Kapitola 12. Počáteční úlohy pro ODR - II

Vícekrokové metody

V případě jednokrokových metod vystupovaly ve formuli pouze hodnoty y_k, y_{k+1}.

V případě vícekrokových metod vypočítáváme hodnotu y_{k+1} pomocí hodnot

$$y_{k-n}, y_{k-n+1}, \dots, y_{k-1}, y_k, \left(y_{k+1}\right)$$

Poznámka: Pokud nepoužijeme hodnotu y_{k+1}, jedná se o **explicitní metody**, v opačném případě mluvíme o **implicitních** metodách.

Opět vyjdeme z rovnosti

$$\boxed{y' = f(x, y(x))}$$

Musí tedy platit i rovnost integrálů

$$\boxed{\int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x)\,dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x))\,dx}.$$

Tedy

$$\boxed{y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \underbrace{f(x, y(x))}_{\overset{\text{ozn}}{=}\, g(x)}\,dx}. \qquad (\star)$$

Dále postupujeme tak, že funkci $g(x)$ aproximujeme interpolačním polynomem $G_n(x)$, který zintegrujeme přesně.

Poznámka: Připomeňme si odvození jednokrokové Eulerovy metody.

Funkci $g(x)$ ze vztahu $(\star)$ aproximujeme konstantní funkcí $G_0(x)$

a)

$$\boxed{G_0(x) = g(x_k)}, \quad x \in (x_k, x_{k+1}\rangle$$

Dostáváme:

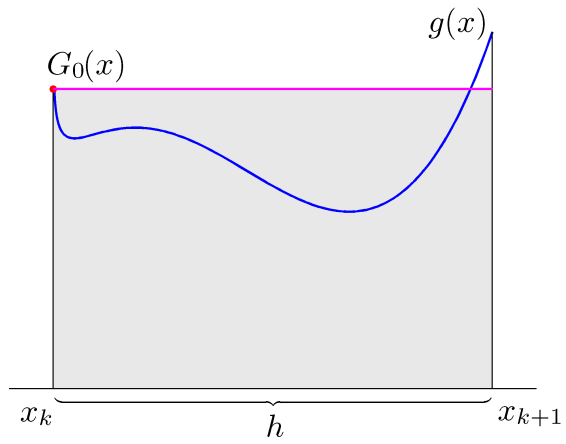
$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} G_0(x)\,dx$$

$$y_{k+1} = y_k + h g(x_k)$$

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k)}$$

Eulerova metoda

... explicitní jednokroková metoda, řád 1



b)

$\boxed{G_0(x) = g(x_{k+1})}$, $x \in (x_k, x_{k+1}\rangle$

Dostáváme:

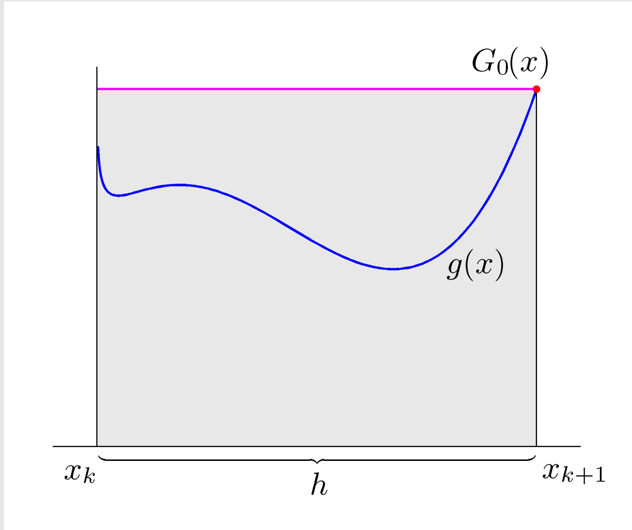
$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} G_0(x)\,dx$$

$$y_{k+1} = y_k + hg(x_{k+1})$$

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1})}$$

Implicitní Eulerova metoda

... implicitní jednokroková metoda, řád 1



Poznámka:

Při použití implicitní metody je třeba zvolit počáteční aproximaci $y_{k+1}^{[0]}$ a dále realizovat iterační proces

$$\boxed{y_{k+1}^{[l+1]} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1}^{[l]})}$$

Odvození dvoukrokových metod

Funkci $g(x)$ ze vztahu $(\star)$ aproximujeme lineární funkcí $G_1(x)$

a)

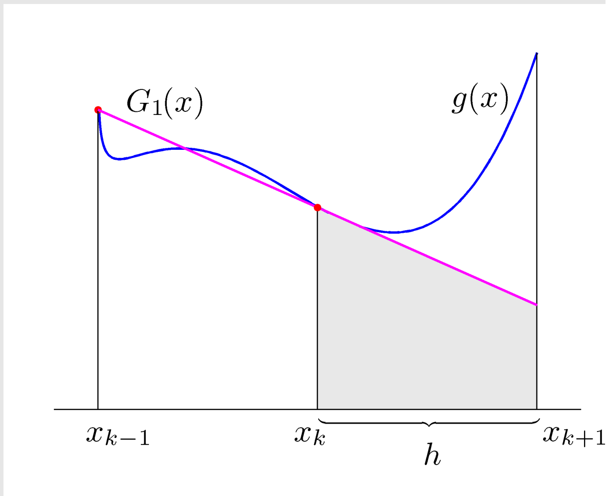
$$\boxed{G_1(x) = g(x_k) + \frac{g(x_k) - g(x_{k-1})}{h}(x - x_k)},$$
$$x \in (x_k, x_{k+1}\rangle$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} G_1(x)\,dx = g(x_k)h + \frac{h}{2}\Big[g(x_k) - g(x_{k-1})\Big] =$$
$$= \frac{h}{2}\Big[3g(x_k) - g(x_{k-1})\Big]$$

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\Big[3f(x_k, y_k) - f(x_{k-1}, y_{k-1})\Big]}$$

Adams-Bashforthova metoda

... explicitní dvoukroková metoda, řád 2



b)

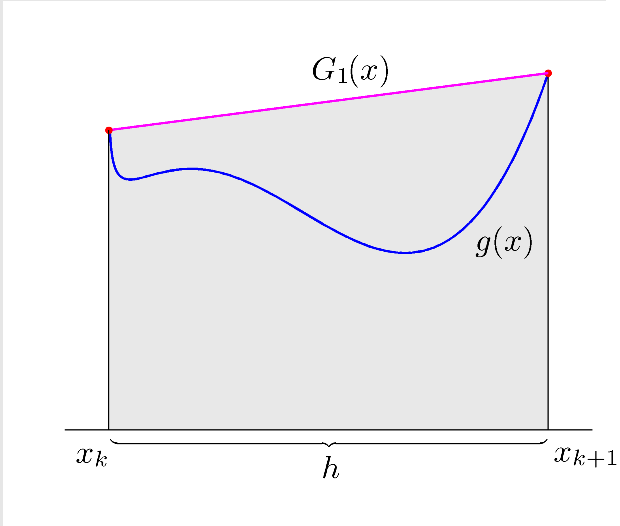
$$\boxed{G_1(x) = g(x_k) + \frac{g(x_{k+1}) - g(x_k)}{h}(x - x_k)},$$
$$x \in (x_k, x_{k+1}\rangle$$

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} G_1(x)\,dx = g(x_k)h + \frac{h}{2}\Big[g(x_{k+1}) - g(x_k)\Big] =$$
$$= \frac{h}{2}\Big[g(x_k) + g(x_{k+1})\Big]$$

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\Big[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\Big]}$$

Adams-Moultonova metoda

... implicitní dvoukroková metoda, řád 2



Odvození tříkrokových metod

Funkci $g(x)$ ze vztahu $(\star)$ aproximujeme kvadratickou funkcí $G_2(x)$

a)

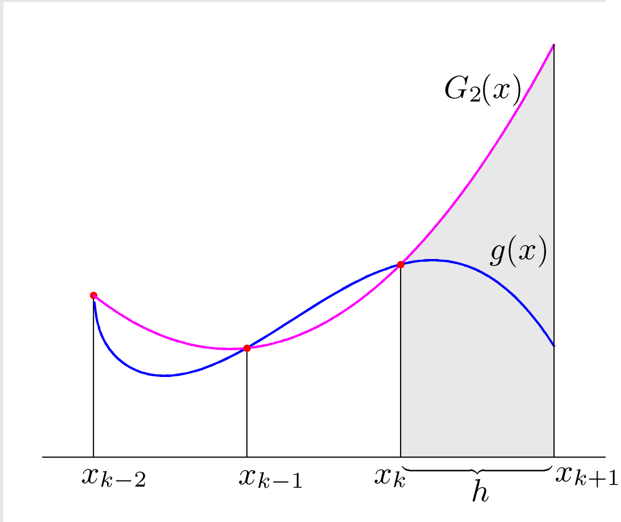
$$\boxed{\begin{array}{l} G_2(x) = \dots \text{ polynom procházející body} \\ \big[x_{k-2}, g(x_{k-2})\big],\ \big[x_{k-1}, g(x_{k-1})\big]\ \big[x_k, g(x_k)\big] \end{array}}$$
$$x \in (x_k, x_{k+1}\rangle$$

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} G_2(x)\,dx = \ \dots \ \text{D.cv.}$$

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12}\Big[23f(x_k, y_k) - 16f(x_{k-1}, y_{k-1}) + 5f(x_{k-2}, y_{k-2})\Big]}$$

Adams-Bashforthova metoda

... explicitní tříkroková metoda, řád 3



b)

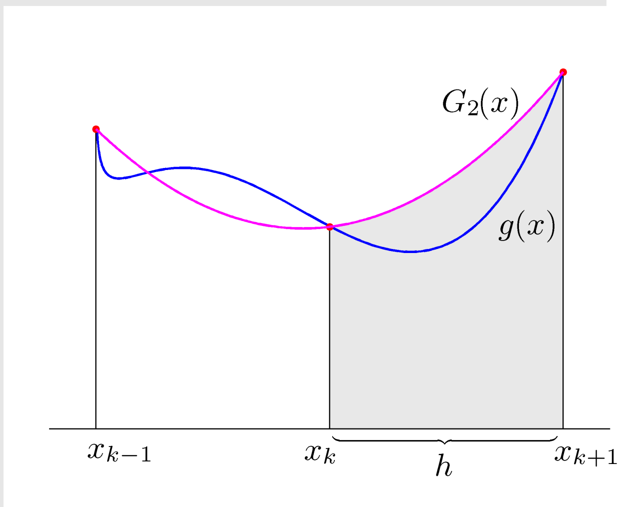
$$\boxed{\begin{array}{l} G_2(x) = \dots \text{ polynom procházející body} \\ \big[x_{k-1}, g(x_{k-1})\big],\ \big[x_k, g(x_k)\big]\ \big[x_{k+1}, g(x_{k+1})\big] \end{array}}$$
$$x \in (x_k, x_{k+1}\rangle$$

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} G_2(x)\,dx = \ \dots \ \text{D.cv.}$$

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12}\Big[5f(x_{k+1}, y_{k+1}) + 8f(x_k, y_k) - f(x_{k-1}, y_{k-1})\Big]}$$

Adams-Moultonova metoda

... implicitní tříkroková metoda, řád 3



Poznámky:

(i) U n-krokových metod je třeba znát n hodnot

$$y_{k-n+1}, y_{k-n}, \dots, y_k$$

Na začátku výpočtu však tyto hodnoty, tj. $Y_1, \dots, Y_{n-1}$, nejsou známy.

Pro jejich výpočet je třeba užít explicitní jednokrokové metody odpovídajícího řádu.

(ii) U implicitních metod je třeba určit aproximaci $y_{k+1}^{[0]}$ a realizovat metodu prosté iterace

$$y_{k+1}^{[l+1]} = y_k + \dots y_{k+1}^{[l]}$$

Obecný zápis metod

Vícekrokovou (i jednokrokovou) metodu lze obecně zapsat ve tvaru

$$\boxed{\sum_{j=0}^{r} \alpha_j y_{k+j} = h \sum_{j=0}^{r} \beta_j \underbrace{f(x_{k+j}, y_{k+j})}_{\approx y'(x_{k+j})}}.$$

- **Explicitní Eulerova metoda** $(\alpha_0 = -1,\ \alpha_1 = 1,\ \beta_0 = 1,\ \beta_1 = 0)$

$$\boxed{y_{k+1} - y_k = hf(x_k, y_k)}$$

- **Implicitní Eulerova metoda** $(\alpha_0 = -1,\ \alpha_1 = 1,\ \beta_0 = 0,\ \beta_1 = 1)$

$$\boxed{y_{k+1} - y_k = hf(x_{k+1}, y_{k+1})}$$

- **Adams-Bashforthova metoda - dvoukroková**

$$(\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = -1,\ \alpha_2 = 1,\ \beta_0 = -\frac{1}{2},\ \beta_1 = \frac{3}{2},\ \beta_2 = 0)$$

$$\boxed{y_{k+2} - y_{k+1} = \frac{h}{2}\Big[3f(x_{k+1}, y_{k+1}) - f(x_k, y_k)\Big]} \qquad (k := k+1)$$

- **Adams-Moultonova metoda - dvoukroková**

$$(\alpha_0 = -1,\ \alpha_1 = 1,\ \beta_0 = \frac{1}{2},\ \beta_1 = \frac{1}{2})$$

$$\boxed{y_{k+1} - y_k = \frac{h}{2}\Big[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\Big]}$$

- **Adams-Bashforthova metoda - tříkroková**

$$(\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = -1,\ \alpha_3 = 1,\ \beta_0 = \frac{5}{12},\ \beta_1 = -\frac{4}{3},\ \beta_2 = \frac{23}{12})$$

$$\boxed{y_{k+3} - y_{k+2} = \frac{h}{12}\Big[23f(x_{k+2}, y_{k+2}) - 16f(x_{k+1}, y_{k+1}) + 5f(x_k, y_k)\Big]} \qquad (k := k+2)$$

- **Adams-Moultonova metoda - tříkroková**

$$(\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = -1,\ \alpha_2 = 1,\ \beta_0 = -\frac{1}{12},\ \beta_1 = \frac{2}{3},\ \beta_2 = \frac{5}{12})$$

$$\boxed{y_{k+2} - y_{k+1} = \frac{h}{12}\Big[5f(x_{k+2}, y_{k+2}) + 8f(x_{k+1}, y_{k+1}) - f(x_k, y_k)\Big]} \qquad (k := k+1)$$

Definice: **Lokální diskretizační chybou** metody rozumíme

$$\boxed{\tau_k = \frac{1}{h}\Big[\sum_{j=0}^{r} \alpha_j y(x_{k+j}) - h\sum_{j=0}^{r} \beta_j y'(x_{k+j})\Big]}.$$

Definice: Řekneme, že metoda je **konzistentní**, je-li splněna podmínka

$$\boxed{\tau_k(h) \to 0 \quad \text{pro } h \to 0}.$$

Použijeme-li Taylorův rozvoj, získáme:

$$\begin{aligned}
y(x_k) &= y(x_k)\\
y(x_{k+1}) &= y(x_k) + hy'(x_k) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_k) + \dots\\
y(x_{k+2}) &= y(x_k) + 2hy'(x_k) + \frac{1}{2}(2h)^2 y''(x_k) + \dots\\
y(x_{k+3}) &= y(x_k) + 3hy'(x_k) + \frac{1}{2}(3h)^2 y''(x_k) + \dots\\
&\vdots\\
y(x_{k+j}) &= y(x_k) + jhy'(x_k) + \frac{1}{2}(jh)^2 y''(x_k) + \dots
\end{aligned}$$

a analogicky pro derivaci (formálně připíšeme $'$):

$$\begin{aligned}
y'(x_k) &= y'(x_k)\\
y'(x_{k+1}) &= y'(x_k) + hy''(x_k) + \frac{1}{2}h^2 y'''(x_k) + \dots\\
y'(x_{k+2}) &= y'(x_k) + 2hy''(x_k) + \frac{1}{2}(2h)^2 y'''(x_k) + \dots\\
y'(x_{k+3}) &= y'(x_k) + 3hy''(x_k) + \frac{1}{2}(3h)^2 y'''(x_k) + \dots\\
&\vdots\\
y'(x_{k+j}) &= y'(x_k) + jhy''(x_k) + \frac{1}{2}(jh)^2 y'''(x_k) + \dots
\end{aligned}$$

Tj. jde vždy polynom v proměnné h $(\Rightarrow$ i $\tau_k)$.

Dosazením do vztahu pro lokální diskretizační chybu

$$\tau_k = \frac{1}{h}\Big[\sum_{j=0}^{r}\alpha_j y(x_{k+j}) - h\sum_{j=0}^{r}\beta_j y'(x_{k+j})\Big],$$

tj.

$$\tau_k = \frac{1}{h}\Big[\Big(\alpha_0 y(x_k)+\alpha_1 y(x_{k+1})+\alpha_2 y(x_{k+2})+\cdots+\alpha_r y(x_{k+r})\Big)-h\Big(\beta_0 y'(x_k)+\beta_1 y'(x_{k+1})+\cdots+\beta_r y'(x_{k+r})\Big)\Big],$$

dostaneme

$$\tau_k = \frac{1}{h}\Big[\underbrace{y(x_k)\Big(\sum_{j=0}^{r}\alpha_j\Big)}_{\text{konstantní členy}} + \underbrace{hy'(x_k)\Big(\sum_{j=0}^{r}(j\alpha_j-\beta_j)\Big)}_{\text{lineární členy}} + \underbrace{h^2y''(x_k)\Big(\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{r}j^2\alpha_j - \sum_{j=0}^{r}j\beta_j\Big)}_{\text{kvadratické členy}} + \underbrace{h^3y'''(x_k)(\dots)}_{\text{kubické členy}}+\dots\Big].$$

Po roznásobení:

$$\boxed{\tau_k = \frac{1}{h}y(x_k)\Big(\sum_{j=0}^{r}\alpha_j\Big) + y'(x_k)\Big(\sum_{j=0}^{r}(j\alpha_j-\beta_j)\Big) + h\big(\dots\big) + h^2\big(\dots\big)+\dots}$$

D.cv: Ukažte, že dříve odvozené metody jsou konzistentní.

Definice: Polynomy v proměnných v a w ve tvaru

$$\boxed{\rho(v) = \sum_{j=0}^{r}\alpha_j v^j} \quad \text{a} \quad \boxed{\sigma(w) = \sum_{j=0}^{r}\beta_j w^j}$$

nazýváme **charakteristické polynomy** metody.

Poznámka: Metoda je konzistentní, platí-li

$$\boxed{\rho(1) = 0} \quad \text{a} \quad \boxed{\rho'(1) = \sigma(1)}$$

Poznámka:

Nestabilita - do výsledku je vnášena chyba, jejíž vliv zesiluje až celý výpočet znehodnotí.
Příčiny - špatná podmíněnost úlohy (nezávisí na volbě metody); nevhodná metoda nebo příliš velký krok.

Definice: Mějme dánu počáteční úlohu s lipschitzovskou funkcí f:

$$\boxed{\begin{aligned} y' &= f(x,y), \quad x\in(0,T\rangle \\ y(0) &= \eta \end{aligned}}$$

Řekneme, že metoda je **konvergentní**, když platí:

$$\boxed{\lim_{\substack{h\to 0\\ Nh=T}} y_N = y(T)}$$

a

$$\boxed{\lim_{h\to 0} y_k = \eta \quad \text{pro } k = 0,1,\dots,r-1}$$

pro každé pevné T (uvažujeme r-krokovou metodu).

Poznámka: Je zřejmé, že nutnou podmínkou konvergence je konzistence metody. Je i podmínkou postačující?

Věta Uvažujme úlohu

$$\boxed{\begin{array}{l} y' = \lambda y, \quad x \in (0, T\rangle \\ y(0) = \eta \end{array}}.$$

Eulerova metoda je pro tuto úlohu konvergentní.

Důkaz:

$$\begin{array}{rclclcl}
y(x_{k+1}) & = & y(x_k) & + & h\, \overbrace{\lambda y(x_k)}^{=y'(x_k)} & + & h\tau_k \\
y_{k+1} & = & y_k & + & h\, \lambda y_k & & \\
\hline
\underbrace{y(x_{k+1}) - y_{k+1}}_{E_{k+1}} & = & \underbrace{y(x_k) - y_k}_{E_k} & + & h\,\lambda\,\underbrace{(y(x_k) - y_k)}_{E_k} & + & h\tau_k
\end{array}$$

$$\boxed{E_{k+1} = E_k(1 + h\lambda) + h\tau_k}$$

Tj.

$$E_1 = \overbrace{E_0(1 + h\lambda)}^{=0} + h\tau_0$$
$$E_2 = E_1(1 + h\lambda) + h\tau_1$$
$$\vdots$$

Obecně lze psát:

$$\boxed{E_k = \underbrace{(1 + h\lambda)^k E_0}_{(1+h\lambda)^{k-1}E_1} + h \sum_{m=1}^{k} (1 + h\lambda)^{k-m} \tau_{m-1}}$$

Dále platí (z Taylorova rozvoje e^x):

$$|1 + h\lambda| \leq e^{h|\lambda|}$$

a tedy

$$(1 + h\lambda)^{k-m} \leq e^{(k-m)h|\lambda|} \leq e^{kh|\lambda|} \leq e^{T|\lambda|}$$

Potom

$$|E_k| \leq e^{|\lambda|T} \Big[\underbrace{\overbrace{|E_0|}^{=0}}_{(*)} + hk \max_{1 \leq m \leq k} \underbrace{|\tau_{m-1}|}_{(**)} \Big]$$

$(*)$ $|E_1| = |h\tau_0| \to 0$ pro $h \to 0$.

$(**) \to 0$ pro $h \to 0$, protože je Eulerova metoda konzistentní.

□

Důkaz:

Platí

$$
\begin{array}{lclclcl}
y(x_{k+1}) & = & y(x_k) & + & hf(x_k, y(x_k)) & + & h\tau_k \\
y_{k+1} & = & y_k & + & hf(x_k, y_k) & & \\
\hline
\underbrace{y(x_{k+1}) - y_{k+1}}_{E_{k+1}} & = & \underbrace{y(x_k) - y_k}_{E_k} & + & h\left[f(x_k, y(x_k)) - f(x_k, y_k)\right] & + & h\tau_k
\end{array}
$$

Funkce f je lipschitzovsky spojitá:

$$|f(x_k, y(x_k)) - f(x_k, y_k)| \leq L \cdot |y(x_k) - y_k| \qquad \forall x_k \in \langle 0, T\rangle$$

Pak lze psát:

$$|E_{k+1}| \leq |E_k| + h\,L\,|E_k| + h\,|\tau_k|\,.$$

Dále je důkaz stejný $\quad (|\lambda| = L)$

$$|E_k| \leq \mathrm{e}^{LT}\Big[\underbrace{|E_0|}_{=\,0} + hk \max_{1\leq m\leq k} \underbrace{|\tau_{m-1}|}_{\to 0\,(h\to 0)}\Big]$$

□

Konvergence vícekrokových metod

Příklad: Uvažujme vícekrokovou metodu ve tvaru

$$\boxed{y_{k+2} = 3y_{k+1} - 2y_k - hf(x_k, y_k)}\,.$$

Obecný zápis byl

$$\sum_{j=0}^{r} \alpha_j y_{k+j} = h\sum_{j=0}^{r} \beta_j f(x_{k+j}, y_{k+j}).$$

Platí:

$$\alpha_0 = 2,\quad \alpha_1 = -3,\quad \alpha_2 = 1,\quad \sum_{j=0}^{2} \alpha_j = 0$$

$$\beta_0 = -1,\quad \beta_1 = 0,\quad \beta_2 = 0,\quad \sum_{j=0}^{2} \beta_j = -1 \stackrel{?}{=} \sum_{j=0}^{2} j\alpha_j = 0\cdot\alpha_0 + 1\cdot\alpha_1 + 2\cdot\alpha_2 = 0 + (-3) + 2 = -1$$

$\Rightarrow$ metoda je konzistentní.

Touto metodou budeme řešit počáteční úlohu

$$\boxed{\begin{array}{l} y' = 0, \quad x \in (0, T\rangle \\ y(0) = 0 \end{array}}\,.$$

Pro tuto úlohu má metoda tvar

$$\boxed{y_{k+2} = 3y_{k+1} - 2y_k}\,.$$

Obecně lze psát:

$$\boxed{y_k = 2y_0 - y_1 + 2^k(y_1 - y_0)}\,.$$

Důkaz: (pomocí úplné matematické indukce)

1. $k = 2,\ k = 3$

$$y_2 = 2y_0 - y_1 + 2^2(y_1 - y_0) = 3y_1 - 2y_0 \qquad \checkmark$$

$$y_3 = 2y_0 - y_1 + 2^3(y_1 - y_0) = 7y_1 - 6y_0 \stackrel{?}{=} 3y_2 - 2y_1 = 3\big(3y_1 - 2y_0\big) - 2y_1 \qquad \checkmark$$

2. $$\left.\begin{aligned} y_k &= 2y_0 - y_1 + 2^k(y_1 - y_0) \\ y_{k+1} &= 2y_0 - y_1 + 2^{k+1}(y_1 - y_0) \end{aligned}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} \quad y_{k+2} = 2y_0 - y_1 + 2^{k+2}(y_1 - y_0)$$

$$\begin{aligned} y_{k+2} &= 3y_{k+1} - 2y_k = 3\big(2y_0 - y_1 + 2^{k+1}(y_1 - y_0)\big) - 2\big(2y_0 - y_1 + 2^k(y_1 - y_0)\big) = \\ &= 2y_0 - y_1 + \underbrace{(6-2)}_{=2^2} 2^k(y_1 - y_0) \qquad \checkmark \end{aligned}$$

$\square$

Problém:

Pokud $y_1 = y_0 = y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_k = 0 \ \forall k.$ $\checkmark$

Pokud se y_1 bude lišit (i když velmi málo) od 0, pak pro $k \to \infty$: $y_k \to \infty.$ $\lightning$

Považujeme-li rovnost $y_{k+2} = 3y_{k+1} - 2y_k$ za diferenční rovnici, můžeme ji řešit.
Předpokládáme, že $y_k = Cv^k$. Pak lze psát

$$Cv^{k+2} = 3Cv^{k+1} - 2Cv^k$$

$$\begin{aligned} Cv^2 &= 3Cv - 2C \\ v^2 - 3v + 2 &= 0 \qquad\qquad (\star) \\ v_{1,2} &= \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \\ v_1 = 2, &\quad v_2 = 1 \\ y_k &= C_1 2^k - C_2 \end{aligned}$$

Dále víme, že pro

$$\begin{aligned} k = 0 : &\quad y_0 = C_1 + C_2 \\ k = 1 : &\quad y_1 = 2C_1 + C_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = y_1 - y_0;$$

$$C_2 = y_0 - c_1 = y_0 - y_1 + y_0 = 2y_0 - y_1$$

$$\boxed{y_k = (y_1 - y_0)2^k + 2y_0 - y_1}$$

$$y_k = (y_1 - y_0)\underbrace{2}_{=v_1}{}^k + (2y_0 - y_1)\underbrace{1}_{=v_2}{}^k$$

Připomeňme, že vícekrokovou metodu jsme zapisovali ve tvaru

$$\boxed{\sum_{j=0}^{r} \alpha_j y_{k+j} = h \sum_{j=0}^{r} \beta_j f(x_{k+j}, y_{k+j})}$$

a charakteristické polynomy jsme definovali

$$\boxed{\rho(v) = \sum_{j=0}^{r} \alpha_j v^j} \quad \text{a} \quad \boxed{\sigma(w) = \sum_{j=0}^{r} \beta_j w^j}.$$

O stabilitě výpočtu rozhodují kořeny polynomu $\rho(v)$ (viz $(\star)$).

Pro kořeny $\bar{v}_j$ polynomu $\rho(v)$ musí platit $\boxed{|\bar{v}_j| \le 1}$.

Definice: Řekneme, že metoda je ***D*-stabilní**, pokud kořeny charakteristického polynomu $\rho(v)$ splňují podmínky:

(i) $|\bar{v}_j| \le 1$ pro $j = 1, 2, \ldots, r$,

(ii) je-li $\bar{v}_j$ násobný kořen, potom $|\bar{v}_j| < 1$.

Poznámky:

- Je-li metoda D-stabilní, nebude v průběhu výpočtu radikálně zvětšovat jednokrokovou chybu.
- Uvažujme Eulerovu metodu

$$y_{k+1} - y_k = h\, f(x_k, y_k)$$
$$\rho(v) = v - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \bar{v} = 1$$

$\Rightarrow$ Eulerova metoda je D-stabilní.

Odhad chyby metodou polovičního kroku

Pro globální chybu metody lze psát

$$\boxed{\underbrace{y(x)}_{\text{přesné}} = \underbrace{y(x,h)}_{(*)} + \underbrace{E_h}_{Ch^p} + \underbrace{F_h}_{O(h^r),\ r>p}} \qquad (\bullet)$$

$(*)$ $\quad y(x,h) = y_k(h), \quad x \in \langle x_k, x_{k+1}\rangle, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$

pro poloviční krok

$$\boxed{y(x) = y\Big(x, \frac{h}{2}\Big) + E_{\frac{h}{2}} + F_{\frac{h}{2}}} \qquad (\bullet\bullet)$$

Po odečtení $(\bullet)$ – $(\bullet\bullet)$:

$$0 = y(x,h) - y\Big(x, \frac{h}{2}\Big) + E_h - E_{\frac{h}{2}} + \ldots$$

$$0 \approx y(x,h) - y\Big(x, \frac{h}{2}\Big) + (2^p - 1)E_{\frac{h}{2}}$$

$$\boxed{E_{\frac{h}{2}} = \frac{y\big(x, \frac{h}{2}\big) - y(x,h)}{2^p - 1}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y(x) \approx y\Big(x, \frac{h}{2}\Big) + E_{\frac{h}{2}}}$$

Poznámka: Opět lze použít **Richardsonovu extrapolaci**

- aktivní extrapolace

  extrapolaci provádíme v každém kroku (extrapolované y_k použijeme pro výpočet y_{k+1})

- pasivní extrapolace

  vypočteme y_k, $\; k = 0, 1, \ldots, N-1$ s různými parametry h potom provedeme extrapolaci

Algoritmus prediktor-korektor

Poznámka: Jde o obecné schéma výpočtu.

Princip:

Předpokládejme, že máme dostatečně přesně vypočítány hodnoty $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$ nějakou explicitní jednokrokovou metodou.

Nyní chceme počítat y_k.

1) Nejprve nějakou explicitní metodou určíme nultou iteraci $y_k^{[0]}$ jako vstupní hodnotu pro další výpočet (PREDIKTOR).
2) Vypočteme hodnotu pravé strany $F_k^{[s]} = f(x_k, y_k^{[s]})$.
3) Vypočteme lepší aproximaci $y_k^{[s+1]}$ pomocí nějaké implicitní metody s využitím $F_k^{[s]} =: f_k$ (KOREKTOR).

Pomocí kroků **2)** a **3)** určíme N iterací $y_k^{[1]}, y_k^{[2]}, \ldots, y_k^{[N]}$ (N – dáno).

Na závěr přiřadíme $y_k = y_k^{[N]}$.

Stejný postup opakujeme pro $y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots$.

Poznámka: Dané schéma lze použít na různé metody. Je žádoucí použít explicitní a explicitní metodu stejného řádu (pro zachování přesnosti). Volba konkrétních metod je na nás.

Poznámka: Označíme-li operaci:

a) P ... prediktor
b) E ... vyčíslení (*evaluation*)
c) C ... korektor

Můžeme toto schéma zapsat ve tvaru:

$P(EC)^N$ případně $P(EC)^N E$, vyčíslujeme-li ještě $F_k = f(x_k, y_k^{[N]})$ (což je lepší).
Dostaneme pak různé varianty tohoto schématu:

$$\begin{array}{lll} PEC & , & PECE \\ P(EC)^2 & , & P(EC)^2E \\ P(EC)^3 & , & P(EC)^3E \\ \vdots & , & \vdots \end{array}$$

Příklad: Řešte algoritmem prediktor-korektor založeném na Adamsových metodách druhého řádu na intervalu $\langle 0; 0,6 \rangle$ počáteční úlohu:

$$\boxed{\begin{array}{l} y' = y + \mathrm{e}^x, \qquad \text{tj.} \quad f(x, y(x)) = y + \mathrm{e}^x \\ y(0) = -1 \end{array}}$$

Přesné řešení: $y = \mathrm{e}^x(x-1)$.

Použijeme algoritmus typu PEC.

Vzorec prediktoru má tvar:

$$y_{n+1}^{[0]} = y_n + \frac{h}{2}(3F_n - F_{n-1})$$

Korektor:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(F_{n+1}^{[0]} + F_n)$$

Volte krok $h = 0,2$

n	x_n	$\overbrace{y(x_n)}^{\text{přesné}}$	$y_n^{[0]}$	$F_n^{[0]}$	y_n	e_n
0	0	-1		$\bullet\bullet$ 0 $\hookleftarrow$	-1	0
1	0,2	$-0{,}9771$		$\bullet\bullet$ 0,2425 $\hookleftarrow$	$\bullet$ $-0{,}9789$	0,0018
2	0,4	$-0{,}8950$	^{P} $-0{,}9061 \hookrightarrow$	^{E} 0,5857 $\hookrightarrow$	^{C} $-0{,}8960$	0,0010
3	0,6	$-0{,}7288$	^{P} $-0{,}7445 \hookrightarrow$	^{E} 1,0776 $\hookrightarrow$	^{C} $-0{,}7296$	0,0008

•
Pro určení hodnoty y_1 použijeme např.
jednokrokovou modifikovanou Eulerovu metodu (2. řádu):

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_0, y_0) = y_0 + \mathrm{e}^{x_0} = \\ &= -1 + 1 = 0 \\ k_2 &= f(x_0 + h/2, y_0 + h/2 \cdot k_1) = \\ &= -1 + \mathrm{e}^{0,1} \doteq 0{,}1051 \\ y_1 &= y_0 + h \cdot k_2 \doteq \\ &\doteq -1 + 0{,}2 \cdot 0{,}1051 = -0{,}9789 \end{aligned}$$

••
Určíme hodnoty F_0 a F_1.

Odhad chyby pomocí algoritmu prediktor-korektor

Za předpokladu, že se hodnota derivace $y^{(p+1)}$, kde p je řád metody, příliš nemění, lze odvodit odhad pro lokální chybu algoritmu

$$\boxed{d_k \approx \frac{c_{p+1}^C}{c_{p+1}^P - c_{p+1}^C} \left(y_{k+1}^C - y_{k+1}^P\right)}$$

kde

c_{p+1}^P, c_{p+1}^C … konstanty v lokální chybě metody, tj. $d_k = c_{p+1}\, h^{p+1}\, y^{p+1}(x_k)$

y_{k+1}^C … vypočteno korektorem

y_{k+1}^P … vypočteno prediktorem

Podmíněnost úlohy a stabilita metody

Příklad Řešme počáteční úlohu

$$\boxed{\begin{aligned} &y' = y - \frac{x}{3} - \frac{2}{3}, \quad x \in (0, T\rangle \\ &y(0) = 1 \end{aligned}}.$$

řešení této počáteční úlohy má tvar $y = \dfrac{x}{3} + 1$

obecné řešení dané rovnice je $y = A\mathrm{e}^x + \dfrac{x}{3} + 1$

$\Rightarrow$ úloha je špatně podmíněná!

$$(y(0) = 1 + \varepsilon \quad \rightarrow \quad y = \varepsilon e^x + \frac{x}{3} + 1)$$

pro řešení je třeba použít metodu vyššího řádu a dostatečně přesnou aritmetiku

Příklad Pomocí Eulerovy metody řešme počáteční úlohu

$$\boxed{\begin{array}{l} y' = \lambda\, y, \quad x \in (0, T\rangle \\ y(0) = 1 \end{array}}\,. \qquad (\clubsuit)$$

přesné řešení úlohy je $y(x) = e^{\lambda x}$

v tomto případě má Eulerova metoda tvar

$$y_{k+1} = y_k + h\lambda y_k$$

$$y_{k+1} = (1 + \underbrace{h\,\lambda}_{=\bar{h}})y_k$$

Je-li $\left|1 + \bar{h}\right| < 1$, pak je posloupnost y_k omezená a klesající.

Je-li $\left|1 + \bar{h}\right| > 1$, pak posloupnost y_k neomezeně roste (osciluje).

$$\left|1 + \bar{h}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{h} = h\lambda \in (-2, 0)$$

Pro konkrétní úlohu:

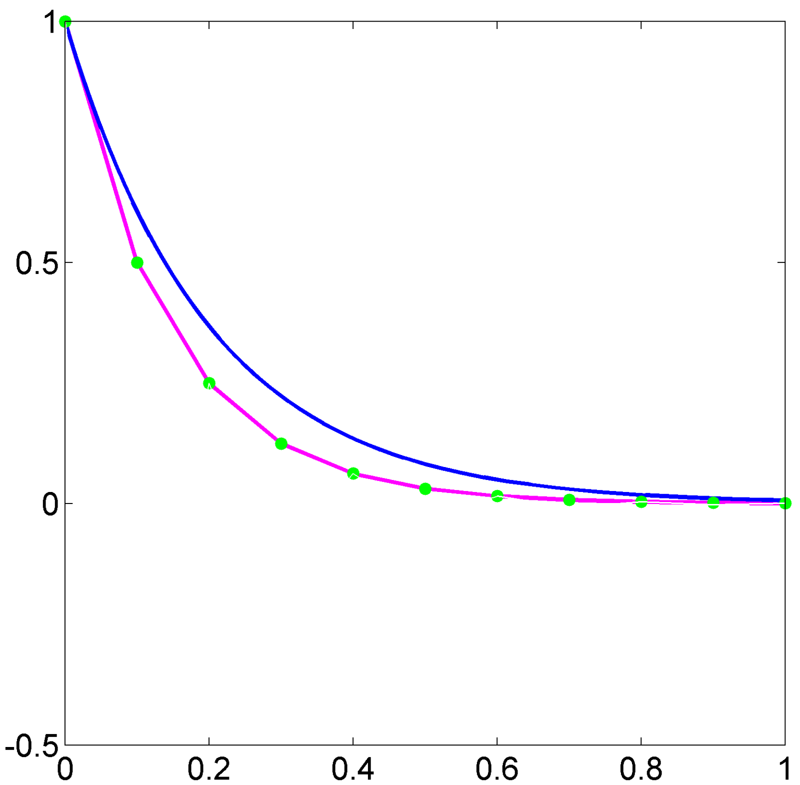
$$\boxed{\begin{array}{l} y' = -5\, y, \quad x \in (0, 1\rangle \\ y(0) = 1 \end{array}}$$

a krok h pomocí Eulerovy metody dostaneme:

1) $h = 0,1$

$$y_{k+1} = \underbrace{(1 - 0,1 \cdot 5)}_{=0,5}\, y_k$$

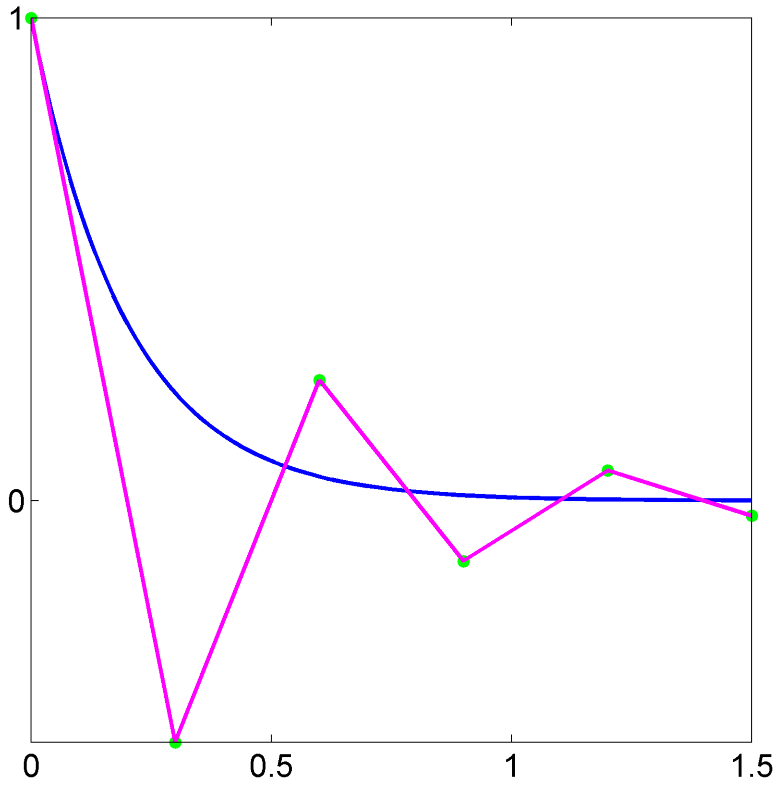
x_k	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y_k	1.0000	0.5000	0.2500	0.1250	0.0625	0.0313	0.0156	0.0078	0.0039	0.0020	0.0010



2) $h = 0,3$

$$y_{k+1} = \underbrace{(1 - 0,3 \cdot 5)}_{= -0,5} y_k$$

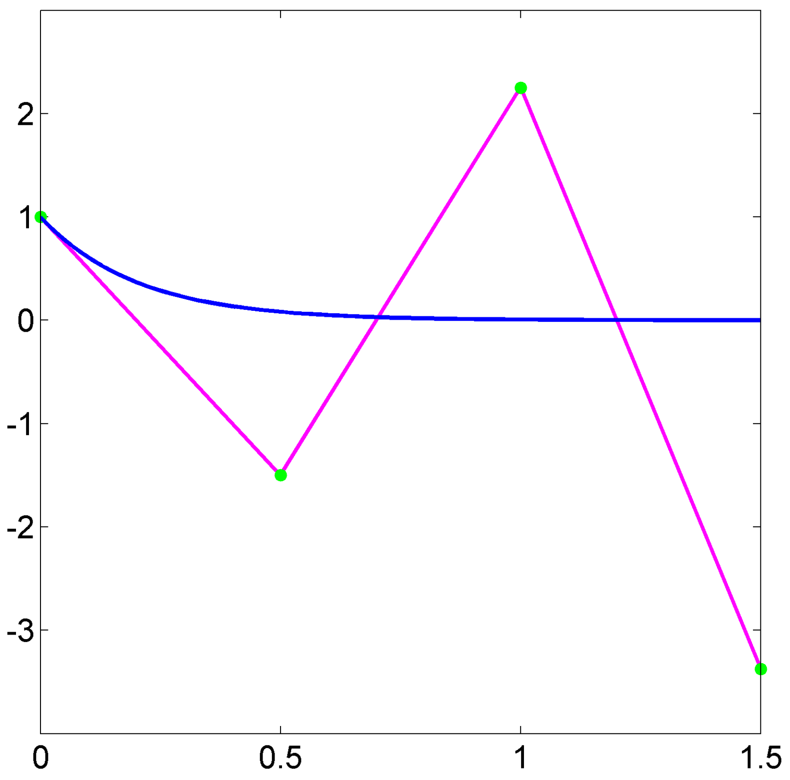
x_k	0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5
y_k	1.0000	-0.5000	0.2500	-0.1250	0.0625	-0.0313



3) $h = 0,5$

$$y_{k+1} = \underbrace{(1 - 0,5 \cdot 5)}_{= -1,5} y_k$$

x_k	0	0.5	1.0	1.5
y_k	1.0000	-1.5000	2.2500	-3.3750



Tj. v případě velké záporné hodnoty $\lambda = -2000 \quad \rightarrow \quad h < \frac{2}{2000} = 0,0001$

řešení $\quad y(x) = \mathrm{e}^{-2000x} \rightarrow 0 \quad$ pro $\; x \rightarrow \infty$

$$y_k = (1 + h\lambda)^k y_0 = (1 - 2000h)^k \rightarrow 0 \quad \text{pro } k \rightarrow \infty$$

Poznámka:

Řekneme, že metoda je pro $\bar{h}$ **absolutně stabilní**, jestliže při h a λ: $h\lambda = \bar{h}$, všechna přibližná řešení mají pro $k \rightarrow \infty$ limitu rovnou 0 $(y_k \rightarrow 0)$.

Úlohu (♣) uvažujeme proto, že rovnice $y' = f(x, y)$ po linearizování přejde na tvar $y' = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{=\lambda} y$.

$\Rightarrow$ Stabilita závisí jak na metodě, tak na úloze.

Připomeňme, že platí:

$$\begin{array}{lcllll} y(x_{k+1}) & = & y(x_k) & + & h\,\lambda y(x_k) & + \; h\tau_k \\ y_{k+1} & = & y_k & + & h\,\lambda y_k & \\ \hline E_{k+1} & = & E_k & + & h\,\lambda E_k & + \; h\tau_k \end{array}$$

$$|E_{k+1}| \leq |1 + h\lambda| \cdot |E_k| + h|\tau_k|$$

Chceme-li, aby $|E_k| \rightarrow 0$ pro $k \rightarrow \infty$, musíme požadovat $\boxed{|1 + h\lambda| < 1}$.

Tuto úvahu můžeme učinit i pro obecnou vícekrokovou metodu

$$\boxed{\sum_{j=0}^{r} \alpha_j y_{k+j} = h \sum_{j=0}^{r} \beta_j \lambda y_{k+j}}$$

$$\boxed{\sum_{j=0}^{r} (\alpha_j - \bar{h}\beta_j) y_{k+j} = 0}$$

Definujeme **polynom stability**:

$$\boxed{\Pi(u, \bar{h}) = \sum_{j=0}^{r} (\alpha_j - \bar{h}\beta_j) u^j}.$$

Definice: **Oblastí absolutní stability metody** nazýváme množinu

$$\mathcal{A} = \left\{ \bar{h} \in \mathbb{C} : \ |\bar{u}_j| \leq 1 \quad \forall \bar{u}_j : \ \Pi(\bar{u}_j, \bar{h}) = 0 \right\}$$

$$|\bar{u}_j| < 1 \text{ pro násobné kořeny}$$

tj. „množina hodnot $\bar{h}$ v komplexní rovině, pro které kořeny polynomu $\Pi(u, \bar{h})$ splňují podmínku $|\bar{u}_j| < 1$“

Příklady

1. (explicitní) Eulerova metoda

$$y_{k+1} - y_k = hf(x_k, y_k)$$

Koeficienty metody

$$\alpha_0 = -1, \ \alpha_1 = 1, \ \beta_0 = 1, \ \beta_1 = 0$$

Polynom stability

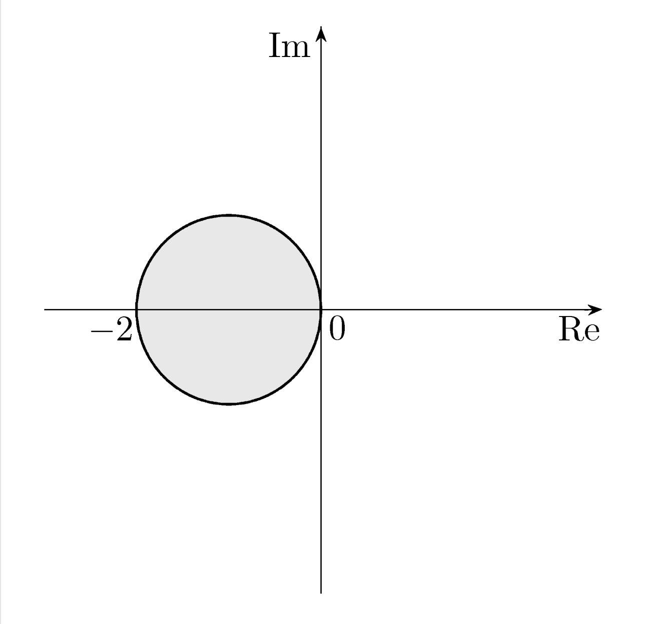
$$\Pi(u, \bar{h}) = \sum_{j=0}^{r} (\alpha_j - \bar{h}\beta_j) u^j$$

$$\Pi(u, \bar{h}) = (-1 - \bar{h}) + u = u - 1 - \bar{h}$$

Kořen

$$\bar{u} = 1 + \bar{h}; \qquad |\bar{u}| = \left|1 + \bar{h}\right| \leq 1$$

Oblast absolutní stability metody



2. implicitní Eulerova metoda

$$y_{k+1} - y_k = hf(x_{k+1}, y_{k+1})$$

Koeficienty metody

$$\alpha_0 = -1,\ \alpha_1 = 1,\ \beta_0 = 0,\ \beta_1 = 1$$

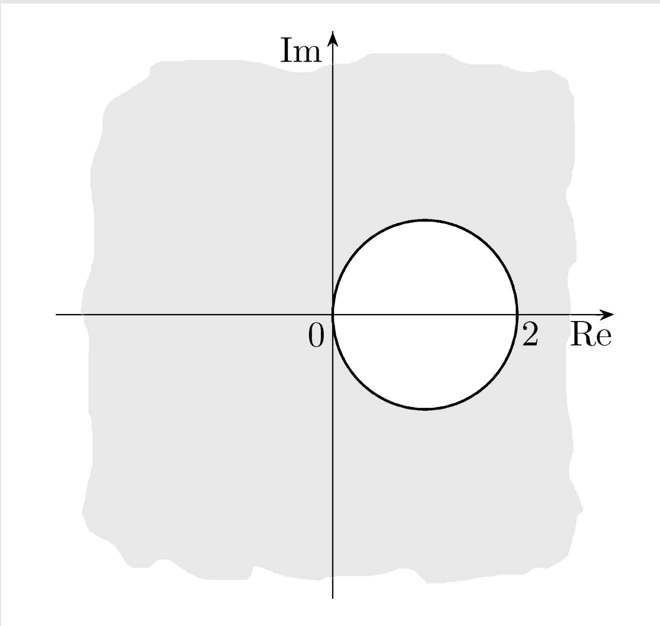
Polynom stability

$$\Pi(u, \bar{h}) = -1 + (1 - \bar{h})u = (1 - \bar{h})u - 1$$

Kořen

$$|\bar{u}| = \frac{1}{\left|1 - \bar{h}\right|} \leq 1; \qquad \left|1 - \bar{h}\right| \geq 1$$

Oblast absolutní stability metody



Intervaly absolutní stability

Eulerova metoda	$(-2, 0)$
Implicitní Eulerova metoda	$(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

Příklad Stanovte oblast absolutní stability pro tzv. obdélníkové pravidlo, tj. metodu s předpisem

$$y_{k+1} = y_{k-1} + 2hf(x_k, y_k).$$

Koeficienty metody

$$\alpha_0 = -1,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1,\ \beta_0 = 0,\ \beta_1 = 2,\ \beta_2 = 0$$

Polynom stability

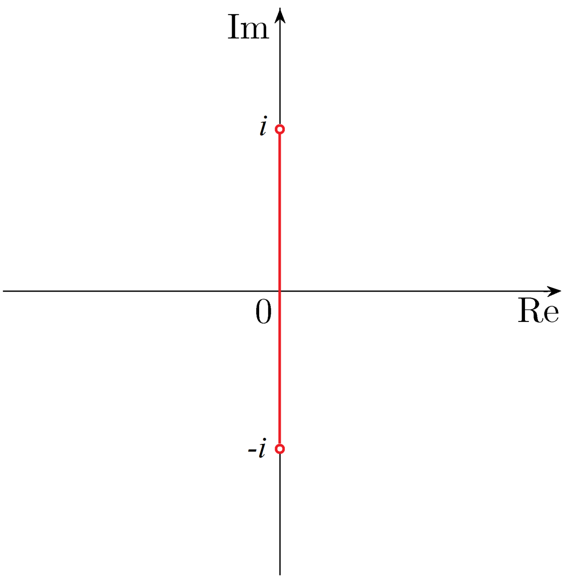
$$\Pi(u, \bar{h}) = -1 - 2\bar{h}u + u^2$$

Kořeny

$$u_{1,2} = \frac{2\bar{h} \pm \sqrt{4\bar{h}^2 + 4}}{2} = \bar{h} \pm \sqrt{\bar{h}^2 + 1}$$

Pro oblast absolutní stability musí platit (D.cv.)

$$|u_1| < 1 \quad \wedge \quad |u_2| < 1$$



Příklad Stanovte oblast absolutní stability pro tzv. lichoběžníkové pravidlo, tj. metodu s předpisem

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\right].$$

Koeficienty metody

$$\alpha_0 = -1,\ \alpha_1 = 1,\ \beta_0 = \frac{1}{2},\ \beta_1 = \frac{1}{2}$$

Polynom stability

$$\Pi(u, \bar{h}) = (-1 - \frac{1}{2}h) + (1 - \frac{1}{2}h)u$$

Kořen

$$u = \frac{2 + \bar{h}}{2 - \bar{h}}$$

Platí

$$|u| < 1 \quad \text{pro} \quad \mathrm{Re}\,\bar{h} < 0$$

Neboť

$$\left|\frac{2+\bar{h}}{2-\bar{h}}\right| < 1 \;\Leftrightarrow\; \left|2+\bar{h}\right| < \left|2-\bar{h}\right| \;\Leftrightarrow\; \left|\bar{h}-(-2)\right| < \left|\bar{h}-2\right|,$$

tj. vzdálenost $\bar{h}$ od -2 je menší než vzdálenost od 2.

Oblast absolutní stability metody