Kapitola 11. Počáteční úlohy pro ODR - I

Počáteční úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Formulace:

Je dána funkce dvou proměnných $f = f(x, y)$, $y \in \mathbb{R}$, $x \in \langle a, b \rangle$ a čísla $x_0 \in \langle a, b \rangle$ a $y_0 \in \mathbb{R}$. Chceme najít takovou funkci $y = y(x)$, $x \in \langle x_0, b \rangle$, která na intervalu (x_0, b) vyhovuje rovnici

$$\boxed{y' = f(x, y)}$$

a splňuje počáteční podmínku

$$\boxed{y(x_0) = y_0}.$$

Funkci $y = y(x)$, která splňuje počáteční podmínku a rovnost $y' = f(x, y(x))$ na příslušném intervalu, nazýváme řešením úlohy.

V některých případech budeme uvažovat <u>speciální úlohu</u> s rovnicí

$$\boxed{y' = a(x)y + b(x)}$$

nebo s rovnicí

$$\boxed{y' = \lambda y}.$$

Velmi podstatnou úlohu v našich dalších úvahách bude hrát předpoklad, že funkce f je na nějakém intervalu **lipschitzovsky spojitá** (v druhé proměnné), tj. platí:

$$\boxed{|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2| \quad \forall x \in \langle a, b \rangle \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}}$$

Příklad 1

Uvažujme úlohu

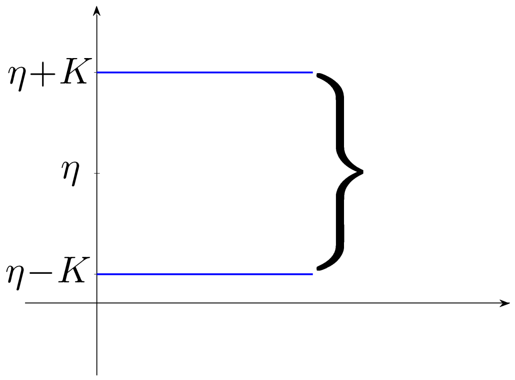
$$\boxed{\begin{array}{c} y' = y^2 \\ y(0) = \eta > 0 \end{array}}$$

Funkce $f(x, y) = y^2$ je lipschitzovsky spojitá na libovolném konečném intervalu $\langle \eta - K, \eta + K \rangle$.
Konstanta $\underline{L = 2(\eta + K)}$.

$$\left|y_1^2 - y_2^2\right| \leq 2(\eta + K)\,|y_1 - y_2|$$

$$|y_1 + y_2| \leq 2(\eta + K) \quad \forall x \in \langle a, b \rangle, \quad \forall y_1, y_2 \in \langle \eta - K, \eta + K \rangle$$

$$|y_1 + y_2| \leq |y_1| + |y_2| \leq \eta + K + \eta + K = 2(\eta + K) \quad \forall x \in \langle a, b \rangle, \quad \forall y_1, y_2 \in \langle \eta - K, \eta + K \rangle$$



Řešíme pomocí separace proměnných

$$\frac{dy}{dx} = y^2$$
$$\frac{dy}{y^2} = dx$$
$$-\frac{1}{y} = x + c$$
$$y = -\frac{1}{x+c}$$
$$y(0) = \eta$$
$$-\frac{1}{c} = \eta$$
$$c = -\frac{1}{\eta}$$

Řešení této úlohy má tvar

$$\boxed{\bar{y}(x) = \frac{1}{\frac{1}{\eta} - x}}$$

Když $x \to \left(\frac{1}{\eta}\right)_-$, pak $\bar{y} \to \infty$.

$\Rightarrow$ Pro všechna $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ nelze najít jednu konstantu L a řešení neexistuje pro libovolné x (řešení existuje pouze do určitého času).

Příklad 2

Uvažujme úlohu

$$\boxed{\begin{aligned} y' &= \sqrt{y} \\ y(0) &= 0 \end{aligned}}$$

Funkce $f(x, y) = \sqrt{y}$ není lipschitzovsky spojitá v okolí 0, protože $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}} \to \infty$ pro $y \to 0_+$.

Z věty o střední hodnotě plyne:

$$\boxed{f(x, y_1) - f(x, y_2) = \frac{\partial f(x,\xi)}{\partial y}(y_1 - y_2)}$$

Řešení této úlohy není jednoznačné:

$$\boxed{\begin{aligned}\bar{y}_1(x) &= 0\\ \bar{y}_2(x) &= \frac{1}{4}x^2\end{aligned}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}$$

1) $y \equiv 0$ OK 2) $y \neq 0$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = dx$$

$$2\sqrt{y} = x + c$$

$$\sqrt{y} = \frac{x}{2} + c$$

$$y = \left(\frac{x}{2} + c\right)^2$$

$$y(0) = 0$$

$$c^2 = 0$$

$$c = 0$$

$$y = \frac{x^2}{4}$$

Příklad 3

Uvažujme úlohu

$$\boxed{\begin{aligned}y' &= \lambda y\\ y(0) &= 1\end{aligned}}$$

Funkce $f(x, y) = \lambda y$ je lipschitzovsky spojitá pro všechna $y \in \mathbb{R}$ s konstantou $\underline{L = \lambda}$.

$$|\lambda y_1 - \lambda y_2| = |\lambda|\,|y_1 - y_2| \leq |\lambda|\,|y_1 - y_2|$$

Tato úloha má právě jedno řešení pro všechna $x \in \langle 0, \infty)$ ve tvaru

$$\boxed{\bar{y}(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y$$

$$\frac{dy}{y} = \lambda dx$$

$$\ln|y| = \lambda x + c$$

$$\ln|y| = \ln \mathrm{e}^{\lambda x} + \ln c$$

$$y = c\,\mathrm{e}^{\lambda x}$$

$$y(0) = 1$$

$$c = 1$$

$$y = \mathrm{e}^{\lambda x}$$

Následující příklady ukazují význam Lipschitzovy konstanty.

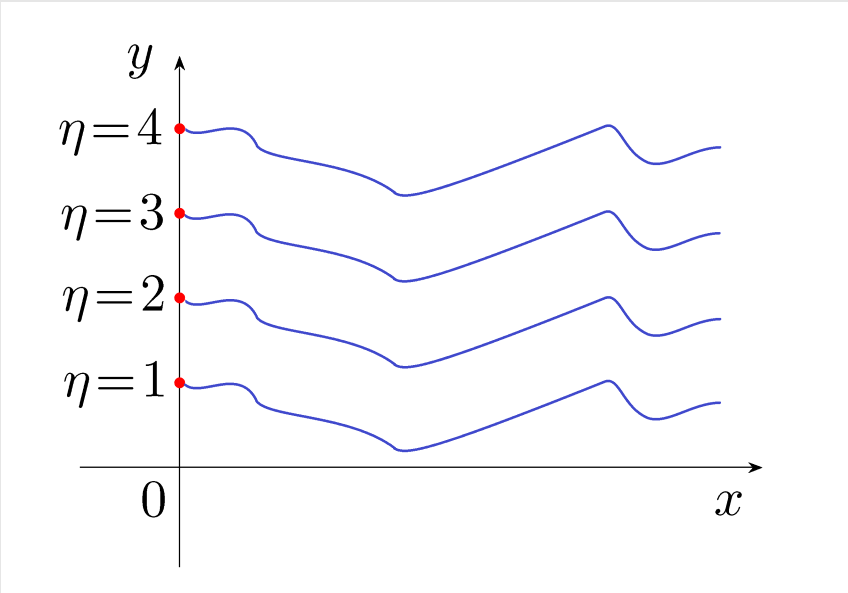
Příklad 4

Uvažujme úlohu ve tvaru

$$\boxed{\begin{aligned} y' &= g(x) \\ y(0) &= \eta \end{aligned}}$$

Řešení má tvar $\bar{y}(x) = \eta + \int\limits_0^x g(\xi)\, d\xi$ a Lipschnitzova konstanta $\underline{L = 0}$.

Křivky řešení mohou vypadat třeba takto:



Změníme-li počáteční podmínku η, potom nové řešení je pouhé posunutí původního do hodnoty η.

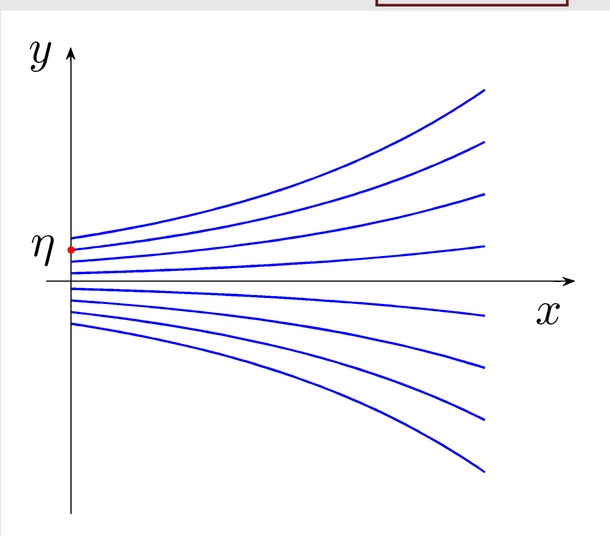
Příklad 5

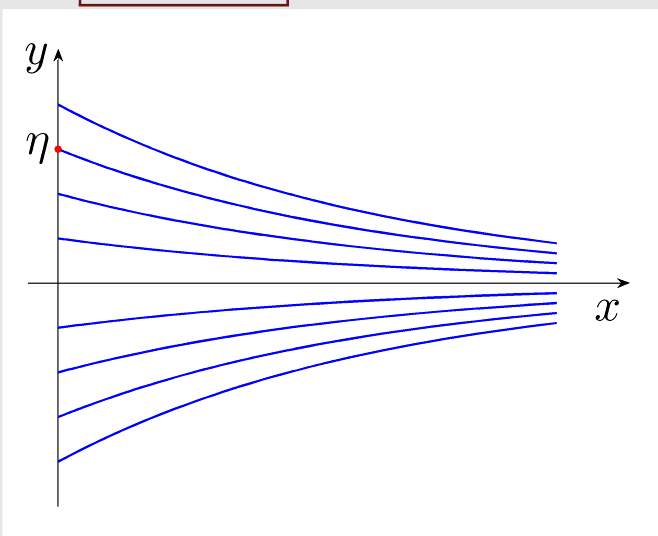
Uvažujme úlohy

$$\boxed{\begin{aligned} y' &= 3y \\ y(0) &= \eta \end{aligned}} \quad \text{a} \quad \boxed{\begin{aligned} y' &= -3y \\ y(0) &= \eta \end{aligned}}$$

Dostaneme řešení

$$\boxed{\bar{y}(x) = \eta e^{3x}} \quad \text{a} \quad \boxed{\bar{y}(x) = \eta e^{-3x}}$$





V obou případech je Lipschitzova konstanta $\underline{L = 3}$. Její velikost však může ovlivňovat chování konkrétní numerické metody pro konkrétní úlohu.

Věta Nechť funkce $f(x,y)$ má následující vlastnosti:

(i) je definována v pásu $S = \langle a,b\rangle \times \mathbb{R}$ $(a, b$ ... konečné),

(ii) je spojitá v proměnné $x \in \langle a,b\rangle$ pro každé $y \in \mathbb{R}$,

(iii) splňuje Lipschitzovu podmínku v proměnné y, tj. existuje číslo L takové, že platí nerovnost

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2| \quad \forall x \in \langle a,b\rangle \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

Potom pro každé $x_0 \in \langle a,b\rangle$ a libovolné $y_0 \in \mathbb{R}$ existuje právě jedna funkce $y = y(x)$ s vlastnostmi:

a) $y(x)$ je spojitá a spojitě diferencovatelná pro $x \in \langle a,b\rangle$,

b) platí rovnost $y'(x) = f(x, y(x))$ pro $\forall x \in \langle a,b\rangle$,

c) $y(x_0) = y_0$.

Numerické metody lze dělit podle různých kritérií:

A) metody založené na numerické derivaci **X** na numerické integraci

B) jednokrokové metody **X** vícekrokové metody

C) explicitní metody **X** implicitní metody

D) metody s konstantním krokem **X** metody s proměnným krokem

Princip:
Základem metod je diskretizace proměnných.
Přibližné řešení nehledáme jako spojitou funkci, ale nagenerujeme body $x_0, x_1, x_2, \dots$
a určujeme čísla $y_0, y_1, y_2, \dots$, která aproximují $y(x_0), y(x_1), y(x_2), \dots$.
Pro jednoduchost můžeme uvažovat ekvidistantní dělení, tj. $h = x_{k+1} - x_k, \quad \forall k$.

Eulerova metoda

- nejjednodušší jednokroková explicitní metoda; lze odvodit řadou postupů

- 1.odvození

  y_0 ... dáno

  y_1 ... počítáme extrapolací z hodnoty y_0, přičemž se na intervalu $\langle x_0, x_1\rangle$ řešení aproximuje přímkou,

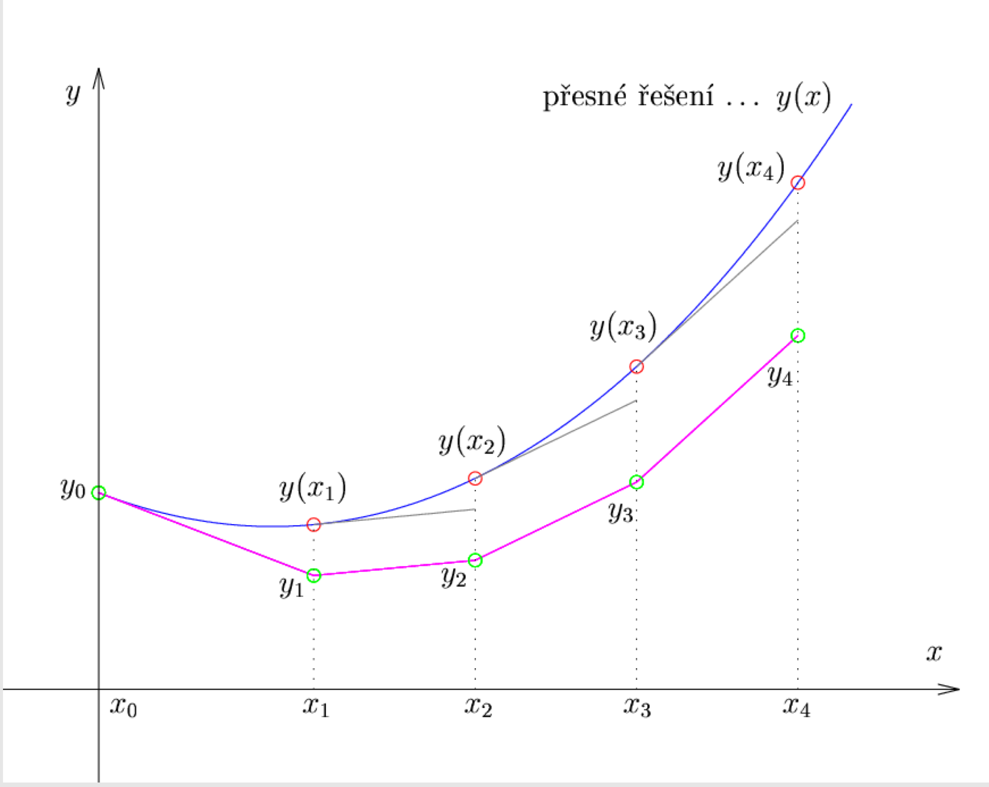
  která prochází bodem $[x_0, y_0]$ a má směrnici $y' = f(x_0, y_0)$.

  Ta má rovnici $y - y_0 = (x - x_0) f(x_0, y_0)$. Tj. pro x_1 dostáváme:

$$y_1 = y_0 + \underbrace{(x_1 - x_0)}_{h} f(x_0, y_0)$$

  Obecně dostaneme rekurentní vztah

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + h_k f(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots}$$



- 2.odvození Pomocí Taylorova rozvoje.

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h_k \underbrace{y'(x_k)}_{=f(x_k, y(x_k))} + \underbrace{\frac{1}{2} h_k^2 y''(\xi_k)}_{(*)}, \quad \xi_k \in (x_k, x_{k+1})$$

$(*)$ zanedbáme a dostaneme vztah pro přibližné řešení

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + h_k f(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots}$$

y_0 ... počáteční podmínka

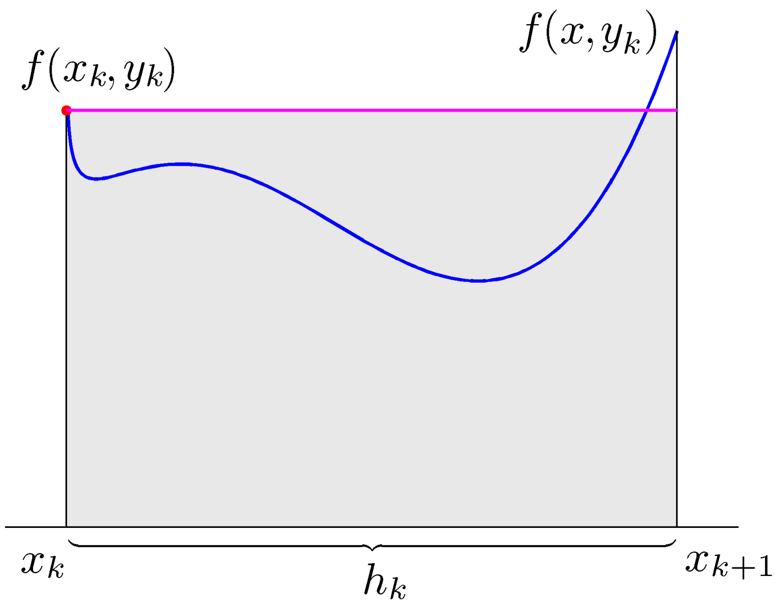
- 3.odvození Původní diferenciální rovnici nahradíme diferenční rovnicí (aproximujeme derivaci).

$$y' = f(x,y) \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} = f(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots}$$

- 4.odvození Původní diferenciální rovnici zintegrujeme a aproximujeme určitý integrál.

$$y' = f(x,y) \quad \rightarrow \quad y(x_{k+1}) - y(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, \underbrace{y(x)}_{(*)})\, dx$$

$(*)$ $y(x)$ na $\langle x_k, x_{k+1} \rangle$ aproximujeme konstantou y_k



$$\boxed{y_{k+1} - y_k = h_k f(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots}.$$

Poznámka:

Eulerova metoda je

- jednokroková metoda ($y_k \to y_{k+1}$)
  K výpočtu y_{k+1} použijeme pouze předchozí hodnotu y_k.
- explicitní metoda (na pravé straně není y_{k+1})
  V získané formuli je explicitně vyjádřena hodnota y_{k+1}.

Příklad

Pomocí Eulerovy metody řešte následující úlohu na intervalu $\langle 0; 0{,}6 \rangle$ s konstantními kroky $h = 0,2$ a $h = 0,1$.

$$\boxed{\begin{array}{c} y' = x - y \\ y(0) = 1 \end{array}}$$

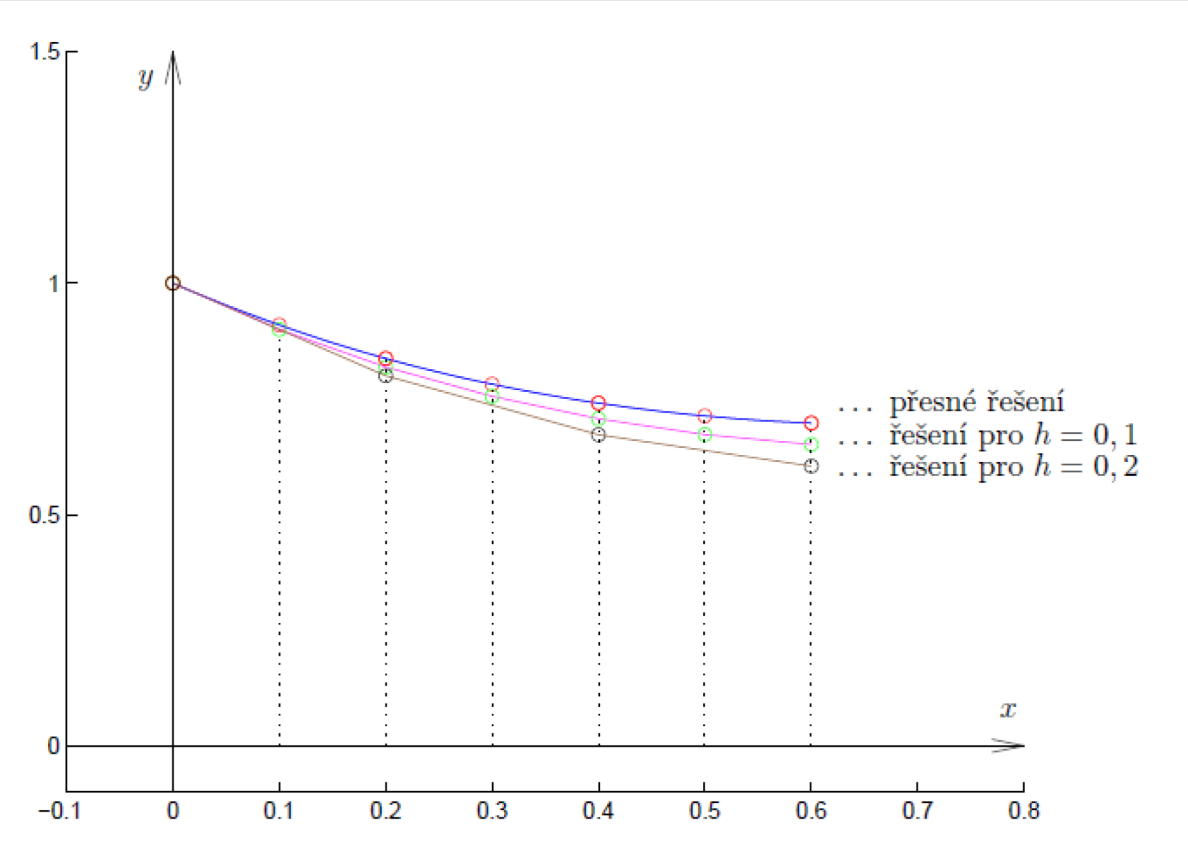
Řešení:

(Přesné řešení: $y(x) = 2\mathrm{e}^{-x} + x - 1$).

Eulerova metoda je dána rekurentním vztahem:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k).$$

		$h = 0,2$		$h = 0,1$	
x_k	$y(x_k)$	y_k	e_k	y_k	e_k
0	1,000	1,000	0,000	1,000	0,000
0,1	0,910			0,900	0,010
0,2	0,837	0,800	0,037	0,820	0,017
0,3	0,782			0,758	0,024
0,4	0,741	0,680	0,061	0,712	0,029
0,5	0,713			0,681	0,032
0,6	0,698	0,624	0,074	0,663	0,035



Poznámky:

1) Vidíme, že je chyba úměrná h.
2) Chyba s rostoucím x vzrůstá.

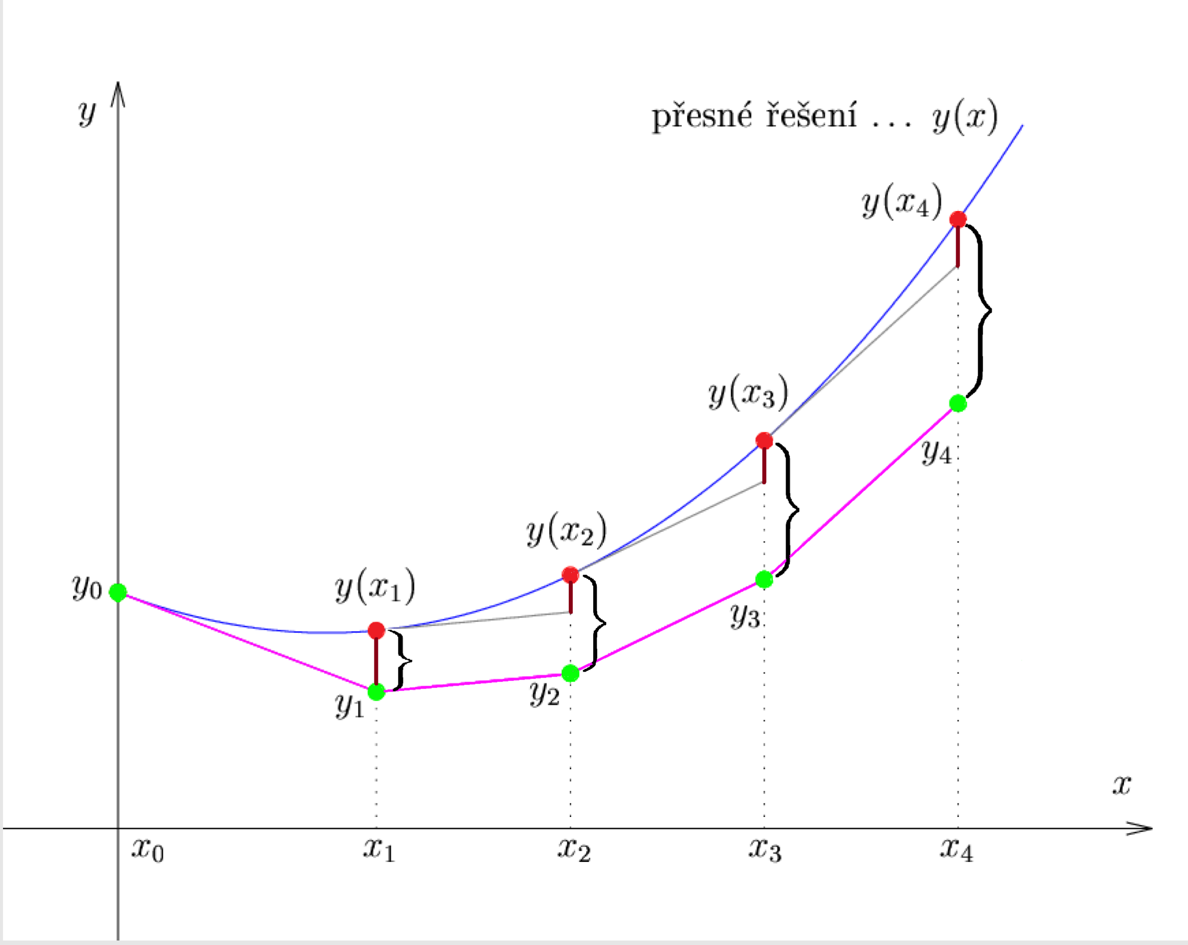
Definice: **Lokální diskretizační chyba** d_k na intervalu $\langle x_k, x_{k+1}\rangle$ je nepřesnost, s níž hodnoty teoretického řešení dané úlohy splňují rekurentní vztah, ze kterého se počítá hodnota y_{k+1}.

Pro Eulerovu metodu je lokální diskretizační chyba d_k:

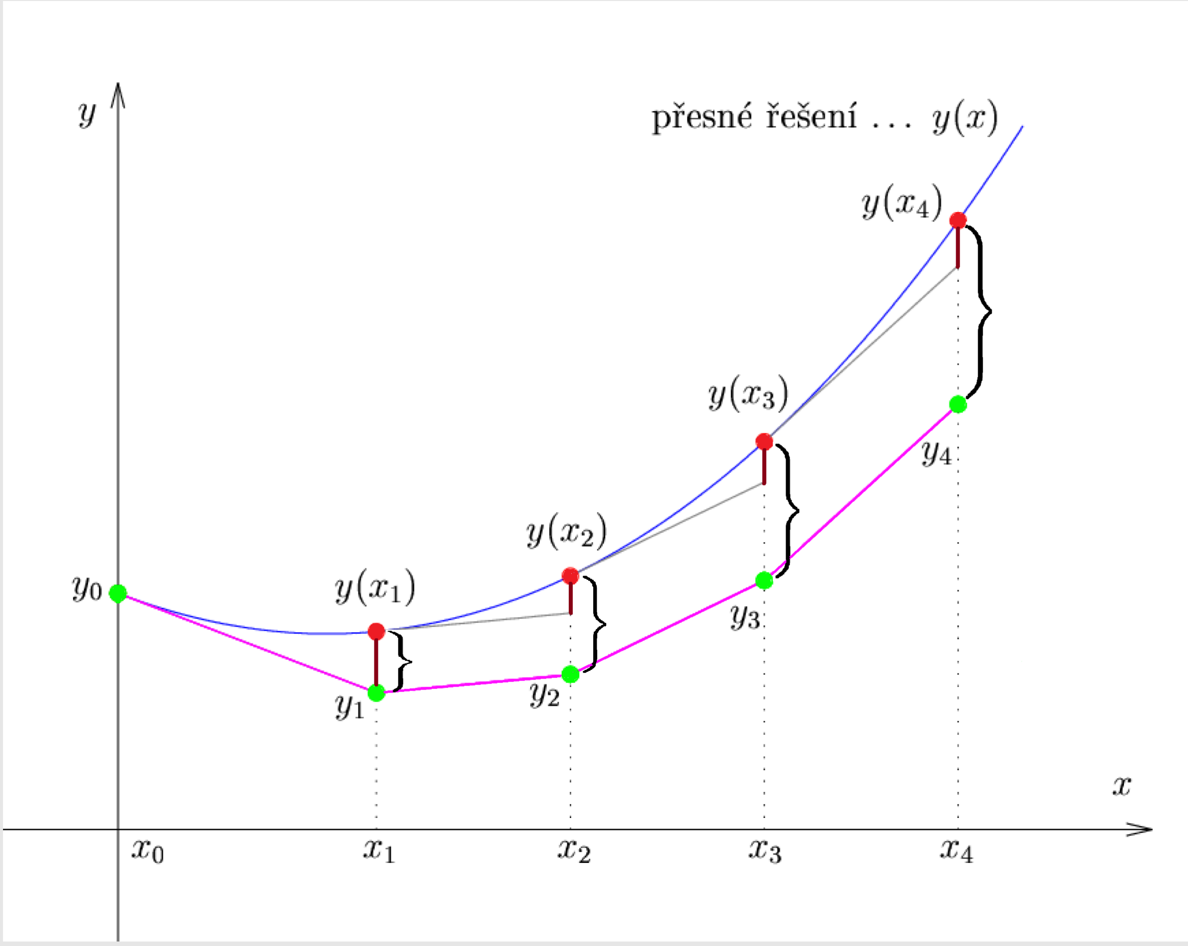
$$\boxed{y(x_{k+1}) = y(x_k) + h_k\, f(x_k, y(x_k)) + d_k}$$

Poznámka:

Lokální diskretizační chyba se nazývá lokální proto, že d_k lze interpretovat také jako chybu jednoho kroku metody (při výpočtu y_{k+1}) za předpokladu, že všechny hodnoty $y_k, y_{k-1}, \ldots$ potřebné k výpočtu y_{k+1} jsou přesné.



Definice: **Globální diskretizační chyba** je $e_k = y(x_k) - y_k$, tj. rozdíl teoretické hodnoty řešení a vypočtené hodnoty řešení v daném bodě x_k.



Globální diskretizační chyba Eulerovy metody (pro konstantní krok h)

Přibližné řešení:

$$y_0 = y(x_0)$$
$$y_{k+1} = y_k + h\, f(x_k, y_k) \quad k = 0, 1, \dots$$

Přesné řešení:

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h\, f(x_k, y(x_k)) + d_k \quad k = 0, 1, \dots$$

Po odečtení:

$$\boxed{\begin{aligned} e_0 &= 0 \\ e_{k+1} &= e_k + h\left(f(x_k, y(x_k)) - f(x_k, y_k)\right) + d_k \end{aligned}},$$

tj. v každém kroku se ke globální chybě e_k připočítá lokální chyba d_k a člen $h \cdot (\dots)$, který představuje nepřesnosti z minulých kroků.

Příklad:

Speciální případ, kdy f nezávisí na y:

$$\boxed{\begin{aligned} y' &= f(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{e_{k+1} = \sum_{m=0}^{k} d_m}, \qquad \circledast$$

tj. globální chyba je součtem lokálních chyb.

Poznámka:

Lokální chyba Eulerovy metody je $O(h^2)$ (viz další slide).

Protože $\circledast$ má k sčítanců a protože pro pevné x je $k = \dfrac{x-a}{h}$, plyne z $\circledast$

$$\boxed{e(x,h) = \frac{const}{h} \cdot O(h^2) = O(h)}$$

... podobně jako u základních a složených kvadraturních vzorců.

Poznámka:

Lokální i globální diskretizační chyba jsou chyby aproximace, tj. neuvažovali jsme zaokrouhlovací chyby.

Definice: **Řád diferenční metody** je největší přirozené číslo p takové, že pro danou metodu aplikovanou na libovolnou počáteční úlohu s dostatečně hladkým řešením platí při každém pevném k a $h_k \to 0$ odhad

$$d_k = O(h_k^{p+1}).$$

Řád Eulerovy metody

Ze vztahu pro lokální diskretizační chybu d_k plyne:

$$d_k = y(x_{k+1}) - y(x_k) - h_k \cdot \underbrace{y'(x_k)}_{=f(x_k, y(x_k))}$$

$y(x_{k+1})$ vyjádříme pomocí Taylorova rozvoje (předpokládáme, že y má 2. derivaci)

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h_k y'(x_k) + \frac{1}{2} h_k^2\, y''(\xi) \quad \xi \in (x_k, x_{k+1})$$

Po dosazení:

$$\boxed{d_k = \frac{1}{2} h_k^2\, y''(\xi)} = O(h_k^2)$$

$2 = p + 1 \quad \Rightarrow \quad$ **řád Eulerovy metody** je $p = 1$.

Obecná jednokroková metoda

Eulerova metoda je sice velmi jednoduchá (řád je 1), ale k dosažení určité přesnosti musíme používat velmi malé kroky h_k. Chceme-li jednokrokovou metodu vyššího řádu, musíme se zříci linearity

$$y_{k+1} = y_k + \underline{h_n\, f(x_k, y_k)} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + \Phi(x_k, y_k, h_k, f) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots}$$

Metody Taylorova typu

Hodnotu $y(x_{k+1})$ budeme aproximovat pomocí Taylorova rozvoje vyššího řádu p
(v Eulerově metodě byl použit řád 1), tj.

$$y(x_{k+1}) = y(x_k + h_k) = y(x_k) + h_k\, y'(x_k) + \frac{h_k^2}{2!}\, y''(x_k) + \cdots + \frac{h_k^p}{p!}\, y^{(p)}(x_k) + \frac{h_k^{p+1}}{(p+1)!}\, y^{(p+1)}(\xi_k) \quad \xi_k \in (x_k, x_{k+1})$$

Je třeba dosadit za derivace y v bodě x_k. Derivace určíme postupným derivováním funkce f.

$$\begin{aligned}
y' &= f(x, y(x)) \\
y'' &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = f_x + f_y \cdot \underbrace{f}_{=y'} \overset{\text{ozn.}}{=} f^{[1]}(x, y) \\
y''' &= \frac{\partial f^{[1]}}{\partial x} + \frac{\partial f^{[1]}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = f_x^{[1]} + f_y^{[1]} \cdot \underbrace{f}_{=y'} \overset{\text{ozn.}}{=} f^{[2]}(x, y) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Obecně lze odvodit rekurenci

$$y^{(r+1)} = f^{[r]}(x, y(x)) = f_x^{[r-1]}(x, y(x)) + f_y^{[r-1]}(x, y(x)) \cdot f(x, y(x)) \quad r = 1, 2, \ldots$$

Po dosazení (uvažujme konstantní krok h) dostáváme

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + h\, f(x_k, y_k) + \frac{h^2}{2}\, f^{[1]}(x_k, y_k) + \cdots + \frac{h^p}{p!}\, f^{[p-1]}(x_k, y_k)}$$

Poznámka:
Metody Taylorova typu se v praxi nepoužívají právě z důvodu nutnosti vyjadřovat derivace y'', y''', ...

Příklad Odvoďte metodu Taylorova typu 2.řádu pro řešení následující úlohy na intervalu $\langle 0; 0,6 \rangle$ s konstantním krokem $h = 0,2$

$$\boxed{\begin{aligned} y' &= x - y, \\ y(0) &= 1 \end{aligned}}\,.$$

Řešení:
(Přesné řešení: $y(x) = 2e^{-x} + x - 1$).

$$f(x,y) = x - y$$
$$f^{[1]}(x,y) = f_x + f_y \cdot f = 1 + (-1) \cdot f(x,y) = 1 - x + y.$$

Dostáváme rekurentní vztah:

$$y_{k+1} = y_k + h\,(x_k - y_k) + \frac{1}{2}\,h^2\,(1 - x_k + y_k)$$

x_k	$y(x_k)$	y_k	$h(x_k - y_k)$	$\frac{h^2}{2}(1 - x_k + y_k)$	e_k
0	1,000	1,000	-0,200	0,040	0,000
0,2	0,837	0,840	-0,128	0,033	-0,003
0,4	0,741	0,745	-0,069	0,027	-0,004
0,6	0,698	0,703			-0,005

Poznámka:

Vidíme, že metoda Taylorova typu 2. řádu pro $h = 0,2$ dává přesnější výsledky než Eulerova metoda s $h = 0,1$.

Metody Runge-Kuttova typu

- Univerzálnější metody než metody Taylorova typu.
- Vychází také z Taylorova polynomu, ale nepoužívá se ho přímo, aby nebylo nutné explicitně vyjadřovat derivace funkce $f = f(x, y(x))$ a počítat jejich hodnoty. Hledaná aproximace je kombinací několika hodnot funkce f vypočítaných v několika strategicky volených bodech (x, y) na intervalu $\langle x_k, x_{k+1}\rangle$.

Poznámka: Těchto metod je velké množství!

Heunova metoda (Runge-Kuttova metoda 2. řádu)

– vztah $y' = f(x, y(x))$ zintegrujeme přes interval $\langle x_k, x_{k+1}\rangle$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x)\,dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x))\,dx$$

$$y(x_{k+1}) - y(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x))\,dx$$

– použijeme lichoběžníkové pravidlo

$$y(x_{k+1}) - y(x_k) = \frac{h}{2}\left[f(x_k, y(x_k)) + f(x_{k+1}, \underline{y(x_{k+1})})\right] + \underbrace{O(h^3)}_{\text{viz chyba lich. pr.}}$$

– na pravé straně vystupuje hodnota $y(x_{k+1})$, její aproximaci určíme pomocí Eulerovy metody

$$\overline{y}(x_{k+1}) = y(x_k) + h\,f(x_k, y(x_k)) + O(h^2)$$

– dostáváme metodu ve tvaru

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{y}_{k+1} &= y_k + h\, f(x_k, y_k) \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2}\Big[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \overline{y}_{k+1})\Big] \end{aligned}}$$

Poznámka: Lokální diskretizační chyba, tj. chyba jednoho kroku metody, je $d_k = O(h^3)$. Globální chyba je potom o řád nižší, tj. $e_k = O(h^2)$, protože chyba metody se zvětšuje lineárně s počtem kroků $k \sim \dfrac{1}{h}$.

Modifikovaná Eulerova metoda (Runge-Kuttova metoda 2. řádu)

– vztah $y' = f(x, y(x))$ opět zintegrujeme přes interval $\langle x_k, x_{k+1}\rangle$

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x)\, dx = \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x))\, dx$$

$$y(x_{k+1}) - y(x_k) = \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x))\, dx$$

– použijeme obdélníkové pravidlo

$$y(x_{k+1}) - y(x_k) = h \cdot f\Big(x_k + \frac{h}{2}, y(x_k + \frac{h}{2})\Big) + \underbrace{O(h^3)}_{\substack{\text{viz chyba} \\ \text{obd. pr.}}}$$

– hodnotu $y(x_k + \frac{h}{2})$ určíme pomocí Eulerovy metody

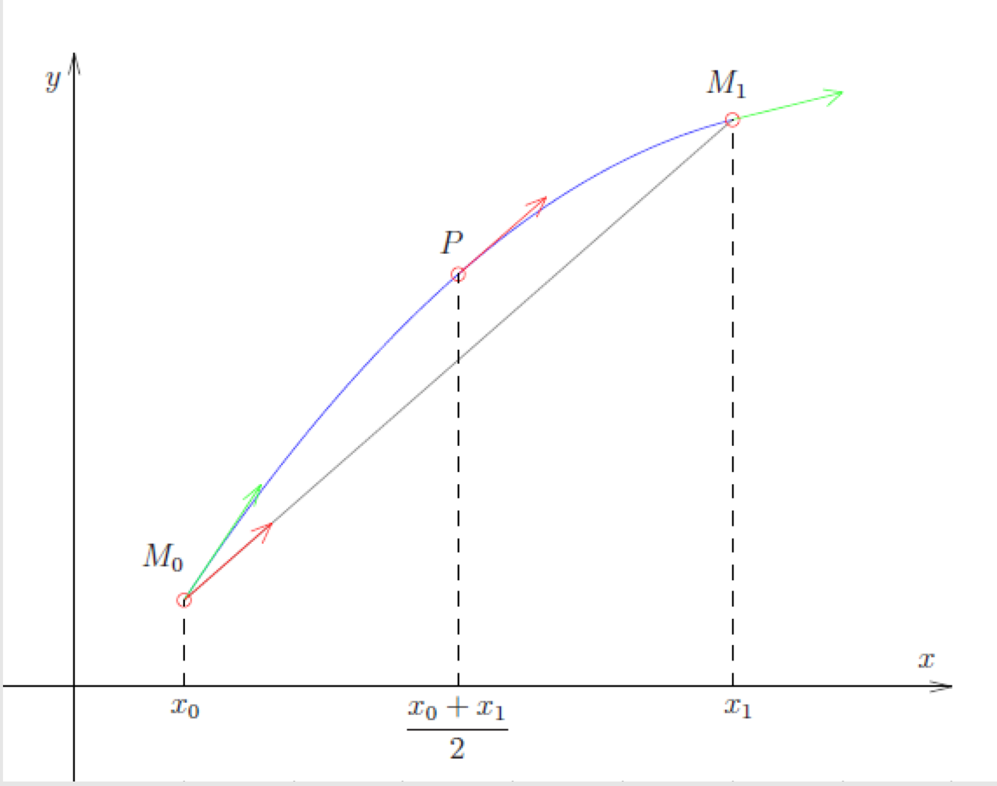
$$y(x_k + \frac{h}{2}) = y(x_k) + \frac{h}{2}\, f(x_k, y(x_k)) + O(h^2)$$

– dostáváme metodu ve tvaru

$$\boxed{\begin{aligned} y_{k+\frac{1}{2}} &= y_k + \frac{h}{2}\, f(x_k, y_k) \\ y_{k+1} &= y_k + h\, f(x_k + \frac{h}{2}, y_{k+\frac{1}{2}}) \end{aligned}}$$

Poznámka: Lokální diskretizační chyba je opět $d_k = O(h^3)$. Globální chyba je potom o řád nižší, tj. $e_k = O(h^2)$, protože chyba metody se zvětšuje lineárně s počtem kroků $k \sim \dfrac{1}{h}$.

Ukažme si jiné odvození předchozích dvou Runge-Kuttových metod 2. řádu.
Odvození vychází z geometrické interpretace.



Věta

Nechť oblouk $M_0\,M_1$ je částí paraboly. Potom platí:

1. Tečna v bodě P je rovnoběžná s tětivou $M_0\,M_1$.

2. Směrnice tětivy $M_0\,M_1$ je aritmetickým průměrem směrnic tečen v M_1 a M_2.

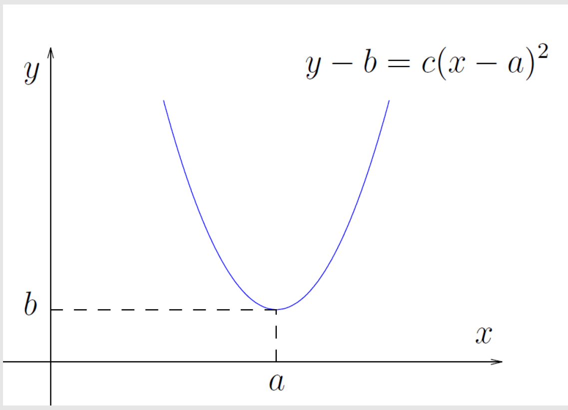
<u>Důkaz:</u>

Rovnice paraboly (polynomu 2.stupně): $y - b = c(x-a)^2$

$$y = c(x-a)^2 + b$$

$$\Rightarrow$$

$$y' = 2c(x-a)$$



1. Směrnice tečny v bodě P:

$$y'\Big(\frac{x_0+x_1}{2}\Big) = 2c\Big(\frac{x_0+x_1}{2} - a\Big) = \underline{\underline{c(x_0+x_1-2a)}}$$

Směrnice tětivy $M_0 M_1$ je:

$$\frac{y(x_1)-y(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{c(x_1-a)^2+b-c(x_0-a)^2-b}{x_1-x_0}=$$
$$=\frac{cx_1^2-2acx_1+a^2c+b-cx_0^2+2acx_0-a^2c-b}{x_1-x_0}=$$
$$=c\left(\frac{x_1^2-x_0^2-2a(x_1-x_0)}{x_1-x_0}\right)=\underline{\underline{c(x_1+x_0-2a)}}.$$

2. Směrnice tečny v bodě M_0 je:

$$y'(x_0)=2c(x_0-a)$$

Směrnice tečny v bodě M_1 je:

$$y'(x_1)=2c(x_1-a)$$

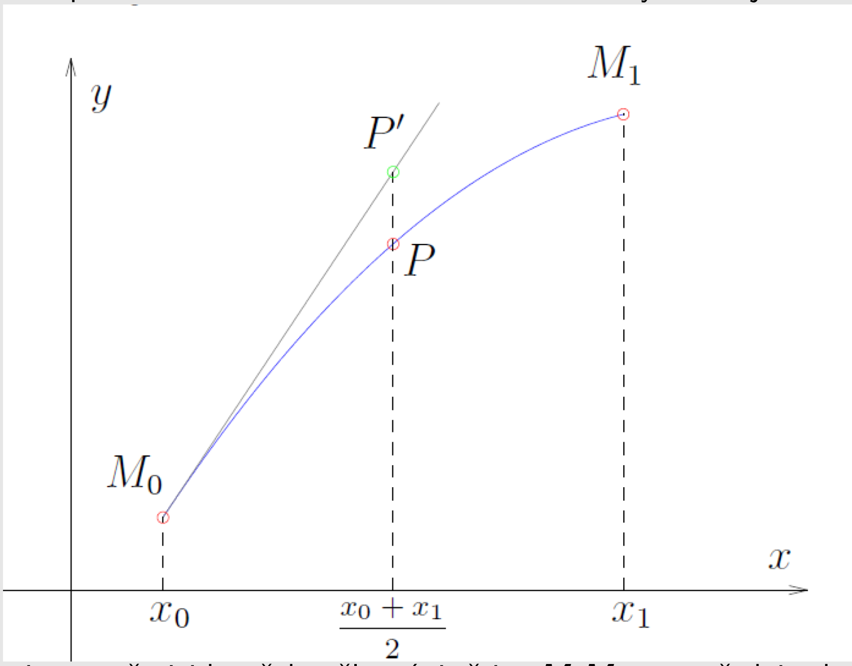
Jejich aritmetický průměr:

$$\frac{y'(x_0)+y'(x_1)}{2}=\frac{2c(x_0-a)+2c(x_1-a)}{2}=$$
$$=c(x_0-a+x_1-a)=\underline{\underline{c(x_0+x_1-2a)}}.$$

□

Nyní použijeme vlastnost 1.

Známe souřadnice bodu M_0. Jestliže bychom znali y-souřadnici bodu P, pak stačí udělat tečnu a bodem M_0 vést rovnoběžku a dostaneme y-souřadnici bodu M_1. My ale y-souřadnici bodu P neznáme, takže ji vyjádříme přibližně. Bod P nahradíme bodem P', který má stejnou x-ovou souřadnici a leží na tečně k M_0.



P' má souřadnice:

$$\left[x_0+\frac{h_0}{2}, y_0+\frac{h_0}{2}\cdot\underbrace{f(x_0,y_0)}_{y_0'(x_0)}\right]$$

Tečna v bodě P' má směrnici:

$y'(x_0+\frac{h_0}{2})$, tj.

$$y'(x_0+\frac{h_0}{2})=$$
$$f(x_0+\frac{h_0}{2}, y_0+\frac{h_0}{2}\cdot\overbrace{f(x_0,y_0)}^{k_1}).$$

Stejnou směrnici by však měla mít i tětiva M_0M_1 $\Rightarrow$ souřadnice bodu M_1 jsou:

$$x_1=x_0+h_0$$

$$y_1=y_0+h_0\cdot\overbrace{y'(x_0+\frac{h_0}{2})}^{k_2}$$

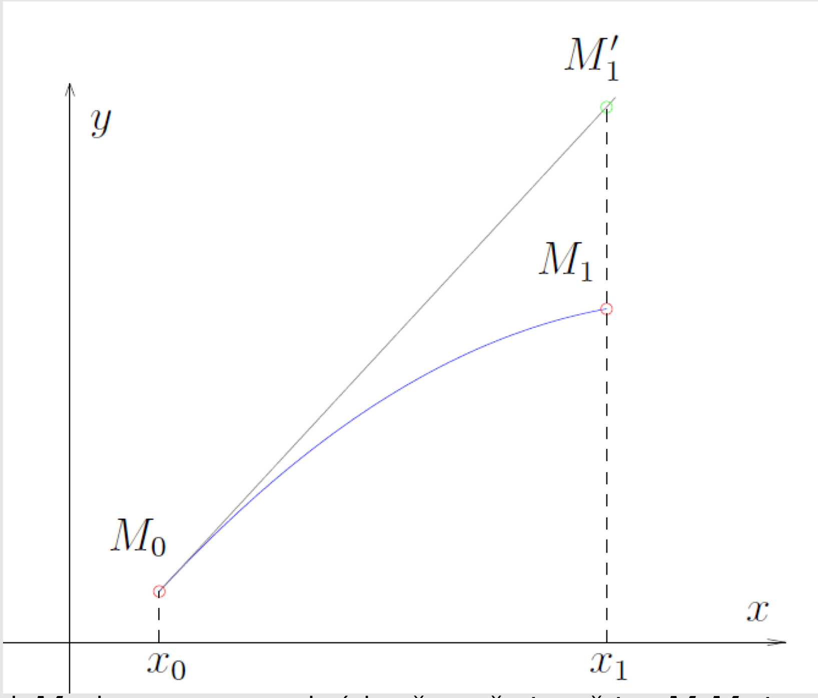
Tyto vztahy lze přepsat do tvaru (obecně)

$$\boxed{\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k) \\ k_2 &= f(x_k + \frac{h_k}{2}, y_k + \frac{h_k}{2} \cdot k_1) \\ y_{k+1} &= y_k + h_k \cdot k_2 \end{aligned}}$$

modifikovaná Eulerova metoda

<u>Nyní použijeme vlastnost 2.</u>

Známe souřadnice bodu M_0. Protože neznáme y-souřadnici bodu M_1, nahradíme ho bodem M_1', který má stejnou x-souřadnici a leží na tečně procházející bodem M_0.



M_1' má souřadnice:

$$\Big[\underbrace{x_0 + h_0}_{=x_1}, y_0 + h_0 \cdot \overbrace{\underbrace{f(x_0, y_0)}_{=y'(x_0)}}^{\overset{\text{ozn.}}{=} k_1}\Big]$$

Směrnice tečny v M_1' je:

$$\overbrace{f(x_0 + h_0, y_0 + h_0 \cdot f(x_0, y_0))}^{\overset{\text{ozn.}}{=} k_2}$$

Bod M_1 dostaneme z podmínky, že směrnice tětivy M_0M_1 je aritmetickým průměrem směrnic tečen v M_0 a M_1', tj.

M_1' má souřadnice:

$$x_1 = x_0 + h_0$$

$$y_1 = y_0 + h_0 \cdot \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

Obecně:

$$\boxed{\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k) \\ k_2 &= f(x_k + h_k, y_k + h_k \cdot k_1) \\ y_{k+1} &= y_k + h_k \cdot \frac{(k_1 + k_2)}{2} \end{aligned}}$$

Heunova metoda

<u>Poznámka:</u> Obě tyto metody jsou 2.řádu (aproximovali jsme parabolou).

Klasická Runge-Kuttova metodu 4. řádu

– jedna z nejvíce používaných metod tohoto typu
– předpis metody:

$$\boxed{\begin{aligned}
k_1 &= f(x_k, y_k)\\
k_2 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}\cdot k_1)\\
k_3 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}\cdot k_2)\\
k_4 &= f(x_k + h, y_k + h\cdot k_3)\\
y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{6}\cdot(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}}$$

Poznámka: Lokální diskretizační chyba, tj. chyba jednoho kroku metody, je $d_k = O(h^5)$. Globální chyba je potom o řád nižší, tj. $e_k = O(h^4)$, protože chyba metody se zvětšuje lineárně s počtem kroků $k \sim \frac{1}{h}$.

Příklad

Pomocí **Heunovy metody**, **modifikované Eulerovy metody** a **klasické Runge-Kuttovy metody 4. řádu** řešte následující úlohu na intervalu $\langle 0; 0,6\rangle$ s konstantním krokem $h = 0,2$

$$\boxed{\begin{aligned} y' &= x - y,\\ y(0) &= 1\end{aligned}}.$$

Řešení:

(Přesné řešení: $y(x) = 2e^{-x} + x - 1$).

Předpis pro **Heunovu metodu**:

$$\boxed{\begin{aligned}
k_1 &= f(x_k, y_k)\\
k_2 &= f(x_k + h, y_k + h\cdot k_1)\\
y_{k+1} &= y_k + h\cdot\frac{k_1 + k_2}{2}
\end{aligned}}$$

x_k	$y(x_k)$	y_k	k_1	k_2	$h\cdot\frac{k_1+k_2}{2}$	e_k
0	1,000	1,000	-1,000	-0,600	-0.160	0,000
0,2	0,837	0,840	-0,640	-0,312	-0.095	-0,003
0,4	0,741	0,745	-0,345	-0,076	-0.042	-0,004
0,6	0,698	0,703				-0,005

Předpis pro **modifikovanou Eulerovu metodu**:

$$\boxed{\begin{aligned}
k_1 &= f(x_k, y_k)\\
k_2 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}\cdot k_1)\\
y_{k+1} &= y_k + h\cdot k_2
\end{aligned}}$$

x_k	$y(x_k)$	y_k	k_1	k_2	$h \cdot k_2$	e_k
0	1,000	1,000	-1,000	-0,800	-0.160	0,000
0,2	0,837	0,840	-0,640	-0,476	-0.095	-0,003
0,4	0,741	0,745	-0,345	-0,210	-0.042	-0,004
0,6	0,698	0,703				-0,005

Poznámka:

Vidíme, že výsledky Heunovy i modifikované Eulerovy metody odpovídají výsledkům získaným metodou Taylorova typu 2. řádu (uvedené metody jsou 2. řádu).

Předpis pro **klasickou Runge-Kuttovu metodu 4. řádu**:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&k_1 = f(x_k, y_k)\\
&k_2 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} \cdot k_1)\\
&k_3 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} \cdot k_2)\\
&k_4 = f(x_k + h, y_k + h \cdot k_3)\\
&y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}
}
$$

x_k	$y(x_k)$	y_k	k_1	k_2	k_3	k_4	e_k
0	1.00000000	1,00000000	-1,000000	-0,800000	-0.820000	-0.636000	0,00000000
0,2	0.83746150	0.83746666	-0.637466	-0.473720	-0.490094	-0.339447	0.00000516
0,4	0.74064009	0.74064854	-0.340648	-0.206583	-0.219990	-0.096650	0.00000845
0,6	0.69762327	0.69763364					0.00001037

Několik otázek k zamyšlení:

1. Uveďte příklad počáteční úlohy pro obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu (s nenulovým řešením), pro kterou budou výsledky **Eulerovy metody** totožné s výsledky **metody Taylorova typu 2. řádu**.

2. Uveďte příklad počáteční úlohy pro obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu (s nenulovým řešením), pro kterou bude **metoda Taylorova typu 2. řádu** totožná s **metodou Taylorova typu 3. řádu**, ale různá od **Eulerovy metody**.

3. Uveďte příklad počáteční úlohy pro obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu (s nenulovým řešením), pro kterou bude **modifikovaná Eulerova metoda** totožná s **Heunovou metodou**, ale různá od **Eulerovy metody**.