OBECNÁ JEDNOKROKOVÁ METODA

„Na minulé přednášce jsme si uvedli jednu metodu → Eulerovu metodu, jednalo se o nejjednodušší jednokrokovou metodu"

Eulerova metoda je velmi jednoduchá, ale k dosažení malé přesnosti musíme volit velmi malé kroky h_k.

Jiné řešení – zříci se linearity vzhledem ke kroku h_k

$$y_{k+1} = \cancel{y_k + h_k f(x_k, y_k)}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + \Phi(x_k, y_k, h_k, f)}$$

- ~~Metody Taylorova typu~~

Hodnotu $y(x_{k+1})$ aproximujeme pomocí Taylorova rozvoje vyššího řádu

$$\boxed{y(x_{k+1}) = y(x_k) + h\, y'(x_k) + \frac{1}{2} h^2 y''(x_k) + \ldots + \frac{1}{p!} h^p y^{(p)}(x_k) + \cancel{\frac{1}{(p+1)!} h^{p+1} y^{(p+1)}(\xi_k)}}, \quad \xi_k \in (x_k, x_{k+1})$$

je třeba dosadit za derivace y:

$$y' = f(x, y(x))$$

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = f_x + f_y \cdot f \overset{\text{ozn}}{=} f^{(1)}(x, y)$$

$$y''' = f_{xx} + f_{xy} \cdot f + (f_{yx} + f_{yy} f) \cdot f + f_y \cdot (f_x + f_y \cdot f) \overset{\text{ozn}}{=} f^{(2)}(x, y)$$

Obecně lze psát:

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k) + \frac{h^2}{2} f^{(1)}(x_k, y_k) + \ldots + \frac{h^p}{p!} f^{(p-1)}(x_k, y_k)}$$

Pozn: metody Taylorova typu se v praxi nepoužívají právě z důvodu vyjadřování derivací y'', y'''...

- **Metody Runge-Kuttova typu**

podobný přístup jako u metod Taylorova typu, ale není třeba vyjadřovat derivace $y'', y''', \dots$
Hledaná aproximace je kombinací několika hodnot funkce f ve strategicky volených bodech z intervalu $\langle x_k, x_{k+1} \rangle$.

Pozn: Těchto metod existuje velké množství!

I. $\boxed{\text{Heunova metoda}}$ (RK metoda 2. řádu)

- vztah $y' = f(x, y(x))$ integrujeme přes interval $\langle x_k, x_{k+1} \rangle$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x)\,dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x))\,dx$$

$$y(x_{k+1}) - y(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x))\,dx$$

- Použijeme lichoběžníkové pravidlo

$$y(x_{k+1}) - y(x_k) = \frac{h}{2}\left[f(x_k, y(x_k)) + f(x_{k+1}, \underline{y(x_{k+1})})\right] + \underline{O(h^3)}$$

(viz chyba lich. pravidla)

- Na pravé straně vystupuje hodnota $y(x_{k+1})$. Její aproximaci vrátíme pomocí Eulerovy metody

$$\bar{y}(x_{k+1}) = y(x_k) + h f(x_k, y(x_k)) + O(h^2)$$

→ Dostaneme metodu ve tvaru:

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{y}_{k+1} &= y_k + h f(x_k, y_k) \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \bar{y}_{k+1})\right] \end{aligned}}$$

Pozn.: Lokální diskretizační chyba $d_k = O(h^3)$

II. $\boxed{\text{Modifikovaná Eulerova metoda}}$ (RK metoda 2 řádu)

- vztah $y' = f(x, y(x))$ opět zintegrujeme na $\langle x_k, x_{k+1} \rangle$

$$y(x_{k+1}) - y(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x))\,dx$$

- použijeme obdélníkové pravidlo

$$y(x_{k+1}) - y(x_k) = h \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2}, y\left(x_k + \frac{h}{2}\right)\right) + \underline{O(h^3)}$$

- hodnotu $y(x_k + \frac{h}{2})$ určíme pomocí Eulerovy metody

$$y\left(x_k + \frac{h}{2}\right) = y(x_k) + \frac{h}{2} f(x_k, y(x_k)) + O(h^2)$$

→ Dostaneme metodu ve tvaru:

$$\boxed{\begin{aligned} y_{k+\frac{1}{2}} &= y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k) \\ y_{k+1} &= y_k + h f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_{k+\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}}$$

Pozn.: Lokální diskretizační chyba je opět $d_k = O(h^3)$

III. $\boxed{\text{Klasická Runge-Kuttova metoda čtvrtého řádu}}$

- jedna z nejvíce používaných metod tohoto typu

$$\boxed{\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k) \\ k_2 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} k_1\right) \\ k_3 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} k_2\right) \\ k_4 &= f(x_k + h, y_k + h \cdot k_3) \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}}$$

Pozn.: Lokální diskretizační chyba, tj. chyba jednoho kroku metody je $d_k = O(h^5)$. Globální chyba je potom o řád nižší, tj. $e_k = O(h^4)$, protože chyba metody se rovnoměrně lineárně s počtem kroků $K \sim \frac{1}{h}$.

VÍCEKROKOVÉ METODY

V případě jednokrokových metod vystupovaly ve formuli pouze hodnoty y_k, y_{k+1}.

V případě vícekrokových metod vypočítáváme hodnotu y_{k+1} pomocí hodnot

$$y_{k-m}, y_{k-m+1}, \dots y_{k-1}, y_k, (y_{k+1})$$

Pozn.: Pokud nepoužijeme hodnotu y_{k+1}, jedná se o explicitní metody, v opačném případě mluvíme o implicitních metodách.

Opět vyjdeme z rovnosti:

$$\boxed{y' = f(x, y(x))}$$

Musí tedy platit i rovnost integrálů

$$\boxed{\int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x)\,dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x))\,dx}$$

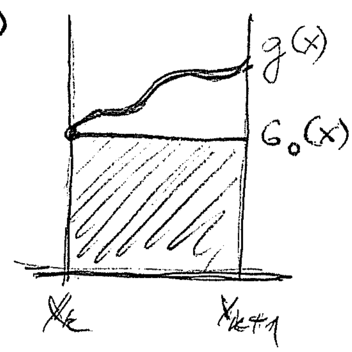
Tedy:

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \underbrace{f(x, y(x))}_{\overset{\text{ozn}}{=}\ g(x)} dx$$

Dále postupujeme tak, že funkci $g(x)$ aproximujeme interpolačním polynomem $G_n(x)$, který integrujeme přesně.

1/ $\underline{n=0}$, tj. funkci $g(x)$ aproximujeme <u>konstantní funkcí</u> $G_0(x)$

a)



$$\boxed{G_0(x) = g(x_k)} \quad x \in \langle x_k, x_{k+1} \rangle$$

Dostaneme:

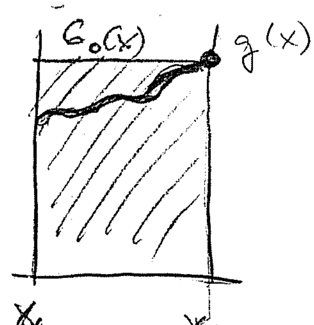
$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} G_0(x)\,dx$$

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot g(x_k)$$

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)}$$ Eulerova metoda

(explicitní jednokroková metoda řád 1.)

b)



$$\boxed{G_0(x) = g(x_{k+1})} \quad x \in (x_k, x_{k+1} \rangle$$

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot g(x_{k+1})$$

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_{k+1}, y_{k+1})}$$ Implicitní Eulerova metoda

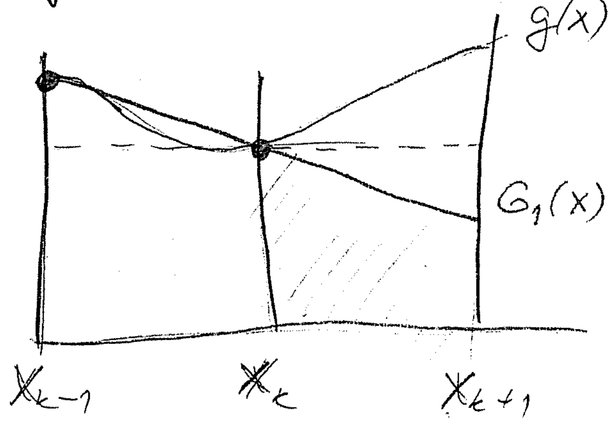
(implicitní jednokroková metoda řád 1)

Pozn: při použití implicitní metody je třeba zvolit poč. aproximaci $y_{k+1}^{(0)}$ a dále realizovat iterační proces

$$\boxed{y_{k+1}^{[l+1]} = y_k + h f(x_{k+1}, y_{k+1}^{[l]})}$$

2) <u>$n=1$</u>, tj. funkci $g(x)$ aproximujeme <u>lineární funkcí $G_1(x)$</u>

a)



$$\boxed{G_1(x) = g(x_k) + \frac{g(x_k)-g(x_{k-1})}{h}\cdot(x-x_k)}$$

$x \in (x_k, x_{k+1})$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} G_1(x)\,dx = g(x_k)\cdot h + \frac{h}{2}\left[g(x_k)-g(x_{k-1})\right] =$$

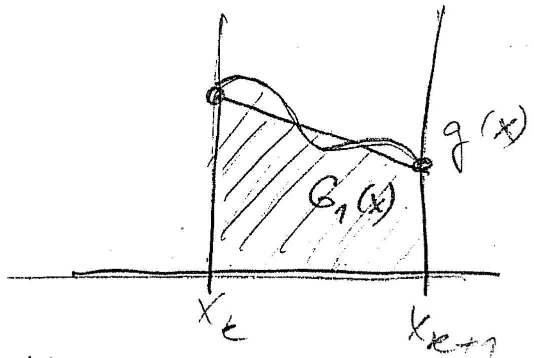
$$= \frac{h}{2}\left[3g(x_k) - g(x_{k-1})\right]$$

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[3f(x_k, y_k) - f(x_{k-1}, y_{k-1})\right]}$$

explicitní dvoukroková metoda, druhý řád

<u>Adams–Bashforthova metoda</u>

b)



$$\boxed{G_1(x) = g(x_k) + \frac{g(x_{k+1})-g(x_k)}{h}(x-x_k)}$$

$x \in (x_k, x_{k+1})$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} G_1(x)\,dx = g(x_k)\cdot h + \frac{h}{2}\left[g(x_{k+1})-g(x_k)\right] =$$

$$= \frac{h}{2}\cdot\left[g(x_k) + g(x_{k+1})\right]$$

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\right]}$$

implicitní jednokroková metoda, řád 2

<u>Adams–Moultonova metoda</u>

Poznámky:

(i) u n-krokových metod je třeba znát n-hodnot

$$y_{k-n+1}, y_{k-n}, \dots, y_k$$

na začátku výpočtu však tyto hodnoty, tj. $y_1, \dots, y_{n-1}$ nejsou známy.

Pro jejich výpočet je třeba užít explicitní jednokrokové metody odpovídajícího řádu (~~tj. o 1 menšího~~)

(ii) u implicitních metod je třeba určit aproximaci $y_{k+1}^{[0]}$ a realizovat metodu prosté iterace

$$y_{k+1}^{[l+1]} = y_k + \dots \; y_{k+1}^{[l]}$$

Více- (i jedno-) krokové metody lze obecně zapsat ve tvaru

$$\boxed{\sum_{j=0}^{r} \alpha_j y_{k+j} = h \cdot \sum_{j=0}^{r} \beta_j \underbrace{f(x_{k+j}, y_{k+j})}_{=f_{k+j}}}$$

viz 2a) $\boxed{y_{k+2} - y_{k+1} = h\left[\frac{3}{2} f(x_{k+1}, y_{k+1}) - \frac{1}{2} f(x_k, y_k)\right]}$ $(k := k+1$

$\alpha_0 = 0$ $\qquad$ $\beta_0 = -\frac{1}{2}$

$\alpha_1 = -1$ $\qquad$ $\beta_1 = \frac{3}{2}$

$\alpha_2 = 1$ $\qquad$ $\beta_2 = 0$

př. 2b $\quad y_{k+1} = y_k + h\left[\dfrac{f(x_k, y_k)}{2} + \dfrac{f(x_{k+1}, y_{k+1})}{2}\right]$

$$\alpha_0 = -1 \qquad \beta_0 = \tfrac{1}{2}$$
$$\alpha_1 = 1 \qquad \beta_1 = \tfrac{1}{2}$$

Definice <u>Lokální diskretizační chyba</u> metody rozumíme

$$\boxed{\tau_k = \frac{1}{h}\left[\sum_{j=0}^{r} \alpha_j\, y(x_{k+j}) - h\sum_{j=0}^{r} \beta_j\, y'(x_{k+j})\right]}$$

Řekneme, že metoda je <u>konzistentní</u>, je-li splněna podmínka

$$\boxed{\tau_k(h) \to 0 \quad \text{pro } h \to 0}$$

Použijeme-li Taylorův rozvoj, dostaneme

$$y(x_{k+j}) = y(x_k) + jh\,y'(x_k) + \tfrac{1}{2}(jh)^2 y''(x_k) + \ldots$$
$$y'(x_{k+j}) = y'(x_k) + jh\,y''(x_k) + \tfrac{1}{2}(jh)^2 y'''(x_k) + \ldots$$

Dostaneme:

$$\tau_k = \frac{1}{h}\left(\sum_{j=0}^{r} \alpha_j\right) y(x_k) + \left[\sum_{j=0}^{r} (j\alpha_j - \beta_j)\right] \cdot y'(x_k) +$$
$$+ h\cdot[\ \ldots\ ] + h^2\cdot[\ \ldots\ ] \ldots$$

Věta Metoda je konzistentní, platí-li

$$\boxed{\sum_{j=0}^{r} \alpha_j = 0} \quad \text{a} \quad \boxed{\sum_{j=0,1}^{r} j\alpha_j = \sum_{j=0}^{r} \beta_j}$$

<u>Dcv</u>: Ukažte, že metody z 2a) a 2b) jsou konzistentní.
1a) a 1b)

Definice

Polynomy v proměnných v a w ve tvaru

$$\boxed{\rho(v) = \sum_{j=0}^{r} \alpha_j v^j} \quad \text{a} \quad \boxed{\sigma(w) = \sum_{j=0}^{r} \beta_j w^j}$$

nazýváme <u>charakteristické polynomy</u> metody.

<u>Pozn</u>: Metoda je konzistentní, platí-li

$$\boxed{\rho(1) = 0} \quad \text{a} \quad \boxed{\rho'(1) = \sigma(1)}$$

<u>nestabilita</u>: zaokrouhlovací chyby vnáší do výsledku chybu, jejíž vliv zesiluje až celý výpočet „přehluší"

<u>příčiny</u>
- špatná podmíněnost úlohy (nezávisí na volbě metody)
- nevhodná metoda nebo příliš velký krok

KONVERGENCE A D-STABILITA

(v literatuře D-stabilita = 0-stabilita; stabilní pro $h \to 0$ podle Dahlquista)

Definice Mějme dánu počáteční úlohu s lipschitzovskou funkcí f:

$$\boxed{\begin{aligned} y' &= f(x,y), \quad x \in (0,T\rangle \\ y(0) &= \eta. \end{aligned}}$$

Řekneme, že metoda je <u>konvergentní</u>, když platí

$$\boxed{\lim_{\substack{h \to 0 \\ Nh = T}} y_N = y(T)}$$

a

$$\lim_{h \to 0} y_k = \eta \quad \text{pro } k = 0, 1, \dots r-1$$

pro každé pevné T.

„metoda je konvergentní, jestliže přibližné řešení konverguje k přesnému pro $h \to 0$"

uvažujeme r-krokovou metodu

Globální chybou metody budeme rozumět

$$\boxed{E_k = y(x_k) - y_k \quad \text{pro} \quad k = 0, 1, \dots N}$$

Pozn.: Je zřejmé, že nutnou podmínkou konvergence je konzistence metody. Je podmínkou i postačující?

Věta: Uvažujme úlohu
$$\boxed{\begin{aligned} &y' = \lambda y \quad x \in (0, T\rangle \\ &y(0) = \eta \end{aligned}}$$
Eulerova metoda pro tuto úlohu je konvergentní.

Důkaz:

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h\overbrace{\lambda y(x_k)}^{=y'(x_k)} + h \cdot \tau_k$$

$$y_{k+1} = y_k + h\lambda y_k$$

$$y(x_{k+1}) - y_{k+1} = y(x_k) - y_k + h\lambda\left[y(x_k) - y_k\right] + h\tau_k$$

$$\boxed{E_{k+1} = E_k(1 + h\lambda) + h\tau_k}$$

$\downarrow$ po dosazování

Obecně lze psát:

$$\boxed{E_k = (1 + h\lambda)^k E_0 + h\sum_{m=1}^{k} (1 + h\lambda)^{k-m} \tau_{m-1}}$$

Dále platí: $|1 + h\lambda| \leq e^{h|\lambda|}$ (z Taylorova rozvoje e^x)

a tedy $(1 + h\lambda)^{k-m} \leq e^{(k-m)h|\lambda|} \leq e^{kh|\lambda|} \leq e^{T|\lambda|}$

Potom

$$|E_k| \leq e^{|\lambda|T}\Big[\underbrace{|E_0|}_{=0} + \underbrace{h \cdot k \cdot \max_{1 \leq m \leq k} |\tau_{m-1}|}_{\to 0}\Big]$$

0 pro $h \to 0$ protože je Eulerova metoda konzistentní

__Věta__ Uvažujme úlohu
$$\boxed{\begin{aligned} y' &= f(x,y), \quad x \in (0, T\rangle \\ y(0) &= \eta \end{aligned}}$$
s lipschitzovskou funkcí f
__Eulerova metoda__ pro tuto úlohu je __konvergentní__

__Důkaz:__
Platí:
$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h f(x_k, y(x_k)) + h \tau_k$$
$$y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k)$$

$$\underbrace{y(x_{k+1}) - y_{k+1}}_{E_{k+1}} = \underbrace{y(x_k) - y_k}_{E_k} + h \left[f(x_k, y(x_k)) - f(x_k, y_k) \right] + h \tau_k$$

Funkce f je __lipschitzovsky spojitá__:
$$|f(x_k, y(x_k)) - f(x_k, y_k)| \leq L \cdot |y(x_k) - y_k| \quad \forall x_k \in \langle 0, T\rangle$$

Pak lze psát:
$$|E_{k+1}| \leq |E_k| + h \cdot L \cdot |E_k| + h |\tau_k|$$

Dále je důkaz stejný ($|\lambda| = L$)
$$|E_k| \leq e^{LT} \Big[\underbrace{|E_0|}_{=0} + h k \cdot \max_{1 \leq m \leq k} \underbrace{|\tau_{m-1}|}_{\to\, 0 \;\; h \to 0} \Big]$$

∎

Konvergence vícekrokových metod

Příklad: Uvažujme vícekrokovou metodu ve tvaru

$$\boxed{y_{k+2} = 3y_{k+1} - 2y_k - hf(x_k, y_k)}$$

Obecný zápis byl

$$\sum_{j=0}^{2} \alpha_j y_{k+j} = h \sum_{j=0}^{2} \beta_j f(x_{k+j}, y_{k+j})$$

Platí:

$$\alpha_0 = 2 \qquad \beta_0 = -1$$
$$\alpha_1 = -3 \qquad \beta_1 = 0$$
$$\alpha_2 = 1 \qquad \beta_2 = 0$$

$$\sum_{j=0}^{2} \alpha_j = 0 \qquad \sum_{j=0}^{2} \beta_j = -1 \overset{?}{=} 0.\alpha_0 + 1.\alpha_1 + 2.\alpha_2$$
$$= 0 + (-3) + 2$$
$$= -1$$

$\Rightarrow$ metoda je konzistentní

Touto metodou budeme řešit počáteční úlohu

$$\boxed{\begin{aligned} y' &= 0 \\ y(0) &= 0 \end{aligned}}$$

Pro tuto úlohu má metoda tvar

$$\boxed{y_{k+2} = 3y_{k+1} - 2y_k}$$

Obecně bu psál:

$$\boxed{y_k = 2y_0 - y_1 + 2^k (y_1 - y_0)}$$

DK: Dov. úplnou mat. indukcí

1/ $k = 2,\ k = 3$

2/ $\left.\begin{aligned} y_k &= 2y_0 - y_1 + 2^k (y_1 - y_0) \\ y_{k+1} &= 2y_0 - y_1 + 2^{k+1} (y_1 - y_0) \end{aligned}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} y_{k+2} = 2y_0 - y_1 + 2^{k+2} (y_1 - y_0)$

<u>Problém</u>: Pokud $y_1 = y_0 = y(0) = 0 \Rightarrow \underline{y_k = 0, \forall k}$

Pokud y_1 se bude lišit (i když velmi málo) od 0, pak pro $k \to \infty$: $y_k \to \infty$. ↯

Považujeme-li rovnost

$$y_{k+2} = 3y_{k+1} - 2y_k$$

za diferenční rovnici, můžeme ji řešit.

Předpokládáme, že $y_k = c \cdot r^k$. Pak lze psát

$$c r^{k+2} = 3 c r^{k+1} - 2 c r^k$$

$$c r^2 = 3 c r - 2c$$

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} < \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$$

$$y_k = c_1 2^k + c_2$$

Dále víme, že pro $k=0$: $y_0 = c_1 + c_2$

$k=1$: $\underline{y_1 = 2c_1 + c_2}$

$$\Rightarrow c_1 = y_1 - y_0$$

$$c_2 = y_0 - c_1 = y_0 - y_1 + y_0 = 2y_0 - y_1$$

$$\boxed{y_k = (y_1 - y_0)\cdot 2^k + 2y_0 - y_1}$$

$$y_k = (y_1 - y_0)\underset{r_1}{2^k} + (2y_0 - y_1)\underset{r_2}{1^k}$$

Připomeňme, že vícekrokovou metodu jsme zapisovali ve tvaru

$$\boxed{\sum_{j=0}^{r} \alpha_j y_{k+j} = h \sum_{j=0}^{r} \beta_j f(x_{k+j}, y_{k+j})}$$

a charakteristické polynomy jsme definovali

$$\boxed{\rho(w) = \sum_{j=0}^{r} \alpha_j w_j} \quad a \quad \boxed{\sigma(w) = \sum_{j=0}^{r} \beta_j w_j}$$

O stabilitě výpočtu rozhodují kořeny polynomu $\rho(w)$.
Pro kořeny $\overline{w_j}$ polynomu $\rho(w)$ musí platit

$$\boxed{|\overline{w_j}| \leq 1.}$$

Definice

Řekneme, že metoda je <u>D-stabilní</u>, pokud kořeny charakteristického polynomu $\rho(w)$ splňují podmínky:

(i) $|\overline{w_j}| \leq 1$ pro $j = 1, 2, \ldots, r$,

(ii) je-li $\overline{w_j}$ násobný kořen, potom $|\overline{w_j}| < 1$.

Věta Je-li metoda konzistentní a D-stabilní, pak je konvergentní

<u>Pozn.</u>:

(i) je-li metoda D-stabilní, nebude v průběhu výpočtu zaokrouhlená ovlivňovat jednokrokovou chybu.

(ii) Uvažujeme-li Eulerovu metodu

$$y_{k+1} - y_k = h f(x_k, y_k)$$

$$\rho(w) = w - 1 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\overline{w} = 1}}$$

$\Rightarrow$ Eulerova metoda je D-stabilní.

Odhad chyby metodou polovičního kroku

pro globální chybu metody lze psát

$$\boxed{\underset{\text{přesné}}{y(x)} = y(x,h) + \underbrace{E_h}_{Ch^p} + \underbrace{F_h}_{O(h^r)\ r>p}} \qquad (\bullet)$$

$$y(x,h) = y_k(h) \quad x \in \langle x_k, x_{k+1}\rangle, \quad k=0,1,\dots N-1$$

pro poloviční krok

$$\boxed{y(x) = y(x,\tfrac{h}{2}) + E_{\frac{h}{2}} + F_{\frac{h}{2}}} \qquad (\bullet\bullet)$$

$$0 = y(x,h) - y(x,\tfrac{h}{2}) + E_h - E_{\frac{h}{2}} + \dots \qquad (\bullet) - (\bullet\bullet)$$

$$0 \approx y(x,h) - y(x,\tfrac{h}{2}) + (2^p - 1) E_{\frac{h}{2}}$$

$$\boxed{E_{\frac{h}{2}} \approx \frac{y(x,\frac{h}{2}) - y(x,h)}{2^p - 1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) \approx y(x,\tfrac{h}{2}) + E_{\frac{h}{2}}}$$

Pozn: Opět lze použít Richardsonovu extrapolaci

- aktivní extrapolace
  - extrapolaci provádíme v každém kroku (extrapolované y_k použijeme pro výpočet y_{k+1})
- pasivní extrapolace

  vypočteme y_k, $k=0,1,\dots N-1$ s různými parametry h. Potom provedeme extrapolaci.

Algoritmus prediktor-korektor

Poznámka: Jde o obecné schéma výpočtu.

Princip: Předpokládejme, že máme dostatečně přesně vypočítány hodnoty $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$ nějakou explicitní metodou.

Nyní chceme počítat y_k.

1) nejprve nějakou <u>explicitní</u> metodou určíme nultou iteraci $y_k^{[0]}$ jako vstupní hodnotu pro další výpočet (PREDIKTOR).

2) vypočteme hodnotu pravé strany $F_k^{[s]} = f(x_k, y_k^{[s]})$.

3) vypočteme lepší aproximaci $y_k^{[s+1]}$ pomocí nějaké <u>implicitní</u> metody s využitím $F_k^{[s]} =: f_k$ (KOREKTOR).

Pomocí kroků **2)** a **3)** určíme N iterací $y_k^{[1]}, y_k^{[2]}, \ldots, y_k^{[N]}$ (N – dáno).

Na závěr přiřadíme $y_k = y_k^{[N]}$.

Stejný postup opakujeme pro $y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots$.

Poznámka: Dané schéma lze použít na různé metody. Je žádoucí použít explicitní a implicitní metodu stejného řádu (nebo o 1 menší) (pro zachování přesnosti). Volba konkrétních metod je na nás.

Poznámka: Označíme-li operaci:

a) P ... prediktor
b) E ... vyčíslení (*evaluation*)
c) C ... korektor

Můžeme toto schéma zapsat ve tvaru:

$P(EC)^N$ případně $P(EC)^N E$, vyčíslujeme-li ještě $F_k = f(x_k, y_k^{[N]})$ (což je lepší). Dostaneme pak různé varianty tohoto schématu:

$$
\begin{array}{lcl}
PEC & , & PECE \\
P(EC)^2 & , & P(EC)^2E \\
P(EC)^3 & , & P(EC)^3E \\
\vdots & , & \vdots
\end{array}
$$

Odhad chyby pomocí algoritmu prediktor – korektor

Za předpokladu, že hodnota derivace $y^{(p+1)}$, kde p je řád metody, se příliš nemění, lze odvodit odhad pro lokální chybu algoritmu

$$\boxed{d_k \approx \frac{C^{c}_{p+1}}{C^{p}_{p+1} - C^{c}_{p+1}} \left(y^{c}_{k+1} - y^{p}_{k+1} \right)}$$

konstanty lokální chyby

tj. $d_k = C_{p+1} h^{p+1} y^{(p+1)}(x_k)$

vypočteno korektorem

vypočteno prediktorem

Podmíněnost a stabilita

Příklad: řešme poč. úlohu
$$\boxed{\begin{array}{l} y' = y - \frac{x}{3} - \frac{2}{3} \\ y(0) = 1 \end{array}}$$

řešení této poč. úlohy má tvar: $y = \frac{x}{3} + 1$

obecné řešení dané rovnice je: $y = Ae^{x} + \frac{x}{3} + 1$

$\Rightarrow$ úloha je špatně podmíněná! ($y(0) = 1+\varepsilon \rightarrow y = \varepsilon e^{x} + \frac{x}{3} + 1$)

– pro řešení je třeba použít metodu vyššího řádu a dostatečně přesnou aritmetiku.

Příklad: řešme poč. úlohu
$$\boxed{\begin{array}{l} y' = \lambda y \\ y(0) = 1 \end{array}}$$
pomocí Eulerovy metody

přesné řešení úlohy je $y(x) = e^{\lambda x}$

V tomto případě má Eulerova metoda tvar:

$$y_{k+1} = y_k + h\lambda y_k$$

$$y_{k+1} = (1 + \underbrace{h\lambda}_{=\bar{h}})\, y_k$$

je-li $|1+\bar{h}| < 1$, pak je posl. y_k omezená a klesající

je-li $|1+\bar{h}| > 1$, pak posl. y_k neomezeně roste (osciluje)

$$|1+\bar{h}| < 1 \Leftrightarrow \bar{h} = h\lambda \in (-2, 0)$$

např. pro $\lambda = -2000 \rightarrow h < \frac{2}{2000} = 0{,}0001$

řešení: $y(x) = e^{-2000x} \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow \infty$

$y_k = (1+h\lambda)^k y_0 = (1-2000h)^k \rightarrow 0$ pro $k \rightarrow \infty$

%

Pozn: absolutní stabilita: Řekneme, že metoda je pro $\bar{h}$ absolutně stabilní, jestliže při $h\lambda$: $h\lambda = \bar{h}$, všechna přibližná řešení mají pro $k \rightarrow \infty$ limitu rovnou 0 ($y_k \rightarrow 0$)

- úlohu bereme proto, že $y' = f(x,y)$ po linearizování $\rightarrow y' = \overbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}^{\lambda} y$
(stabilita závisí jak na metodě, tak na úloze)

Připomeňme, že platí

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h\lambda\, y(x_k) + h\tau_k$$
$$y_{k+1} = y_k + h\lambda\, y_k$$

$$E_{k+1} = E_k + h\lambda\, E_k + h\tau_k$$

$$|E_{k+1}| \leq |1+h\lambda|\cdot|E_k| + h\,|\tau_k|$$

Chceme-li, aby $|E_k| \to 0$ pro $k \to \infty$ musíme požadovat

$$\boxed{|1+h\lambda| < 1}$$

Tuto ~~úvahu~~ můžeme učinit i pro obecnou vícekrokovou metodu

$$\sum_{j=0}^{r} \alpha_j\, y_{k+j} = h \sum_{j=0}^{r} \beta_j\, \lambda\, y_{k+j}$$
$$\Downarrow$$
$$\sum_{j=0}^{r} (\alpha_j - \bar{h}\beta_j)\, y_{k+j} = 0$$

Definujeme <u>polynom stability</u>:

$$\boxed{\pi(u,\bar{h}) = \sum_{j=0}^{r} (\alpha_j - \bar{h}\beta_j)\, u^j}$$

<u>**Definice**</u> <u>Oblastí absolutní stability metody</u> nazýváme množinu

$$A = \{\bar{h} \in \mathbb{C} : |u_j| \leq 1 \quad \forall u_j : \pi(u_j, \bar{h}) = 0\}$$

$|u_j| < 1$ pro násobné kořeny

„množina $\bar{h}$ v komplexní rovině, pro která kořeny polynomu $\pi(u,\bar{h})$ splňují podmínku $|u_j| < 1$"

Příklady:

1/ Eulerova metoda

$$y_{k+1} - y_k = h \cdot f(x_k, y_k)$$

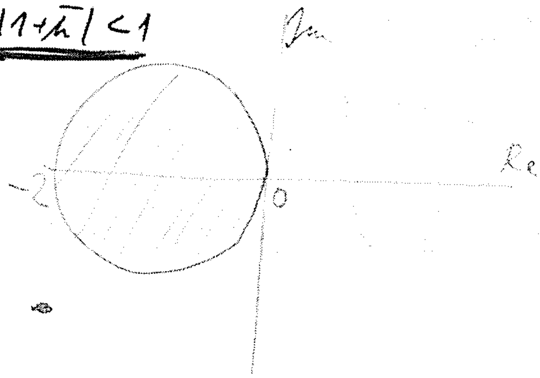
$\alpha_0 = -1$ $\quad\beta_0 = 1$

$\alpha_1 = 1$ $\quad\beta_1 = 0$

$$\pi(\mu, \bar{h}) = (-1-\bar{h}) + \mu = \mu - 1 - \bar{h}$$

kořen: $\bar{\mu} = 1 + \bar{h}$

$|\bar{\mu}| = |1+\bar{h}| < 1$



2/ implicitní Eulerova metoda

$$y_{k+1} - y_k = h f(x_{k+1}, y_{k+1})$$

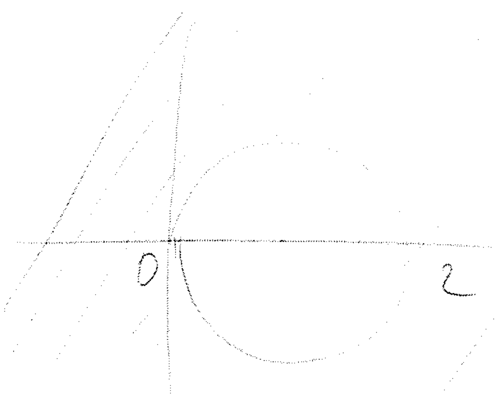
$\alpha_0 = -1$ $\quad\beta_0 = 0$

$\alpha_1 = 1$ $\quad\beta_1 = 1$

$$\pi(\mu, \bar{h}) = -1 + (1-\bar{h})\mu = (1-\bar{h})\mu - 1$$

$$|\bar{\mu}| = \frac{1}{|1-\bar{h}|} < 1$$

$$|1-\bar{h}| > 1$$



Intervaly absolutní stability

Eulerova metoda $(-2,0)$

Implicitní Eulerova metoda $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$

Dcv: Stanovte oblast absolutní stability pro obdélníkové a lichoběžníkové pravidlo, tj.

$$y_{k+1} = y_{k-1} + 2hf(x_k, y_k) \rightarrow \pi(\mu,\bar{h}) = -1 - 2\bar{h}\mu + \mu^2 \quad \mu_{1,2} = \frac{2\bar{h} \pm \sqrt{4\bar{h}^2+4}}{2}$$

$$\mu_{1,2} = \bar{h} \pm \sqrt{\bar{h}^2+1}$$

$$|\mu_1| < 1 \wedge |\mu_2| < 1$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\right] \rightarrow \pi(\mu,\bar{h}) = \left(-1-\frac{1}{2}\bar{h}\right) + \left(1-\frac{1}{2}\bar{h}\right)\mu$$

$$\mu = \frac{2+\bar{h}}{2-\bar{h}}$$

$|\mu| < 1$ pro $\underline{\underline{\bar{h} < 0}}$

$$\left|\frac{2+\bar{h}}{2-\bar{h}}\right| < 1$$

$$|2+\bar{h}| < |2-\bar{h}|$$

$-2 \quad 0 \quad \bar{h}$