

Symbol $\leftrightarrow$ značí vazbu mezi vektorovou a maticovou normou.
Příslušná maticová norma **je generovaná** příslušnou vektorovou normou.

Příklad

Pro zadanou matici $\mathbf{A}$ a vektor $\mathbf{x}$ určete výše uvedené normy.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$||\mathbf{A}||_S = \max\{|2| + |0|; |-1| + |3|\} = \max\{2; 4\} = \mathbf{4}$

$||\mathbf{A}||_R = \max\{|2| + |-1|; |0| + |3|\} = \max\{3; 3\} = \mathbf{3}$

$||\mathbf{A}||_{SP}$:

$$\mathbf{A}^H\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}^H\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 10-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)(10-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 14\lambda + 36$$

$$\lambda_{1,2}(\mathbf{A}^H\mathbf{A}) = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 - 4\cdot 36}}{2} =$$

$$= 7 \pm \sqrt{7^2 - 36} = 7 \pm \sqrt{13}$$

$$\max|\lambda_{1,2}| = 7 + \sqrt{13}$$

$||\mathbf{A}||_{SP} = \sqrt{7 + \sqrt{13}} \doteq \mathbf{3,2566}$

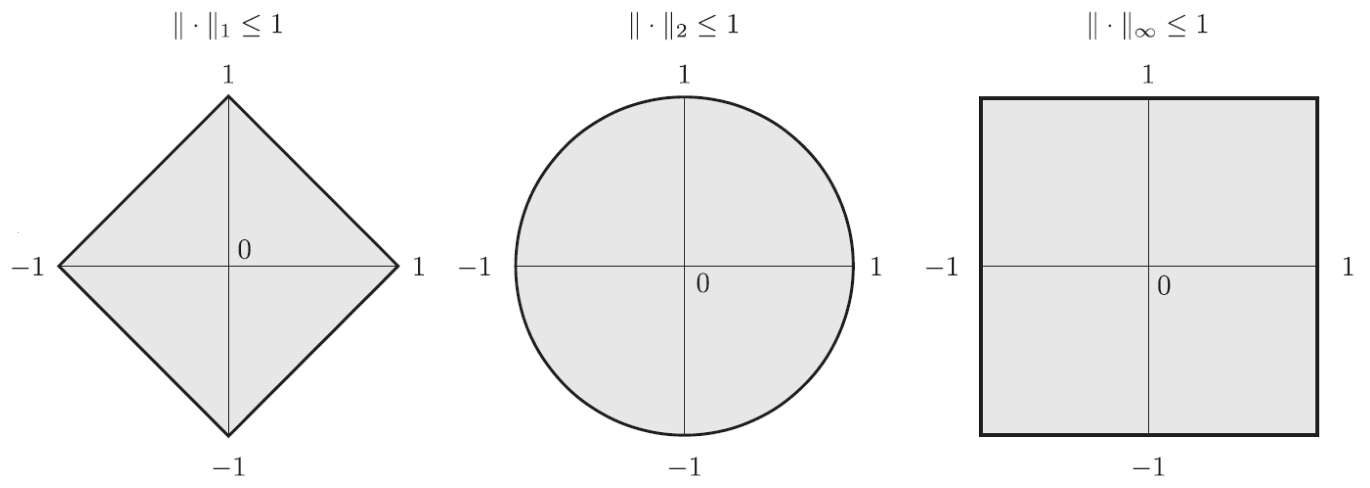
$||\mathbf{x}||_1 = |6| + |-1| = \mathbf{7}$

$||\mathbf{x}||_\infty = \max\{|6|, |-1|\} = \mathbf{6}$

$||\mathbf{x}||_2 = \sqrt{6^2 + (-1)^2} = \sqrt{37} \doteq \mathbf{6,0827}$

Geometrický význam vektorových norem

jednotkové koule v $\mathbb{R}^2$ ... množina (bodů) prvků s normou ≤ 1:



1. $||\mathbf{x}||_1 = \sum_i |x_i| = |x| + |y| \leq 1$
2. $||\mathbf{x}||_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$
3. $||\mathbf{x}||_\infty = \max_i |x_i| = \max\{|x|, |y|\} \leq 1$