POČÁTEČNÍ ÚLOHY PRO OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Formulace úlohy a její řešitelnost

Je dána funkce dvou proměnných $f = f(x,y)$, $y \in R$, $x \in \langle a, b\rangle$ a čísla $x_0 \in \langle a, b\rangle$ a $y_0 \in R$.

Chceme najít takovou funkci $y = y(x)$, $x \in \langle \overset{a}{x_0}, b\rangle$, která na intervalu $(\overset{a}{x_0}, b)$ vyhovuje rovnici

$$\boxed{y' = f(x,y)}$$

a splňuje počáteční podmínku

$$\boxed{y(x_0) = y_0}$$

Funkci $y = y(x)$, která splňuje počáteční podmínku a rovnost $y'(x) = f(x, y(x))$ na příslušném intervalu, ~~[illegible]~~ nazýváme řešením úlohy.

V některých případech budeme uvažovat speciální úlohu s rovnicí

$$\boxed{y' = a(x)\,y + b(x)}$$

nebo s rovnicí

$$\boxed{y' = \lambda y}$$

Velmi podstatnou úlohu v našich dalších úvahách bude hrát předpoklad, že funkce f je na nějakém intervalu lipschitzovsky spojitá, tj. platí:

$$\boxed{|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L \cdot |y_1 - y_2| \quad \forall x \in \langle a, b\rangle \quad \forall y_1, y_2 \in R}$$

Příklady:

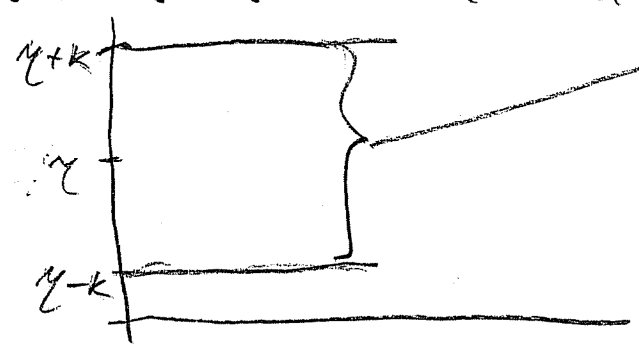
1/ Uvažujme úlohu
$$\boxed{\begin{aligned} y' &= y^2 \\ y(0) &= \eta > 0 \end{aligned}}$$

Funkce $f(x,y) = y^2$ je lipschitzovsky spojitá na libovolném konečném intervalu $\langle \eta - k, \eta + k \rangle$. Konstanta $\underline{L = 2(\eta + k)}$.

$$|y_1^2 - y_2^2| \leq 2.(\eta + k)\, |y_1 - y_2|$$

$$|y_1 + y_2| \leq 2.(\eta + k) \qquad \forall x \in \langle a, b \rangle$$

$$|y_1 + y_2| \leq |y_1| + |y_2| \leq \eta + k + \eta + k = 2(\eta + k) \qquad \forall\, y_1, y_2 \in \langle \eta - k, \eta + k \rangle$$



Řešení této úlohy má tvar
$$\boxed{\bar{y}(x) = \frac{1}{\frac{1}{\eta} - x}}$$

Když $x \to \frac{1}{\eta}$, pak $\bar{y}(x) \to \infty$

$$\left(\begin{array}{ll} \text{separace proměnných} & \\ \frac{dy}{dx} = y^2 & y(0) = \eta \\ \frac{dy}{y^2} = dx & -\frac{1}{c} = \eta \\ -\frac{1}{y} = x + c & c = -\frac{1}{\eta} \\ y = -\frac{1}{x+c} \to & \boxed{y = \frac{1}{\frac{1}{\eta} - x}} \end{array} \right)$$

⇒ Pro všechna $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ nelze najít jednu konstantu L a <u>řešení neexistuje pro libovolné x</u> (<u>řešení existuje pouze do určitého času</u>)

2/ Uvažujme úlohu

$$\boxed{\begin{aligned} y' &= \sqrt{y} \\ y(0) &= 0 \end{aligned}}$$

Funkce $f(x,y)=\sqrt{y}$ není lipschitzovsky spojitá v okolí 0,
protože $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}} \to \infty$ pro $y \to 0_+$

z věty o střední hodnotě plyne

$$f(x,y_1) - f(x,y_2) = \frac{\partial f(x,\xi)}{\partial y}\,(y_1 - y_2)$$

Řešení této úlohy není jednoznačné!

$$\bar{y}_1(x) = 0$$

$$\bar{y}_2(x) = \frac{1}{4}x^2$$

$\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{y}$ a) $y \equiv 0$ ok
b) $y \neq 0$
$\dfrac{dy}{\sqrt{y}} = dx$
$2\sqrt{y} = x + c$
$\sqrt{y} = \frac{x}{2} + c$
$y = (\frac{x}{2}+c)^2 \to y = \frac{x^2}{4}$

$y(0)=0$
$0^2 = 0$
$c = 0$

3/ Uvažujme úlohu

$$\boxed{\begin{aligned} y' &= \lambda y \\ y(0) &= 1 \end{aligned}}$$

Funkce $f(x,y)=\lambda y$ je lipschitzovsky spojitá pro všechna $y \in$
s konstantou $L = \lambda$.

$$|\lambda y_1 - \lambda y_2| = |\lambda| \cdot |y_1 - y_2| \leq |\lambda| \cdot |y_1 - y_2|$$

Tato úloha má právě jedno řešení pro všechna $x \in \langle 0, \infty)$
ve tvaru

$$\boxed{\bar{y}(x) = e^{\lambda x}}$$

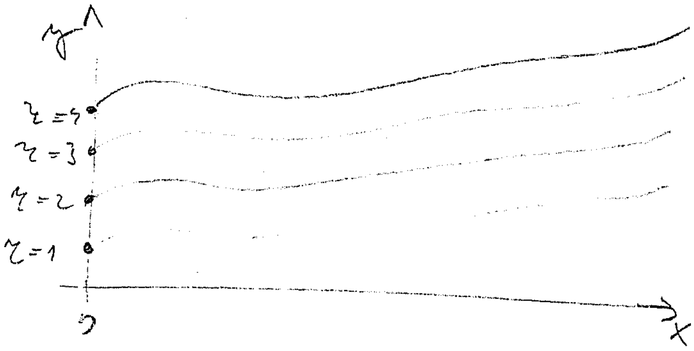
$\dfrac{dy}{dx} = \lambda y$
$\dfrac{dy}{y} = \lambda\, dx$
$\ln|y| = \lambda x + c$
$\ln|y| = \ln e^{\lambda x} + \ln c$
$y = c e^{\lambda x} \to y = e^{\lambda x}$

$y(0) = 1$
$c = 1$

Význam Lipschitzovy konstanty

4) uvažujme úlohu ve tvaru $\boxed{\begin{aligned} y' &= g(x) \\ y(0) &= \eta \end{aligned}}$

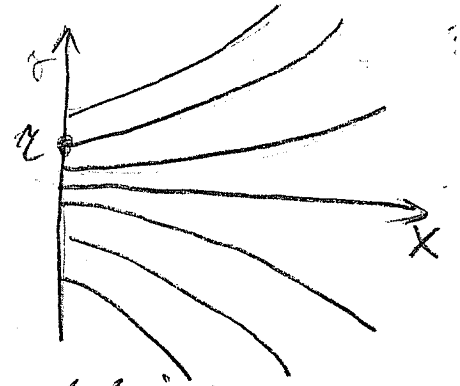
Řešení má tvar $\bar{y}(x) = \eta + \int_0^x g(\xi)\, d\xi$ a Lipschitzova konstanta $L = 0$. Křivky řešení mohou vypadat např. takto:

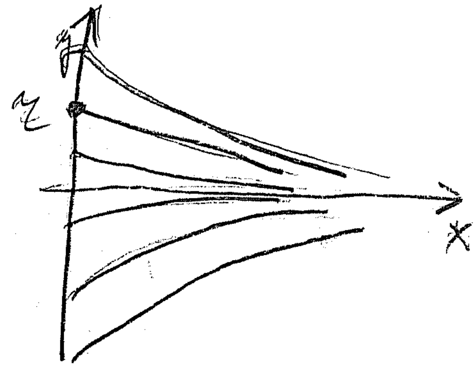


změníme-li poč. podmínku η, potom nové řešení je pouhé posunutí původního do hodnoty η.

5) Uvažujme úlohy $\boxed{\begin{aligned} y' &= 3y \\ y(0) &= \eta \end{aligned}}$ a $\boxed{\begin{aligned} y' &= -3y \\ y(0) &= \eta \end{aligned}}$

dostaneme řešení $\boxed{\bar{y}(x) = \eta e^{3x}}$, $\boxed{\bar{y}(x) = \eta e^{-3x}}$





V obou případech je Lipschitzova konstanta $\underline{L = 3}$. Její velikost však může ovlivňovat chování konkrétní numerické metody pro konkrétní úlohu.

2. odvození: Pomocí Taylorova rozvoje:

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h_k \cdot \underbrace{y'(x_k)}_{=f(x_k,\, y(x_k))} + \underbrace{\tfrac{1}{2} h_k^2\, y''(\xi_k)}_{\downarrow} \;, \quad \xi_k \in (x_k, x_{k+1})$$

zanedbáme a dostaneme vztah pro přibližné řešení

$$\downarrow$$

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + h_k \cdot f(x_k, y_k) \;, \quad k = 0, 1, 2 \ldots}$$

y_0 … poč. podmínka

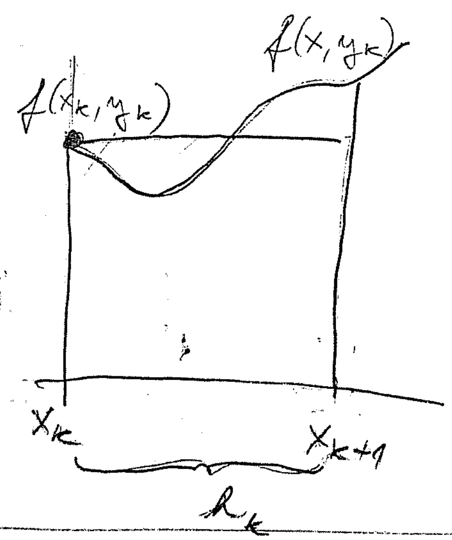
3. odvození Původní diferenciální rovnici nahradíme diferenční rovnicí (aproximujeme derivaci)

$$y' = f(x,y) \;\rightarrow\; \boxed{\frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} = f(x_k, y_k) \qquad k = 0,1,2,\ldots}$$

4. odvození Původní diferenciální rovnici integrujeme a aproximujeme určitý integrál.

$$y' = f(x,y) \;\rightarrow\; y(x_{k+1}) - y(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, \underset{\downarrow}{y(x)})\, dx$$

$y(x)$ na $\langle x_k, x_{k+1})$ aproximujeme hodnotou y_k



$$\boxed{y_{k+1} - y_k = h_k \cdot f(x_k, y_k) \;, \quad k = 0,1,2 \ldots}$$

Eulerova metoda

- nejjednodušší jednokroková explicitní metoda
- lze odvodit řadou postupů:

1. odvození:

y_0 … dáno (poč. podmínka)

y_1 … počítáme extrapolací z hodnoty y_0, přičemž se na intervalu $\langle x_0, x_1 \rangle$ řešení aproximuje přímkou, která prochází bodem $[x_0, y_0]$ a má směrnici $y' = f(x_0, y_0)$

Ta má rovnici $y = y_0 + (x - x_0)\, f(x_0, y_0)$

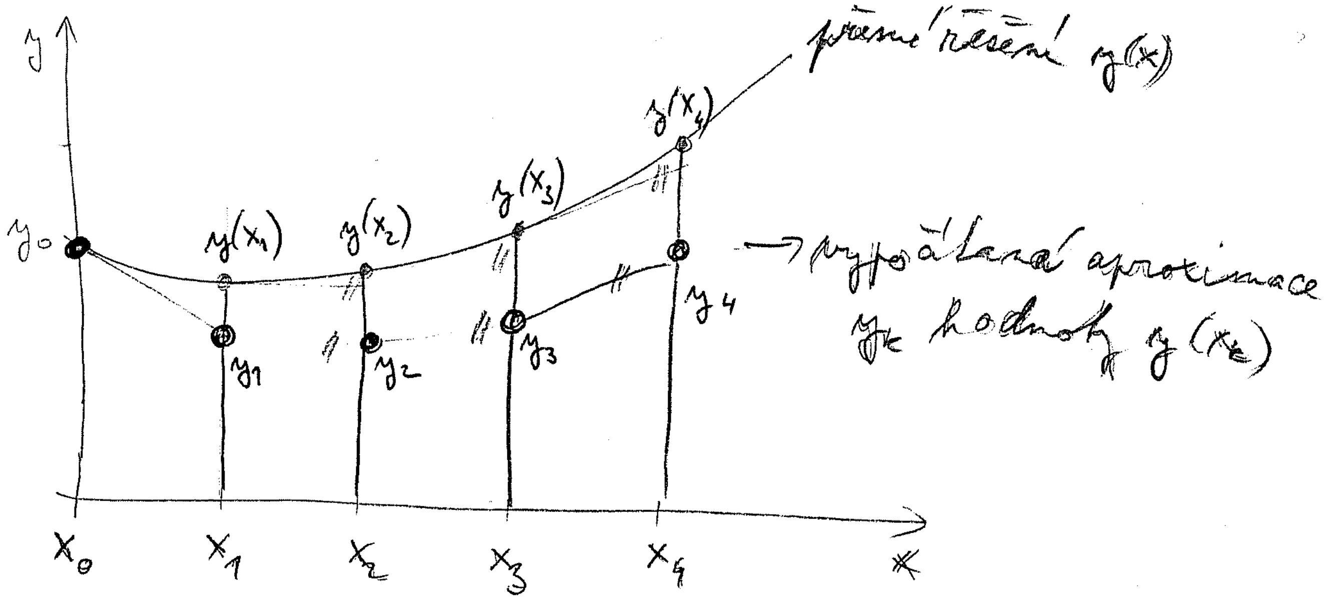
Tj. pro x_1 dostáváme:

$$y_1 = y_0 + \underbrace{(x_1 - x_0)}_{h} \cdot f(x_0, y_0)$$

Obecně dostaneme rekurentní vztah

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + h_k \cdot f(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, 2 \ldots}$$

(y_0 … dáno)



Věta

Nechť funkce $f(x,y)$ má následující vlastnosti:

(i) je definována v pásu $S = \langle a, b\rangle \times \mathbb{R}$ ... (a, b ... konečné!),

(ii) je spojitá v proměnné $x \in \langle a, b\rangle$ pro každé $y \in \mathbb{R}$,

(iii) splňuje Lipschitzovu podmínku v proměnné y, tj. existuje číslo L takové, že platí nerovnost

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L|y_1 - y_2| \quad \forall x \in \langle a,b\rangle \ \forall y_1, y_2 \in$$

Potom pro každé $x_0 \in \langle a, b\rangle$ a libovolné $y_0 \in \mathbb{R}$ existuje právě jedna funkce $y = y(x)$ s vlastnostmi:

a) $y(x)$ je spojitá a spojitě diferencovatelná pro $x \in \langle a, b\rangle$,

b) platí rovnost $y'(x) = f(x, y(x))$ pro $\forall x \in \langle a, b\rangle$,

c) $y(x_0) = y_0$.

Numerické metody lze dělit podle různých kritérií:

A/ metody založené na numerické derivaci × na numerické integraci

B/ jednokrokové metody × vícekrokové metody

C/ explicitní metody × implicitní metody

D/ metody s konstantním krokem × s proměnným krokem

Princip: Základem metody je diskretizace proměnné x. Přibližné řešení nehledáme jako spojitou funkci, ale nagenerujeme body $x_0, x_1, x_2 \dots$ a určujeme čísla $y_0, y_1, y_2 \dots$, která aproximují $y(x_0), y(x_1), y(x_2) \dots$

Pro jednoduchost můžeme uvažovat ekvidistantní dělení, tj. $h = x_{k+1} - x_k$, $\forall k$

Eulerova metoda je

Pozn - jednokroková metoda ($y_k \to y_{k+1}$)

K výpočtu y_{k+1} používáme pouze předchozí hodnotu y_k

- explicitní metoda (na pravé straně není y_{k+1})

v získané formuli je explicitně vyjádřena hodnota y_{k+1}.

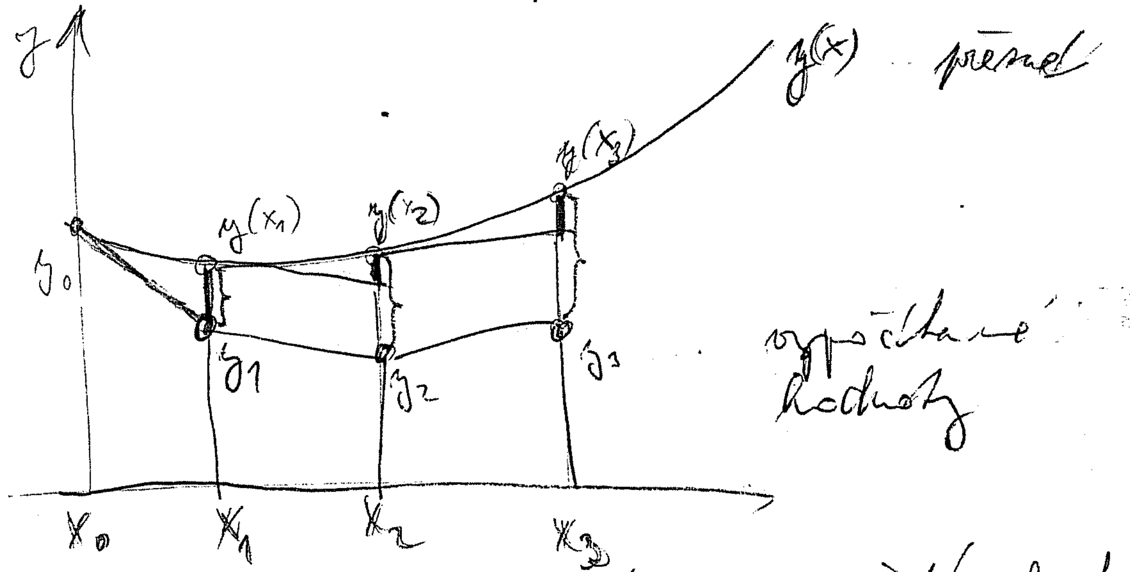
Definice: Lokální diskretizační chyba d_k na intervalu $\langle x_k, x_{k+1})$ je nepřesnost, s níž hodnoty teoretického řešení dané úlohy splňují rekurentní vztah, z něhož se počítá hodnota y_{k+1}.

Pro Eulerovu metodu je lokální diskretizační chyba d_k:

$$\boxed{y(x_{k+1}) = y(x_k) + h_k f(x_k, y(x_k)) + d_k}$$

přesné hodnoty teoretického řešení!

Pozn: lokální diskretizační chyba se nazývá lokální proto, že d_k lze interpretovat také jako chybu jednoho kroku metody (při výpočtu y_{k+1}) za předpokladu, že všechny hodnoty $y_k, y_{k-1}, \dots$ potřebné k výpočtu y_{k+1} jsou přesné!



| - lokální diskretizační chyba v každém kroku

Σ - lokální diskretizační chyba

Globální chyba Eulerovy metody
(konstantní krok h)

přibližné řešení:
$$y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k) \qquad k=0,1,\dots$$
$$y_0 = y(x_0)$$

přesné řešení:
$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h f(x_k, y(x_k)) + d_k \qquad k=0,1,\dots$$

po odečtení
$$\boxed{\begin{aligned} e_{k+1} &= e_k + h\cdot\big(f(x_k, y(x_k)) - f(x_k, y_k)\big) + d_k \\ e_0 &= 0 \end{aligned}}$$

tj. v každém kroku se ke globální chybě e_k připočítá lokální chyba d_k a člen $h(\dots)$, který představuje nepřesnosti z minulých kroků.

př: spec. případ, kdy f nezávisí na y, tj.
$$\boxed{\begin{aligned} y' &= f(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{e_{k+1} = \sum_{l=0}^{k} d_l} \quad (\bullet)$$
tj. glob. chyba je součtem lok. chyb.

Pozn: Před chvílí jsme ukázali, že lok. chyba Eulerovy metody je $O(h^2)$. Protože $(\bullet)$ má k sčítanců a protože pro pevné x je $k = \frac{x-a}{h}$, plyne z $(\bullet)$
$$\boxed{e(x,h) = \frac{const}{h}\cdot O(h^2) = O(h)}$$

podobně jako u složených a složených kvadr. vzorců

Definice: Globální diskretizační chyba $e_k = y(x_k) - y_k$, tj. rozdíl teoretické hodnoty řešení a odpovídající hodnoty řešení v daném bodě x_k.

Poznámka: Lokální i globální diskretizační chyba jsou chyby aproximace, tj. neuvažovali jsme zaokrouhlovací chyby.

Definice: Řád diferenční metody je největší přirozené číslo p takové, že pro danou metodu aplikovanou na libovolnou poč. úlohu s dostatečně hladkým řešením platí při každém pevném k a $h_k \to 0$ odhad

$$d_k = O(h_k^{p+1})$$

Řád Eulerovy metody

ze vztahu pro lokální diskretizační chybu d_k plyne:

$$d_k = \underbrace{y(x_{k+1})}_{\downarrow} - y(x_k) - h_k \underbrace{y'(x_k)}_{= f(x_k, y(x_k))}$$

vyjádříme pomocí Taylorova rozvoje (předp., že y má 2. der.)

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h_k y'(x_k) + \frac{1}{2} h_k^2 y''(\xi) \qquad \xi \in (x_k, x_{k+1})$$

→ po dosazení: $p+1$

$$\boxed{d_k = \frac{1}{2} h_k^{2} y''(\xi)} \Rightarrow \text{řád Eulerovy metody } p = 1$$