APROXIMACE FUNKCÍ

Aproximace na okolí bodu - aproximujeme chování funkce „v malém okolí bodu".

Interpolace - tabulkou danými body prokládáme polynom, tj. požadujeme-li, aby aproximace přesně procházela zadanými body.

L_2-aproximace - Použijeme, hledáme-li funkční závislost mezi tabulkou danými body (získaných například měřením), kde nutně nevyžadujeme, aby aproximace danými body procházela. Důvodem můžou být např. chyby, se kterými jsme hodnoty naměřili.

- určíme systém jednoduchých **základních (bázových) funkcí** (ne nutně polynomů) $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ a funkci f aproximujeme lineární kombinací základních funkcí

$$\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x)$$

- Otázka výběru aproximace se tedy převede na určení hodnot parametrů $c_0, c_1, \ldots, c_n$ podle nějakého kritéria vhodného pro konkrétní úlohu.

Poznámka: Velmi často budeme za základní funkce volit funkce $1, x, x^2, \ldots, x^n$, tj. aproximaci φ budeme hledat ve třídě polynomů nejvýše n-tého stupně.

Diskrétní L_2-aproximace

Myšlenka:

Chceme aproximovat funkci, která je dána tabulkou $\{(x_i, f(x_i))\}$. V případě, kdy jsou $f(x_i)$ zatíženy chybou (např. výsledky měření), není vhodné provádět interpolaci. Aproximaci φ hledáme ve tvaru

$$\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_m\varphi_m(x),$$

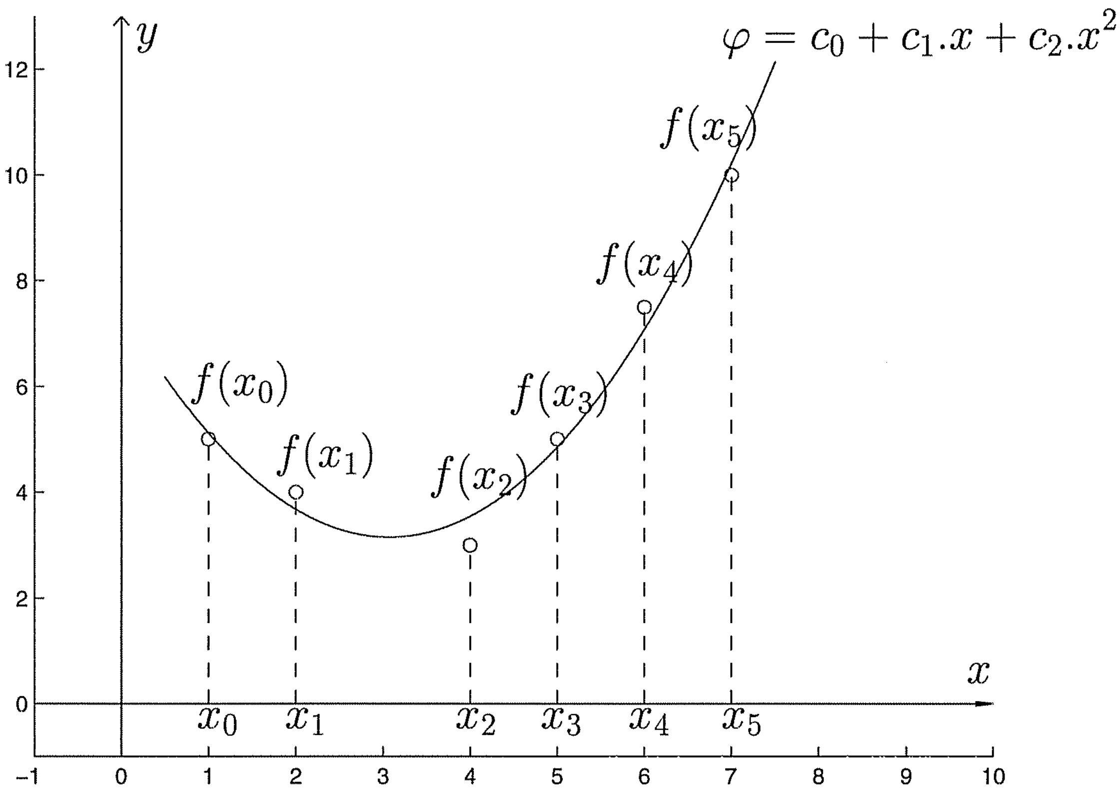
kde φ_i jsou zadané funkce a c_i hledané parametry

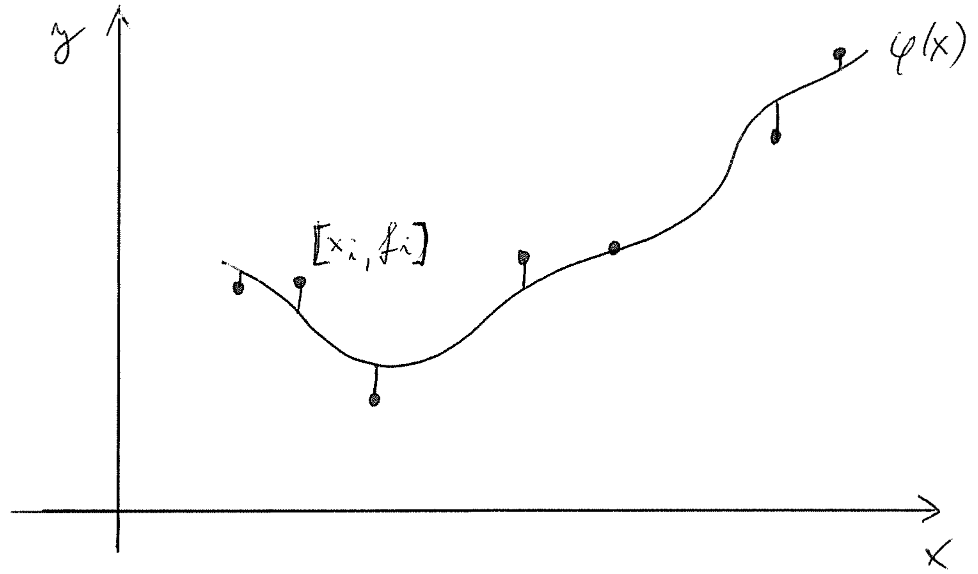
– počet bázových funkcí φ_i je menší než počet zadaných bodů

– v případě rovnosti se může jednat o interpolaci
(záleží na zvolených bázových funkcích)

Naším cílem je minimalizovat „odchylku“ funkce φ od zadaných dat

Ilustrační obrázek:





U interpolace jsme požadovali, aby aproximace přímo procházela zadanými body, tj. chyba

$$\boxed{e_i = f(x_i) - \varphi(x_i) = 0}$$

Nyní na tomto netrváme, pouze chceme tuto chybu v nějakém smyslu minimalizovat.

? Jakou použít normu pro měření chyby e ?

- $$\max_{0 \le i \le n} \{ |f(x_i) - \varphi(x_i)| \}$$
- $$\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} |f(x_i) - \varphi(x_i)|$$
- $$\sqrt{\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} |f(x_i) - \varphi(x_i)|^2}$$

Cílem je chybu minimalizovat ⇒ vybereme tu normu, která umožní nejsnažší postup.

<u>Uvažujme příklad</u>:

x_i	1	2	3
$f(x_i)$	1	2	2

$; \varphi(x) = c_0 + c_1 x$

Jak by vypadala minimalizace předchozích norem?

- $$\min_{c_0, c_1 \in \mathbb{R}} \max \{ |1 - c_0 - c_1|, |2 - c_0 - 2c_1|, |2 - c_0 - 3c_1| \}$$

  ... pro počítání nevhodné

- $$\min_{c_0, c_1 \in \mathbb{R}} \frac{1}{3} \left(|1 - c_0 - c_1| + |2 - c_0 - 2c_1| + |2 - c_0 - 3c_1| \right)$$

  ... opět nevhodné

- $$\min_{c_0, c_1 \in \mathbb{R}} \sqrt{\frac{1}{3} \left[(1 - c_0 - c_1)^2 + (2 - c_0 - 2c_1)^2 + (2 - c_0 - 3c_1)^2 \right]}$$

zjednodušíme

(nezáporná fce f nabývá svého minima ve stejném bodě jako nabývá minima fce $\sqrt{f}$)

$$\min_{c_0, c_1 \in \mathbb{R}} \underbrace{\left[(1 - c_0 - c_1)^2 + (2 - c_0 - 2c_1)^2 + (2 - c_0 - 3c_1)^2 \right]}$$

kvadratická funkce proměnných c_0, c_1

⇒ je hladká, snadno se derivuje

FORMULACE ÚLOHY DISKRÉTNÍ L_2-APROXIMACE

Je dána funkce f tabulkou hodnot v $n+1$ bodech $x_0, x_1 \dots x_n$

x_i	
$f(x_i)$	

Zvolíme tvar aproximující funkce $\boxed{\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_m\varphi_m(x)}$ s počtem parametrů c_i menším než $\underline{n+1}$.

Diskrétní L_2-aproximací fce f je potom taková lineární kombinace bázových funkcí $\varphi_i(x)$, jejíž koeficienty splňují podmínku, že L_2 norma chyby je minimální, tj.

$$\boxed{R(f,\varphi) = \sum_{i=0}^{n} \left[f(x_i) - \varphi(x_i) \right]^2 = \sum_{i=0}^{n} \left[f(x_i) - \sum_{j=0}^{m} c_j \varphi_j(x_i) \right]^2}$$

je minimální

<u>Poznámka</u>: Tato nejlepší aproximace má velmi dobré statistické vlastnosti a vyrovnává vliv náhodných chyb v zadaných (naměřených) funkčních hodnotách)

Diskrétní L_2-aproximace lineárním polynomem

Úkolem je stanovit diskrétní L_2 aproximaci funkce f zadané tabulkou (x_i, f_i) $i = 0, 1, \dots, n$, lineárním polynomem;

tj $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$

Tedy

$$\boxed{\varphi(x) = c_0 + c_1 x}$$

Minimalizujeme funkci

$$\boxed{R = \sum_{i=0}^{n} \left[f_i - c_0 - c_1 x_i\right]^2}$$

Nutná a postačující podmínka minima je

$$\frac{\partial R}{\partial c_0} = -2 \sum_{i=0}^{n} (f_i - c_0 - c_1 x_i) = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial c_1} = -2 \sum_{i=0}^{n} (f_i - c_0 - c_1 x_i)\, x_i = 0$$

Koeficienty c_0 a c_1 nalezneme jako řešení soustavy

$$\left.\begin{aligned} (n+1)\, c_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) c_1 &= \sum_{i=0}^{n} f_i \\ \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) c_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right) c_1 &= \sum_{i=0}^{n} f_i x_i \end{aligned}\right\} \quad \boxed{Pc = g}$$

P symetrická, pozitivně definitní

Jiný postup: Užijeme metodu pro řešení neřešitelných soustav

Platí: (měla by) $\boxed{c_0 + c_1 x_i = f_i, \quad i = 0, 1, \dots n}$

$$\left.\begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \right\} \quad \boxed{Qc = F}$$

Soustava $Qc = F$ je neřešitelná. Provádíme minimalizaci $\underline{r^T r}$, kde $\underline{r = F - Qc}$ je reziduum soustavy.

Dosadíme-li, pak platí:

$$r^T r = (F - Qc)^T (F - Qc) = F^T F - c^T Q^T F - F^T Q c + c^T Q^T Q c =$$

$$= F^T F - 2 c^T Q^T F + c^T Q^T Q c \quad , \text{protože } (c^T Q^T F)^T = F^T Q c$$

Matice $Q^T Q$ je symetrická, pozitivně definitní. Nutná a postačující podmínka minima:

$$Q^T Q c - Q^T F = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q^T Q c = Q^T F}$$

tzv. soustava normálních rovnic

Platí: $\boxed{P = Q^T Q}$ a $\boxed{g = Q^T F}$

Diskrétní L_2 aproximace kvadratickým polynomem

Při f aproximujeme kvadratickým polynomem

$$\boxed{\varphi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2}$$

minimalizujeme veličinu

$$\boxed{R = \sum_{i=0}^{n} \left[f_i - c_0 - c_1 x_i - c_2 x_i^2\right]^2}$$

Z nutných a postačujících podmínek minima

$$\boxed{\frac{\partial R}{\partial c_0} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial c_1} = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial R}{\partial c_0} = 0}$$

dostaneme soustavu ve tvaru

$$\left|\begin{array}{l} (n+1)\, c_0 + \left(\sum x_i\right) c_1 + \left(\sum x_i^2\right) c_2 = \sum f_i \\ \left(\sum x_i\right) c_0 + \left(\sum x_i^2\right) c_1 + \left(\sum x_i^3\right) c_2 = \sum f_i x_i \\ \left(\sum x_i^2\right) c_0 + \left(\sum x_i^3\right) c_1 + \left(\sum x_i^4\right) c_2 = \sum f_i x_i^2 \end{array}\right|$$

Stejnou soustavu dostaneme ~~f~~ při řešení neřešitelné soustavy pomocí soustavy normálních rovnic.

Pozn: V případě, že některé hodnoty chceme eliminovat, např. důsledkem špatného měření, je vhodné použít váhy, tj. minimalizujeme

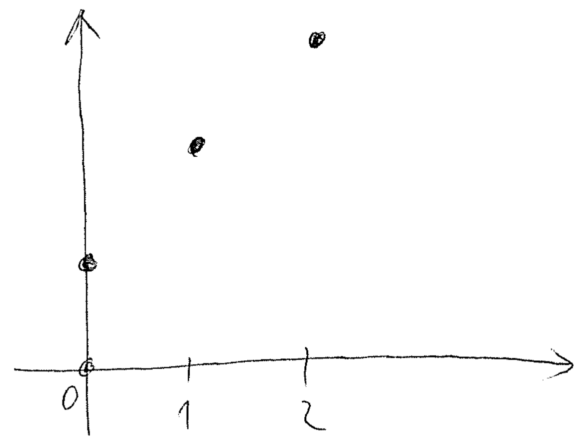
$$R(f, \varphi, w_i) = \sum_{i=0}^{m} \left[f(x_i) - \varphi(x_i)\right]^2 \cdot w_1$$

váha uzlu x_i

Příklad Aproximujte funkci, která je dána tabulkou

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	1	2	3

pomocí fce $\boxed{\varphi(x) = c_0 \cdot x + c_1 x^2 + c_2 x^3}$



$$\underbrace{\overset{Q}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}}}_{\text{singulární matice}} \cdot \overset{c}{\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}} = \overset{F}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}$$

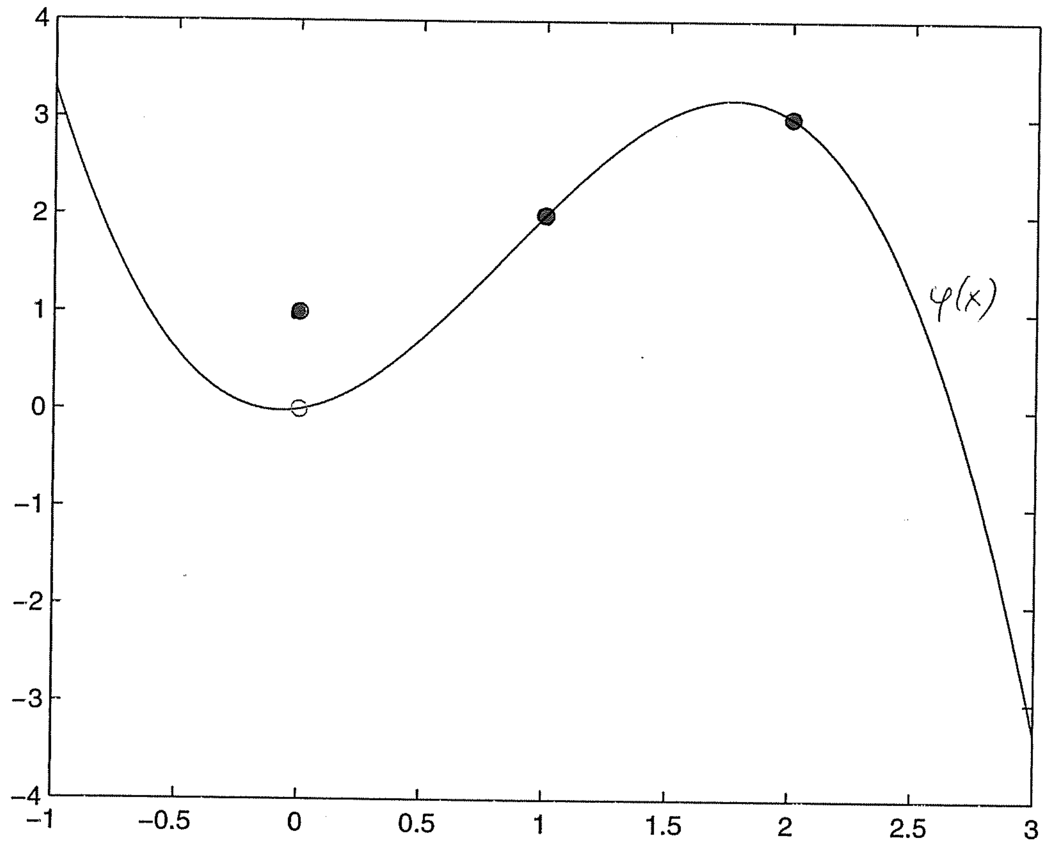
- první rovnici nelze splnit $\Rightarrow$ soustava nemá řešení
- řešíme metodou nejmenších čtverců

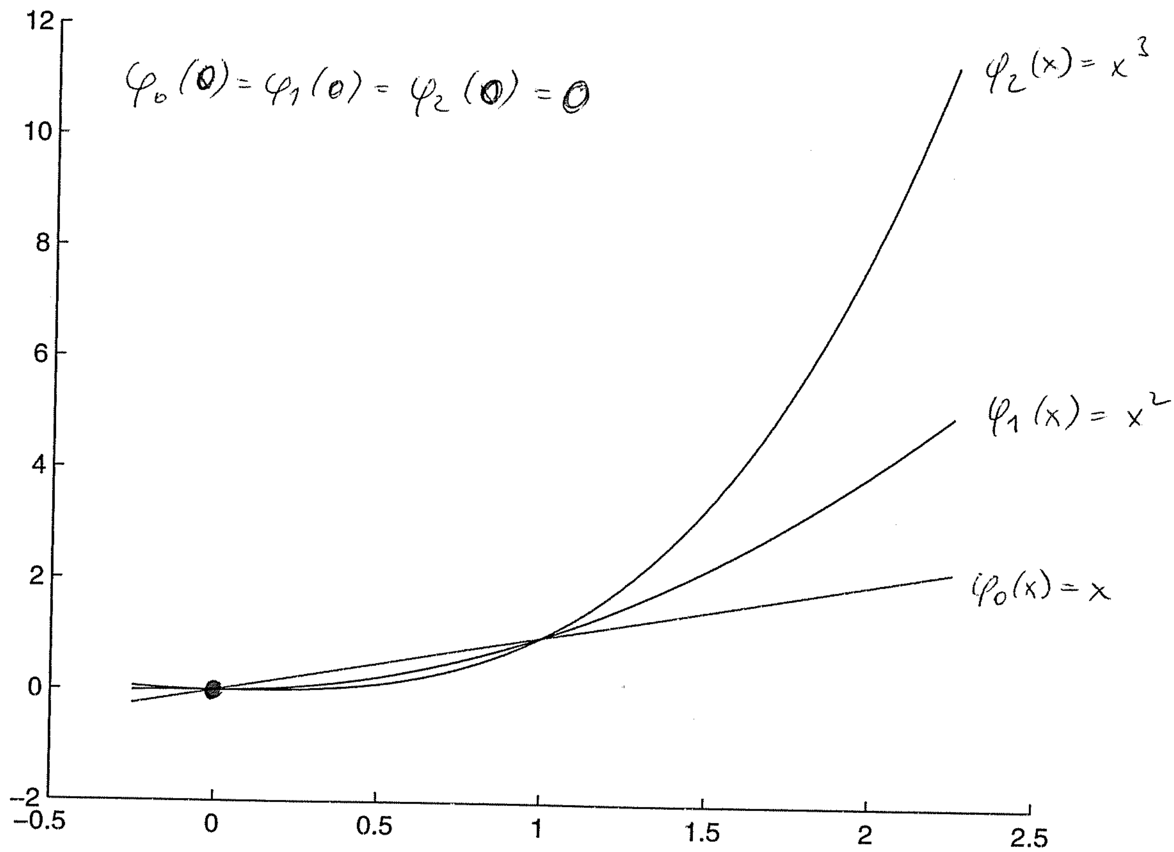
$$Q^T / \quad Q c = F \longrightarrow Q^T Q c = Q^T F$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 9 & 17 \\ 9 & 17 & 33 \\ 17 & 33 & 65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \\ 26 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{c_0 = 0{,}4} \quad \underline{c_1 = 2{,}65} \quad \underline{c_2 = -1{,}05}$$

$$\boxed{\varphi(x) = 0{,}4x + 2{,}65x^2 - 1{,}05x^3}$$


$\varphi(x)$


$\varphi_0(0) = \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$
$\varphi_2(x) = x^3$
$\varphi_1(x) = x^2$
$\varphi_0(x) = x$

Podmíněnost úlohy diskrétní L_2-aproximace

Budeme-li aproximovat na intervalu $\langle 0,1\rangle$ funkci f a zvolíme-li ekvidistantní dělení a bázové fce budeme volit $\varphi_j = x^j$, bude matice $P = Q^T Q$ soustavy normálních rovnic blízká Hilbertově matici, která je velmi špatně podmíněná.

Řešení: Za funkce $\varphi_j(x)$ volíme ortogonální polynomy (např. Gramovy polynomy)

Pozn: Ze systému n-lineárně nezávislých funkcí g_i lze pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu zkonstruovat systém ortogonálních funkcí!

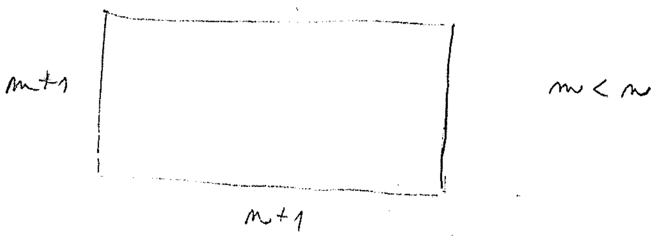
Řešitelnost úlohy diskrétní L_2 aproximace

Definice: Řekneme, že systém funkcí $\varphi_j(x)$, $j=0,1,\dots m$, definovaných na $\langle a,b\rangle$ a síti $(x_0,x_1,\dots x_n)$ je diskrétně lineárně nezávislý, jsou-li vektory

$$[\varphi_0(x_0),\ \varphi_0(x_1),\ \dots\ ,\varphi_0(x_n)]^T$$
$$\vdots$$
$$[\varphi_m(x_0),\ \varphi_m(x_1),\ \dots\ ,\varphi_m(x_n)]^T$$

lineárně nezávislé.

Pozn: Tato definice říká, že hodnost matice $\Phi = [\varphi_j(x_i)]_{j=0,1,\dots m}^{i=0,1,\dots n}$ je rovna $(m+1)$.



Věta: Je-li systém $\varphi_j(x)$, $j=0,1,\dots m$, diskrétně lineárně nezávislý, potom existuje právě jedna aproximace

$$\boxed{\varphi^*(x) = \sum_{j=0}^{m} c_j^* \varphi_j(x)},$$

která minimalizuje veličinu $R(f,\varphi)$ ve třídě funkcí $\varphi(x)=\sum_{j=0}^{m} c_j\varphi_j(x)$. Koeficienty c_j^* najdeme jako řešení soustavy normálních rovnic

SPOJITÁ L_2-APROXIMACE

<u>Definice</u>: Mějme funkci $w = w(x)$, která je definována na $\langle a, b\rangle$ a je kladná a omezená. Množinu reálných funkcí $f = f(x)$ definovaných na (a, b) takových, že

$$\boxed{\int_a^b w(x) \cdot [f(x)]^2 \, dx < \infty}$$

označme $L_2(a, b)$. Skalární součin dvou funkcí $f, g \in L_2(a, b)$ nazýváme číslo

$$\boxed{(f, g) = \int_a^b w(x) \cdot f(x) \cdot g(x) \, dx}$$

číslo

$$\boxed{\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \left(\int_a^b w(x) [f(x)]^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}}$$

nazýváme normou funkce f v $L_2(a, b)$.

Funkce f, g se nazývají ortogonální, platí-li

$$\boxed{(f, g) = 0}$$

<u>Formulace úlohy</u>: Je dána funkce f spojitá na $\langle a, b\rangle$ a systém funkcí $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots \varphi_m(x)$. Mezi funkcemi tvaru

$$\boxed{\varphi(x) = c_0 \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_m \varphi_m(x)}$$

chceme najít takovou funkci

$$\boxed{\varphi^*(x) = \sum_{j=0}^{m} c_j^* \varphi_j(x)}$$

aby platilo

$$\boxed{\|f - \varphi^*\| = \inf_{\varphi} \|f - \varphi\|}$$

Chceme tedy minimalizovat veličinu

$$\boxed{R(f,\varphi) = \left(f - \sum c_j \varphi_j,\ f - \sum c_j \varphi_j\right)}$$

Nutné a postačující podmínky minima mají tvar

$$\boxed{\frac{\partial R}{\partial c_j} = 0 \quad , \; j = 0, 1, \ldots n}$$

Derivováním a jednoduchými úpravami dostaneme soustavu:

$$\begin{array}{l}
(\varphi_0, \varphi_0) c_0 + (\varphi_0, \varphi_1) c_1 + \ldots + (\varphi_0, \varphi_m) c_m = (\varphi_0, f) \\
(\varphi_1, \varphi_0) c_0 + (\varphi_1, \varphi_1) c_1 + \ldots + (\varphi_1, \varphi_m) c_m = (\varphi_1, f) \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
(\varphi_m, \varphi_0) c_0 + (\varphi_m, \varphi_1) c_1 + \ldots + (\varphi_m, \varphi_m) c_m = (\varphi_m, f)
\end{array}$$

kde $\quad (\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b w(x)\, \varphi_i(x)\, \varphi_j(x)\, dx$

Věta: Jsou-li funkce $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_m$ lineárně nezávislé, má úloha spojité L_2-aproximace jediné řešení. Koeficienty c_j^* jsou řešením normální soustavy a platí:

$$\boxed{(f - \varphi^*, \varphi_j) = 0 \quad , \; j = 0, 1, \ldots m}$$

tj. fce $f - \varphi^*$ je ortogonální ke všem funkcím φ_j.

Spojitá L_2-aproximace

Příklad

Stanovte spojitou L_2-aproximaci funkce $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in \langle 0, 1\rangle$ lineární funkcí $\varphi(x) = c_1 x + c_0$.

Minimalizujeme funkci

$$r(c_0, c_1) = \int_0^1 |f(x) - \varphi(x)|^2 \, dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - c_0 - c_1 x)^2 \, dx.$$

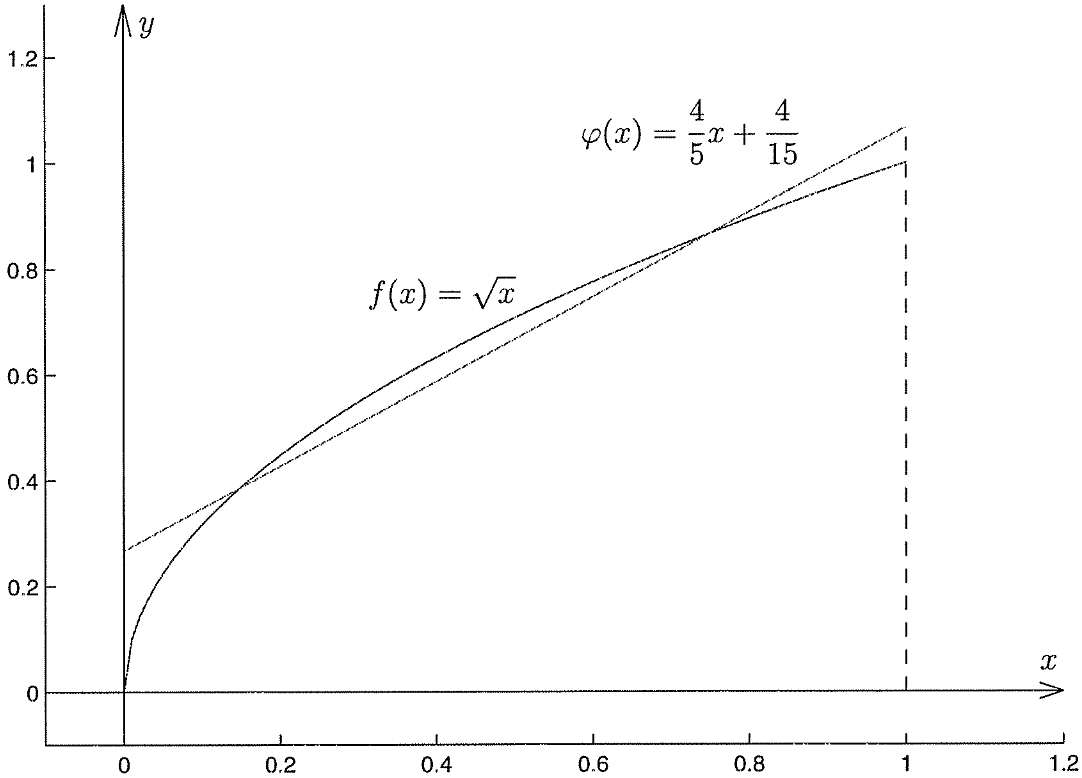
Podmínky minima

$$\left.\begin{aligned} &(1) \quad \frac{\partial r}{\partial c_1} = -2 \int_0^1 (\sqrt{x} - c_0 - c_1 x) x \, dx = 0 \\ &(2) \quad \frac{\partial r}{\partial c_0} = -2 \int_0^1 (\sqrt{x} - c_0 - c_1 x) \, dx = 0 \end{aligned}\right\} \text{ 2 rovnice pro neznámé } c_0, c_1.$$

$$\begin{aligned} &(1) \quad -2\left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - c_0 \frac{x^2}{2} - c_1 \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 0 \\ &(2) \quad -2\left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - c_0 x - c_1 \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &(1) \quad \frac{2}{5} - \frac{1}{2} c_0 - \frac{1}{3} c_1 = 0 \\ &(2) \quad \frac{2}{3} - c_0 - \frac{1}{2} c_1 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{1}{2} c_0 + \frac{1}{3} c_1 &= \frac{2}{5} \\ c_0 + \frac{1}{2} c_1 &= \frac{2}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= \frac{4}{5} \\ c_0 &= \frac{4}{15} \end{aligned}$$

$$\varphi(x) = \frac{4}{5} x + \frac{4}{15}$$



□

Poznámka

Obecně lze opět zavést váhovou funkci $w = w(x)$ a minimalizovat

$$r(c_i) = \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|^2 w(x)\, dx$$

Podmíněnost úlohy spojité L_2-aproximace

Volíme-li váhu $w(x) \equiv 1$ a aproximujeme-li funkci $f = f(x)$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ funkcí $\varphi = \varphi(x)$ ve tvaru

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_m x^m,$$

tj. $\varphi_j(x) = x^j$, platí

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_0^1 x^i x^j = \frac{1}{i+j+1}$$

Soustava $Pc = g$ je opět špatně podmíněná, protože P je Hilbertova matice.

Řešení problému:

Volíme funkce $\varphi_j(x)$, $j = 0, 1, \dots m$, ortogonální ve smyslu skalárního součinu

$$\boxed{(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b w(x)\, \varphi_i(x)\, \varphi_j(x)\, dx}$$

Potom platí: $(\varphi_i, \varphi_j) = 0$ pro $i \neq j$ a soustava normálních rovnic má diagonální matici.

Pak lze psát:

$$\boxed{c_j^* = \frac{(f, \varphi_j)}{(\varphi_j, \varphi_j)} \quad j = 0, 1, \dots m}$$

Fourierovy koeficienty

Ortogonální systémy funkcí

Gram-Schmidtův ortogonalizační proces

Jsou dány lineárně nezávislé funkce $g_1, g_2, \dots, g_n$ (prvky jistého prostoru).

Hledáme funkce (prvky téhož prostoru), které jsou navzájem po dvou ortogonální.

$$\boxed{f_1 = g_1}$$

f_2 hledáme ve tvaru $\boxed{f_2 = g_2 + \kappa_{21} f_1}$ a použijeme $(f_1, f_2) = 0$

$$\underbrace{(f_2, f_1)}_{=0} = (g_2, f_1) + \kappa_{21}(f_1, f_1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\kappa_{21} = -\frac{(g_2, f_1)}{(f_1, f_1)}}$$

f_3 hledáme ve tvaru $\boxed{f_3 = g_3 + \kappa_{31} f_1 + \kappa_{32} f_2}$ a použijeme $(f_3, f_1) = 0$ a $(f_3, f_2) = 0$

$$\underbrace{(f_3, f_1)}_{=0} = (g_3, f_1) + \kappa_{31}(f_1, f_1) + \kappa_{32}\underbrace{(f_2, f_1)}_{=0}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\kappa_{31} = -\frac{(g_3, f_1)}{(f_1, f_1)}}$$

$$\underbrace{(f_3, f_2)}_{=0} = (g_3, f_2) + \kappa_{31}\underbrace{(f_1, f_2)}_{=0} + \kappa_{32}(f_2, f_2)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\kappa_{32} = -\frac{(g_3, f_2)}{(f_2, f_2)}}$$

Obecně f_k hledáme ve tvaru $\boxed{f_k = g_k + \kappa_{k1} f_1 + \kappa_{k2} f_2 + \ldots + \kappa_{k,k-1} f_{k-1}}$

$$\text{a} \quad \boxed{\kappa_{kj} = -\frac{(g_k, f_j)}{(f_j, f_j)}}$$

$$j = 1, 2, \dots, k-1$$

Příklad

Najděte ortogonální bázi lineárního obalu mnohočlenů
$g_1(x) = 1,\ g_2(x) = x,\ g_3(x) = x^2$ pro $x \in \langle -1, 1\rangle$.

$$\boxed{f_1(x) = g_1(x) = 1}$$

$f_2 = \underbrace{g_2(x)}_{x} + \kappa_{21} \underbrace{f_1(x)}_{=1} = x + \kappa_{21}$ a musí platit $(f_1, f_2) = 0$

$$\int_{-1}^{1} (x + \kappa_{21}).1\, dx = 0$$

$$\underbrace{\int_{-1}^{1} x\, dx}_{=0} + \int_{-1}^{1} \kappa_{21}\, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \kappa_{21} = 0$$

$$\boxed{f_2(x) = x}$$

$f_3 = \underbrace{g_3(x)}_{x^2} + \kappa_{31} \underbrace{f_1(x)}_{=1} + \kappa_{32} \underbrace{f_2(x)}_{=x} = x^2 + \kappa_{31} + \kappa_{32}.x$ a $(f_1, f_3) = 0$
a $(f_2, f_3) = 0$, tj.

$$\int_{-1}^{1} (x^2 + \kappa_{31} + \kappa_{32}x).1\, dx = 0$$

$$\underbrace{\int_{-1}^{1} x^2\, dx}_{=\frac{2}{3}} + \kappa_{31} \underbrace{\int_{-1}^{1} dx}_{=2} + \kappa_{32} \underbrace{\int_{-1}^{1} x\, dx}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \kappa_{31} = \frac{-\frac{2}{3}}{2} = -\frac{1}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} (x^2 + \kappa_{31} + \kappa_{32}x).x\, dx = 0$$

$$\underbrace{\int_{-1}^{1} x^3\, dx}_{0} + \kappa_{31} \underbrace{\int_{-1}^{1} x\, dx}_{=0} + \kappa_{32} \underbrace{\int_{-1}^{1} x^2\, dx}_{=\frac{2}{3}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \kappa_{32} = 0$$

$$\boxed{f_3(x) = x^2 - \frac{1}{3}}$$

Příklad Určete ortogonální bázi prostoru polynomů do stupně 2 pro uzlové body

$x_0 = 0;\ x_1 = 0{,}2;\ x_2 = 0{,}4;\ x_3 = 0{,}6;\ x_4 = 0{,}8;\ x_5 = 1$

$g_0 = 1$ tj. $[1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1]$

$g_1 = x$ tj. $[0;\ 0{,}2;\ 0{,}4;\ 0{,}6;\ 0{,}8;\ 1]$

$g_2 = x^2$ tj. $[0;\ 0{,}04;\ 0{,}16;\ 0{,}36;\ 0{,}64;\ 1]$

$$\boxed{\varphi_0 = g_0 = 1}$$

$$\varphi_1 = g_1 + \alpha_{10}\varphi_0 \qquad \alpha_{10} = -\frac{(g_1, \varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$(g_1, \varphi_0) = 0 + 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}6 + 0{,}8 + 1 = 3$$

$$(\varphi_0, \varphi_0) = 6$$

$$\boxed{\varphi_1 = x - \frac{1}{2}}$$

$$\varphi_2 = g_2 + \alpha_{20}\varphi_0 + \alpha_{21}\varphi_1 \qquad \alpha_{20} = -\frac{(g_2, \varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)} = -\frac{2{,}2}{6}$$

$$(g_2, \varphi_0) = 0 + 0{,}04 + 0{,}16 + 0{,}36 + 0{,}64 + 1 = 2{,}2$$

$$\alpha_{21} = -\frac{(g_2, \varphi_1)}{(\varphi_1, \varphi_1)} = -1$$

$$(g_2, \varphi_1) = [0;\ 0{,}04;\ 0{,}16;\ 0{,}36;\ 0{,}64;\ 1]^T$$
$$[-\tfrac{1}{2};\ -0{,}3;\ -0{,}1;\ 0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}5] = 0 - 0{,}012 - 0{,}016 + 0{,}036 + 0{,}192 + 0{,}5 = 0{,}7$$

$$(\varphi_1, \varphi_1) = 0{,}25 + 0{,}09 + 0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}09 + 0{,}25 = 0{,}7$$

$$\boxed{\varphi_2 = x^2 - \frac{1{,}1}{3} - x + \frac{1}{2} = x^2 - x + \frac{2}{15}}$$

```
U =   0     0.2000     0.4000     0.6000     0.8000     1.0000

stupen = 2

baze_spoj =

         0         0    1.0000
         0    1.0000   -0.5000
    1.0000   -1.0000    0.1333

baze_diskr =

    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000
   -0.5000   -0.3000   -0.1000    0.1000    0.3000    0.5000
    0.1333   -0.0267   -0.1067   -0.1067   -0.0267    0.1333


%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

U = 0    0.125    0.25    0.375    0.5    0.625    0.75    0.875    1

stupen = 2

baze_spoj =

         0         0    1.0000
         0    1.0000   -0.5000
    1.0000   -1.0000    0.1458

baze_diskr =

  Columns 1 through 7

    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000
   -0.5000   -0.3750   -0.2500   -0.1250         0    0.1250    0.2500
    0.1458    0.0365   -0.0417   -0.0885   -0.1042   -0.0885   -0.0417

  Columns 8 through 9

    1.0000    1.0000
    0.3750    0.5000
    0.0365    0.1458
```

Poznámka:

Uvažujme úlohu spojité L_2-aproximace, kde za aproximující funkce volíme polynomy stupně m.

? Jak máme volit stupeň polynomu?

Pokud nemáme další informace, je vhodné řešit normální rovnice postupně pro $m = 0, 1, 2, \dots$ a sledovat hodnotu

polynom stupně m

$$\boxed{\sigma_m^2 = \frac{\sum_{i=0}^{n} \left(f(x_i) - \varphi(x_i)\right)^2}{n-m}}$$

Pokud σ_m^2 s rostoucím m významně klesá, pokračujeme, jinak hodnota po níž nenásleduje výrazný pokles σ_m^2 je ze statistických důvodů vhodným stupněm polynomu.

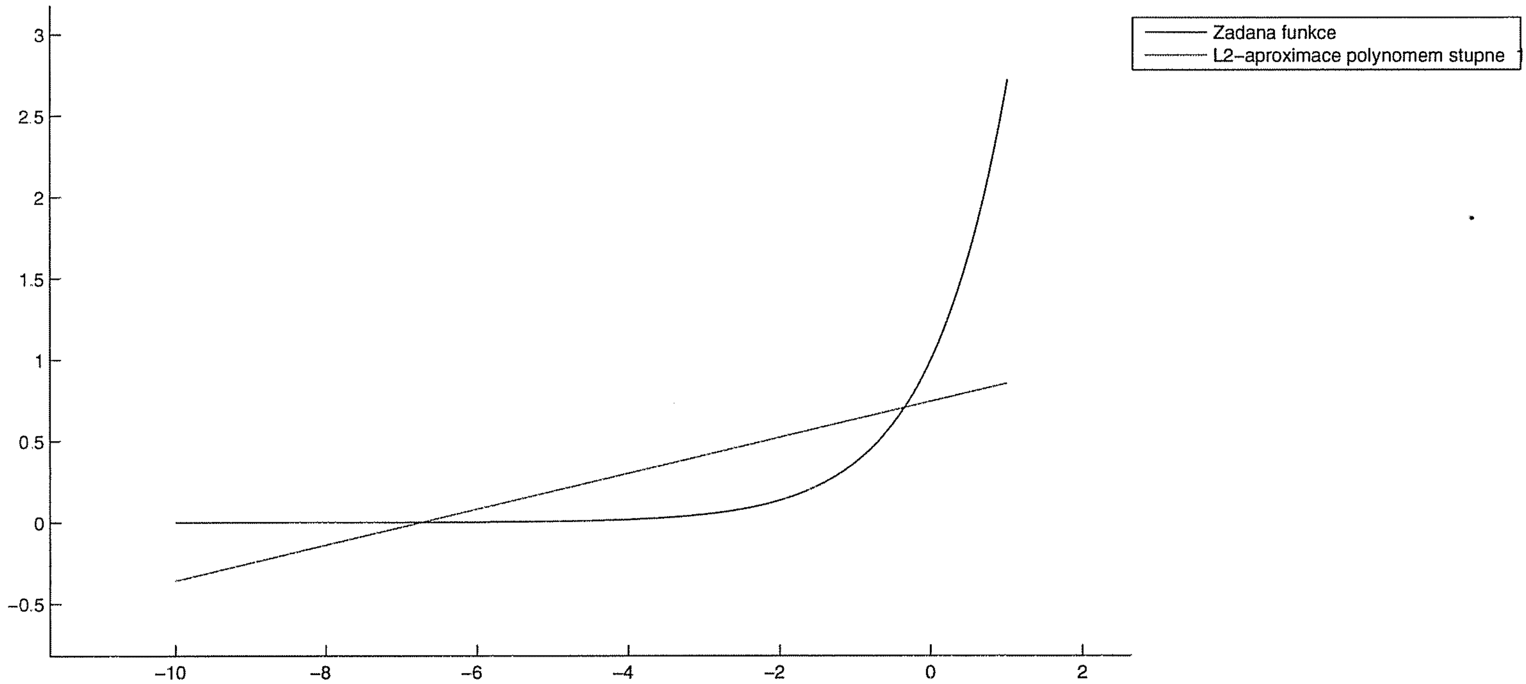
Volíme-li za $\varphi_j = x^j$, [1] musíme řešit soustavu normálních rovnic pro každý stupeň m znovu.

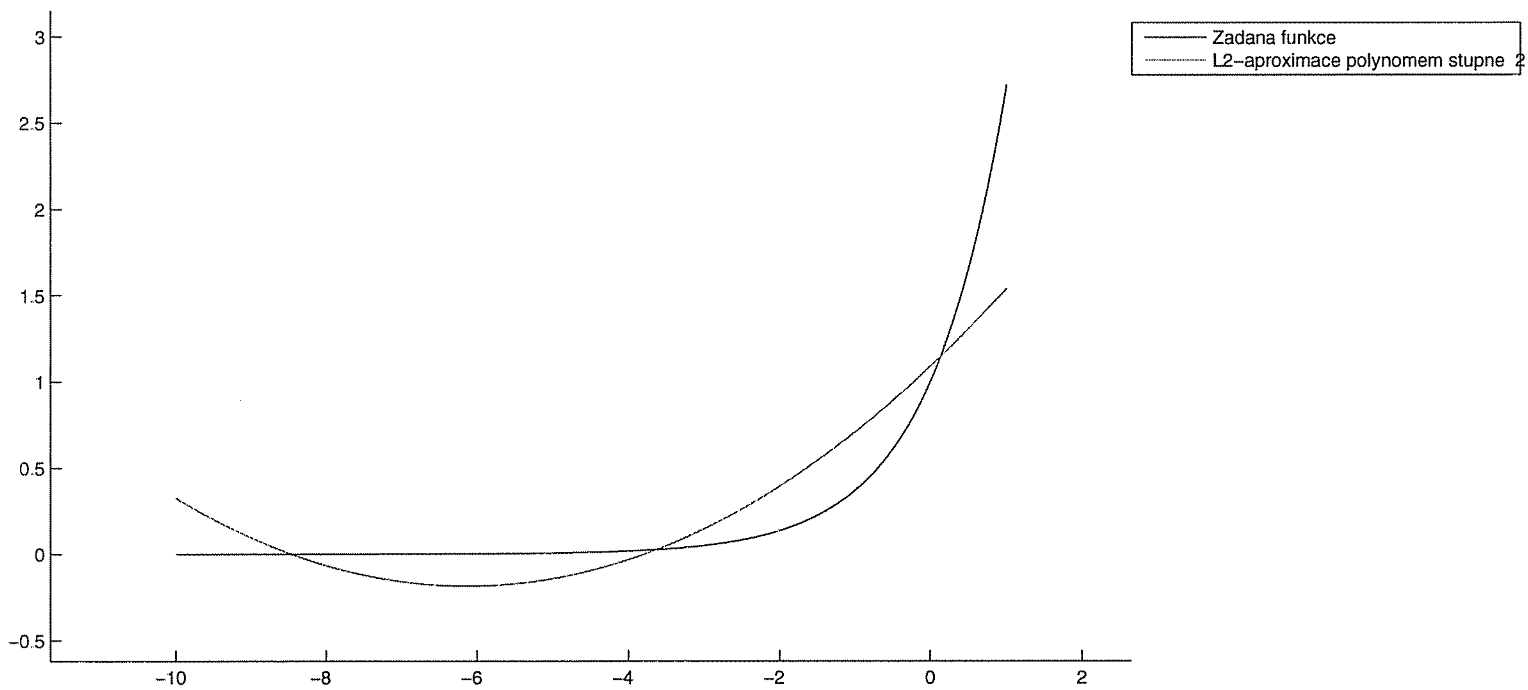
→ [2] špatná podmíněnost

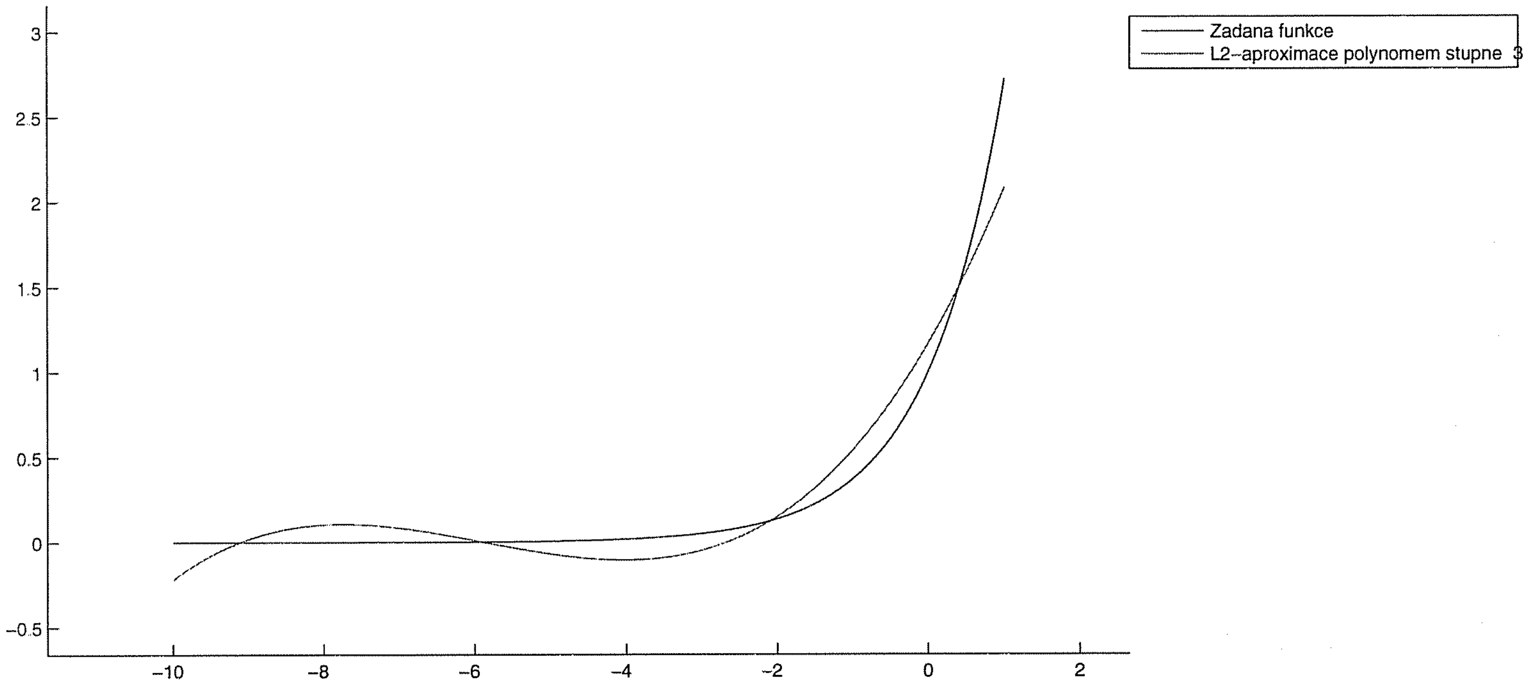
Řešení: použijeme ortogonální polynomy

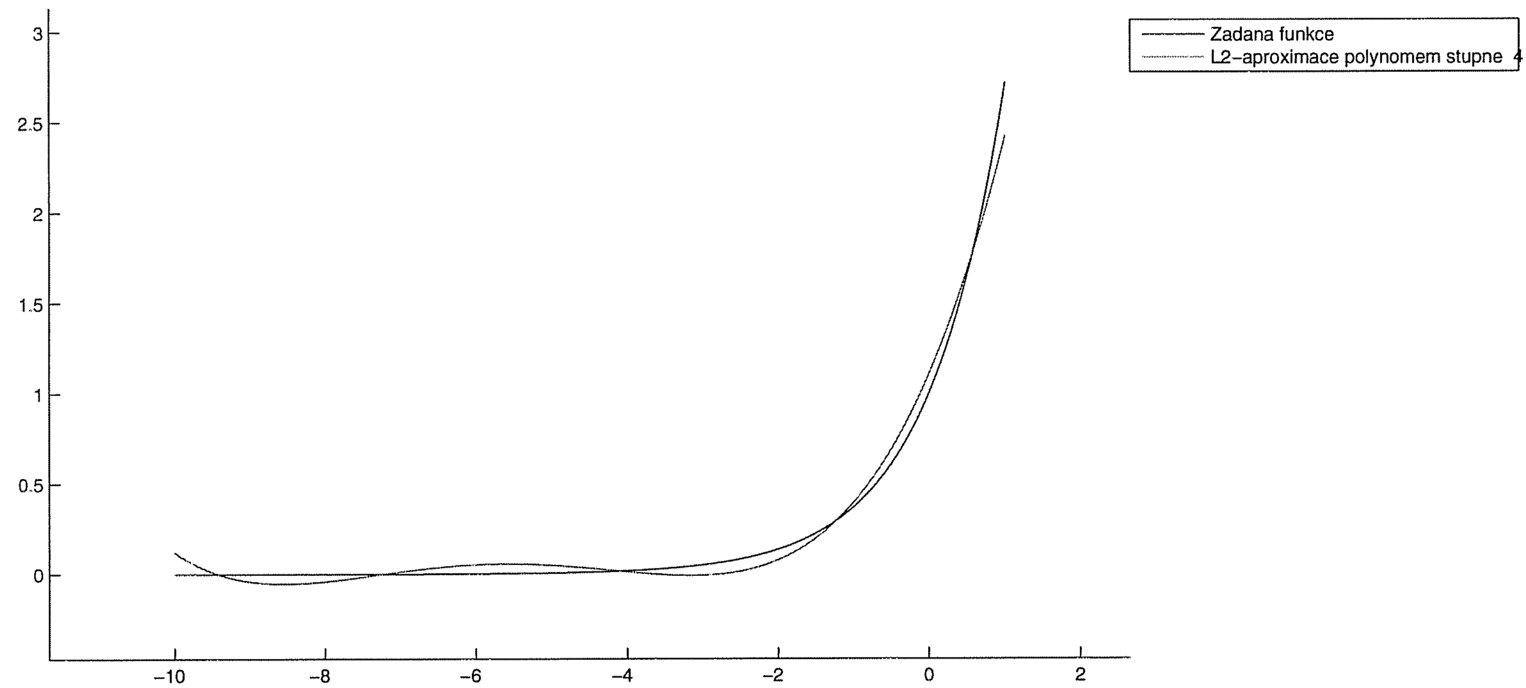
→ potom stačí vždy dopočítat pouze 1 koeficient.

Příklad Spojitá L_2-aproximace fce $f(x) = e^x$ na $\langle -10; 1 \rangle$






Zadana funkce
L2–aproximace polynomem stupne 3


Zadana funkce
L2–aproximace polynomem stupne 4

Nelineární aproximace metodou nejmenších čtverců

např. volíme-li $\boxed{\varphi(x) = C \cdot e^{Ax}}$ (*)

→ <u>1. přístup</u> je metoda <u>linearizace dat</u>:

(*) logaritmujeme

$$\underbrace{\ln \varphi}_{\Phi} = \underbrace{\ln C}_{B} + Ax$$

$$\boxed{\Phi = Ax + B}$$

(původní body $[x_i, f_i]$ je třeba transformovat na body $[x_i, \ln f_i]$)

získáme A, B a z B vypočteme $C = e^B$.

⇒ **2. přístup** minimalizujeme L_2 normu chyby přímo

$$R(A,C) = \sum_{i=0}^{n} \left(f_i - C e^{Ax_i} \right)^2$$

parciální derivace:

$$\frac{\partial R}{\partial A} = 2 \sum_{i=0}^{n} \left(f_i - C e^{Ax_i} \right)\left(C x_i e^{Ax_i} \right) = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial C} = 2 \sum_{i=0}^{n} \left(f_i - C e^{Ax_i} \right)\left(e^{Ax_i} \right) = 0$$

soustava normálních rovnic

1 rovnice:

$$\sum \left(f_i - C e^{Ax_i} \right)\left(C x_i e^{Ax_i} \right) = 0$$

$$C \sum f_i x_i e^{Ax_i} - C^2 \sum x_i e^{2Ax_i} = 0 \qquad / \cdot \frac{1}{C} \neq 0$$

$$\boxed{\sum f_i x_i e^{Ax_i} - C \sum x_i e^{2Ax_i} = 0}$$

2 rovnice:

$$\sum \left(f_i - C e^{Ax_i} \right)\left(e^{Ax_i} \right) = 0$$

$$\boxed{\sum f_i e^{Ax_i} - C \sum e^{2Ax_i} = 0}$$

soustava **nelineárních** rovnic

lze použít např. **Newtonovu metodu**

Příklad

x_i	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	1,5	2,5	3,5	5	7,5

$$\boxed{\varphi(x) = C \cdot e^{Ax}}$$

```
clc;
clear;

x=0:4
f=[1.5 2.5 3.5 5 7.5]
F=log(f)'
Q=[x.^0' x.^1']
P=Q'*Q
g=Q'*F
koef_lin=P\g
A=koef_lin(2)
C=exp(koef_lin(1))
```

$\longrightarrow \varphi_1(x) = 1{,}579909 \cdot e^{0{,}3912023 \cdot x}$

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

koef_nelin=fminsearch('R',[1 1]);
AA=koef_nelin(1)
CC=koef_nelin(2)
```

$\longrightarrow \varphi_2(x) = 1{,}610856 \cdot e^{0{,}383579 \cdot x}$

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

krok=0.01;
i=0;
for xx=-0.25:krok:6.25
 i=i+1;
 phi_1(i)=C*exp(A*xx);
 phi_2(i)=CC*exp(AA*xx);
end;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

figure(1);
hold on;
xx=-0.25:krok:6.25;

plot(xx,phi_1,'m-');
plot(xx,phi_2,'b-');
plot(x,f,'ro')
```

```
function out=R(koef);

A=koef(1);
C=koef(2);

out=(C-1.5).^2+(C.*exp(A)-2.5).^2+(C.*exp(2*A)-3.5).^2+...
    (C.*exp(3*A)-5).^2+(C.*exp(4*A)-7.5).^2;
```

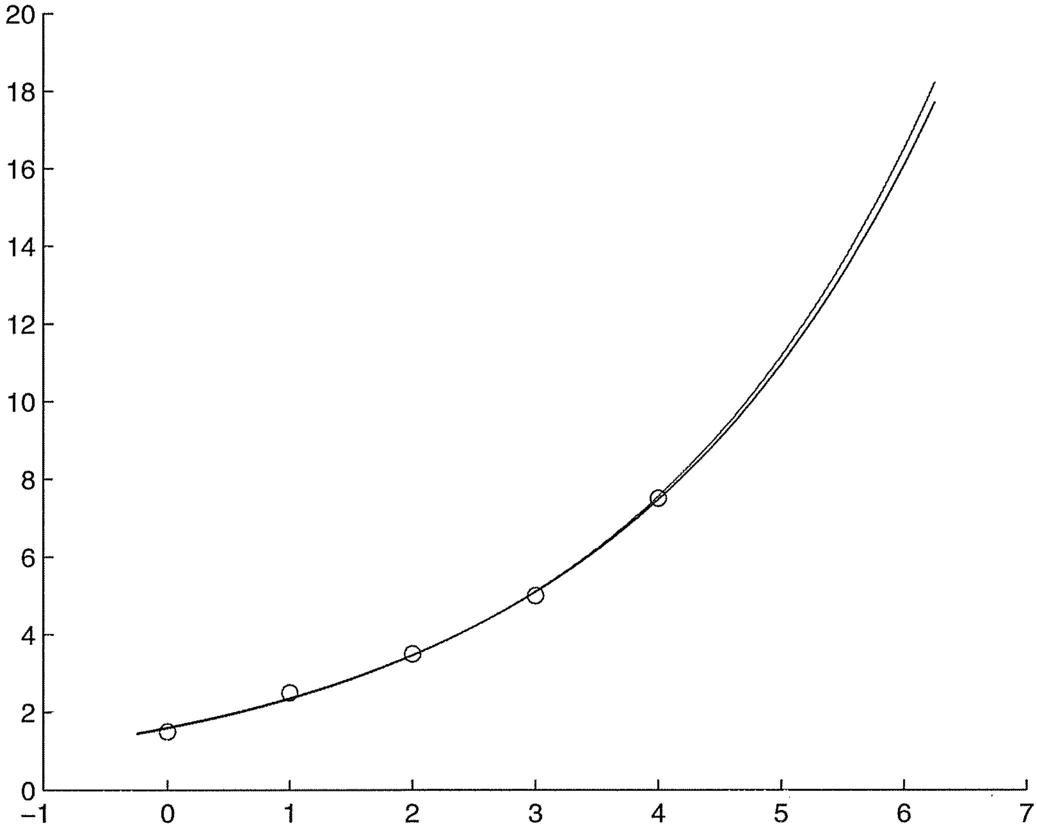

20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
−1
0
1
2
3
4
5
6
7

Table 5.6 Change of Variable(s) for Data Linearization

Function, $y = f(x)$	Linearized form, $Y = Ax + B$	Change of variable(s) and constants
$y = \frac{A}{x} + B$	$y = A\frac{1}{x} + B$	$X = \frac{1}{x}, Y = y$
$y = \frac{D}{x + C}$	$y + \frac{-1}{C}(xy) + \frac{D}{C}$	$X = xy, Y = y$
		$C = \frac{-1}{A}, D = \frac{-B}{A}$
$y = \frac{1}{Ax + B}$	$\frac{1}{y} = Ax + B$	$X = x, Y = \frac{1}{y}$
$y = \frac{x}{Ax + B}$	$\frac{1}{y} = A\frac{1}{x} + B$	$X = \frac{1}{x}, Y = \frac{1}{y}$
$y = A\ln(x) + B$	$y = A\ln(x) + B$	$X = \ln(x), Y = y$
$y = Ce^{Ax}$	$\ln(y) = Ax + \ln(C)$	$X = x, Y = \ln(y)$
		$C = e^B$
$y = Cx^A$	$\ln(y) = A\ln(x) + \ln(C)$	$X = \ln(x), Y = \ln(y)$
		$C = e^B$
$y = (Ax + B)^{-2}$	$y^{-1/2} = Ax + B$	$X = x, Y = y^{-1/2}$
$y = Cxe^{-Dx}$	$\ln\left(\frac{y}{x}\right) = -Dx + \ln(C)$	$X = x, Y = \ln\left(\frac{y}{x}\right)$
		$C = e^B, D = -A$
$y = \frac{L}{1 + Ce^{Ax}}$	$\ln\left(\frac{L}{y} - 1\right) = Ax + \ln(C)$	$X = x, Y = \ln\left(\frac{L}{y} - 1\right)$
		$C = e^B$ and L is a constant that must be given

Fourierova analýza

Do této chvíle jsme se zabývali aproximacemi funkce hlavně pomocí polynomů. V úvodu jsme uvedli, že za bázové funkce můžeme volit libovolné funkce. Například pro aproximaci periodických funkcí není vhodné použít polynomy (a to jak ve smyslu interpolace tak ve smyslu L_2-aproximace). Pro aproximaci **periodických funkcí** je vhodné použít nějaký systém periodických bázových funkcí, např. systém tzv. **trigonometrických polynomů**:

$$
\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= 1 \\
\varphi_{2k-1}(x) &= \cos\frac{2\pi kx}{T} \qquad k = 1, 2, \ldots \\
\varphi_{2k}(x) &= \sin\frac{2\pi kx}{T} \qquad k = 1, 2, \ldots,
\end{aligned}
$$

kde T představuje periodu zadané funkce (vzdálenost prvního a posledního uzlu v diskrétním případě, resp. délku zadaného intervalu ve spojitém případě).

Pro jednoduchost uvažujeme ekvidistantní uzly (v diskrétním případě).

Počet uvažovaných bázových funkcí volíme buď menší než je počet zadaných bodů (ve smyslu L_2-aproximace), nebo roven počtu zadaných bodů (ve smyslu interpolace).

Jednoduchým cvičením je ukázat, že systém trigonometrických polynomů je ortogonální (jak v diskrétním tak ve spojitém případě). Ověřte!

Úlohu najít koeficienty c_i u bázových funkcí φ_i z vyjádření

$$\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x).$$

nazýváme v tomto případě **Fourierovou analýzou**.

Formálně pouze přeznačíme koeficienty c_i, tj.
u bázové funkce $\varphi_0(x) = 1$ použijeme koeficient A_0,
u bázových funkcí $\varphi_{2k-1}(x) = \cos(2\pi kx)/T$ použijeme ... A_k
u bázových funkcí $\varphi_{2k}(x) = \sin(2\pi kx)/T$ použijeme ... B_k

Následující jednoduchý příklad ukáže princip Fourierovy analýzy.

Příklad

Aproximujte 2π-periodickou funkci zadanou tabulkou za použití maximálního počtu bázových funkcí (tj. ve smyslu interpolace).

x_i	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$f(x_i)$	12	-4	0	4

Řešení

Ze zadání je zřejmé, že perioda zadané funkce je 2π. Aproximující trigonometrický polynom budeme tedy volit ve tvaru

$$\varphi(x) = A_0 + A_1 \cos x + B_1 \sin x + A_2 \cos 2x.$$

Zapíšeme interpolační podmínky

$$\varphi(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, 2, 3,$$

tj.

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos x_0 & \sin x_0 & \cos 2x_0 \\ 1 & \cos x_1 & \sin x_1 & \cos 2x_1 \\ 1 & \cos x_2 & \sin x_2 & \cos 2x_2 \\ 1 & \cos x_3 & \sin x_3 & \cos 2x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{bmatrix},$$

tj.

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos 0 & \sin 0 & \cos 0 \\ 1 & \cos \pi/2 & \sin \pi/2 & \cos \pi \\ 1 & \cos \pi & \sin \pi & \cos 2\pi \\ 1 & \cos 3\pi/2 & \sin 3\pi/2 & \cos 3\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

tj.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ A_2 \end{bmatrix}}_{c} = \underbrace{\begin{bmatrix} 12 \\ -4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}}_{f}.$$

diagonální, protože fce $\varphi_0(x) = \frac{1}{2}$, $\varphi_1(x) = \cos x$, $\varphi_2(x) = \sin x$ jsou diskrétně ortogonální ve smyslu skalár. součinu

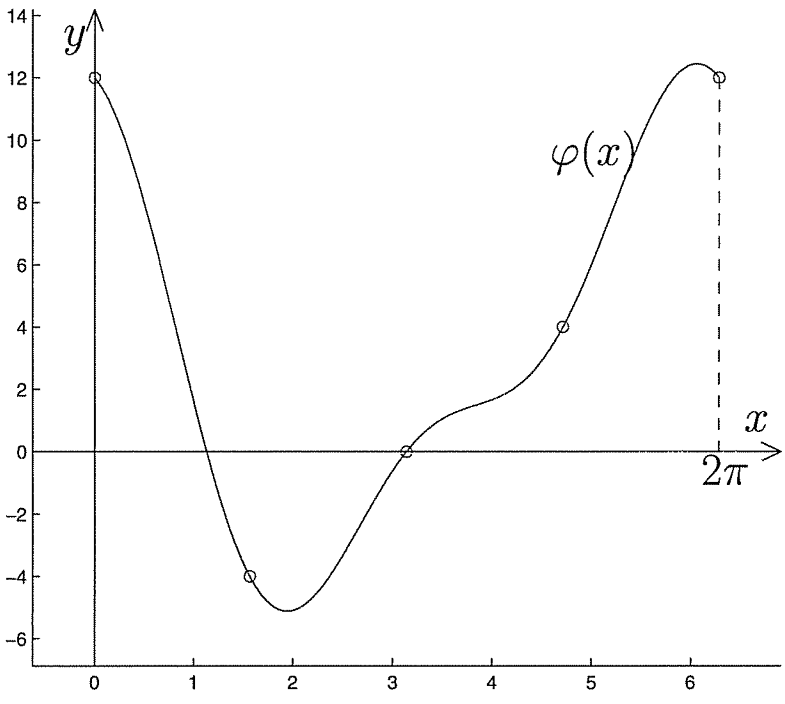
tj.
$$\overbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}^{Q^TQ} \overbrace{\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ A_2 \end{bmatrix}}^{c} = \overbrace{\begin{bmatrix} 12 \\ 12 \\ -8 \\ 12 \end{bmatrix}}^{Q^Tf}.$$

$$(\varphi, \psi) = \sum_{j=0}^{2} \varphi(x_j)\psi(x_j) \qquad \left(x_j = \frac{2\pi j}{N},\ N = 3\right)$$

Dcv:
$$\left(\tfrac{1}{2}, \cos x\right) = \dots = 0$$
$$\left(\tfrac{1}{2}, \sin x\right) = \dots = 0$$
$$(\cos x, \sin x) = \dots = 0$$

Vyřešením soustavy získáme hledané koeficienty $A_0 = 3$, $A_1 = 6$, $B_1 = -4$, $A_2 = 3$ a tím i aproximující trigonometrický polynom

$$\underline{\varphi(x) = 3 + 6\cos x - 4\sin x + 3\cos 2x}.$$



□

ÚLOHA DISKRÉTNÍ FOURIEROVY ANALÝZY

Řadu T periodických funkcí (integrovatelných) lze vyjádřit ve tvaru Fourierovy řady

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi k x}{T} + b_k \sin \frac{2\pi k x}{T}\right)}$$

nebo

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k \sin\left(\frac{2\pi k x}{T} + v_k\right),$$

kde $r_k^2 = a_k^2 + b_k^2$, $v_k = \operatorname{arctg} \frac{a_k}{b_k}$

položíli jsme $a_k = r_k \sin v_k$, $b_k = r_k \cos v_k$,

$a \cos\alpha + b \sin\alpha = r \sin v \cos\alpha + r \cos v \sin\alpha = r(\sin v \cos\alpha + \cos v \sin\alpha) = r \sin(\alpha + v)$

Fourierovou (harmonickou) analýzou rozumíme úlohu určit amplitudy r_k a fáze v_k tzv. harmonických složek $r_k \cdot \sin\left(\frac{2\pi k x}{T} + v_k\right)$, je-li dána fce $f(x)$.

Fourierovou (harmonickou) syntézou rozumíme úlohu určit funkci f, jsou-li dány fáze v_k a amplitudy r_k.

Tuto úlohu můžeme řešit několika způsoby:

(i) Vyjdeme z úlohy spojité Fourierovy analýzy a numericky vypočteme Fourierovy koeficienty, které jsou dány:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2\pi k x}{T}\,dx$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{2\pi k x}{T}\,dx .$$

Užijeme např. lichoběžníkové pravidlo (viz další přednáška)
Pozor, pro velká k integrandy oscilují!

(ii) Funkci f aproximujeme (interpolace, diskrétní L_2 aproximace) přímo vhodnou funkcí q, která má tvar trigonometrického polynomu.

Použijeme přístup (ii), realizovaný v příkladech. Jeho zobecněním získáme následující věta:

Věta: Trigonometrický polynom

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{L} \left(A_k \cos kx + B_k \sin kx\right), \quad N = 2L+1 \ (N \text{ liché})}$$

resp.

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{L-1} \left(A_k \cos kx + B_k \sin kx\right) + \frac{A_L}{2}\cos Lx, \quad N = 2L \ (N \text{ sudé})}$$

splňuje interpolační podmínky

$$\varphi(x_j) = f(x_j), \quad x_j = \frac{2\pi j}{N}, \quad j = 0, 1, \dots N-1,$$

právě když

koeficienty polynomu $\varphi(x)$ jsou dány pomocí vzorců

$$A_k = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \cos kx_j \qquad B_k = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \sin kx_j$$

$$\left(A_0 = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j\right) \qquad k = 0, 1, \dots L$$

Dk: $(\varphi(x), \cos kx) \to A_k$ $\quad (\varphi(x), \sin kx) \to B_k$ a využije ortogonality

Z těchto vzorců vychází algoritmus diskrétní Fourierovy analýzy.

Úlohu a řešení Fourierovy analýzy lze formulovat elegantně použitím komplexní proměnné. Uvažujme pro jednoduchost lichý počet bázových funkcí ($N = 2L + 1$) a periodu dané funkce 2π. Potom má aproximující funkce tvar

$$\varphi(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{L} (A_k \cos kx + B_k \sin kx). \qquad (*)$$

Pro funkce $\sin x$ a $\cos x$ platí vztahy

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = -\frac{1}{2}\, i\, (e^{ix} - e^{-ix})$$

a tedy

$$\varphi(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{L} \left(\frac{1}{2} A_k \left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right) - \frac{1}{2}\, i\, B_k \left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right) \right) =$$

$$= A_0 + \sum_{k=1}^{L} \left(\frac{1}{2} (A_k - i\, B_k)\, e^{ikx} + \frac{1}{2} (A_k + i\, B_k)\, e^{-ikx} \right).$$

Označíme-li

$$C_0 = A_0\,, \quad C_k = \frac{1}{2} (A_k - i\, B_k)\,, \quad C_{-k} = \frac{1}{2} (A_k + i\, B_k)$$

dostaneme

$$\underline{\varphi(x) = \sum_{k=-L}^{L} C_k\, e^{ikx}.}$$

Pro koeficienty dostaneme vynásobením (*) jednotlivými bázovými funkcemi, využitím jejich ortogonality a interpolačních podmínek předpisy:

$$A_0 = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)$$

$$A_k = \frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\,\cos kx_j$$

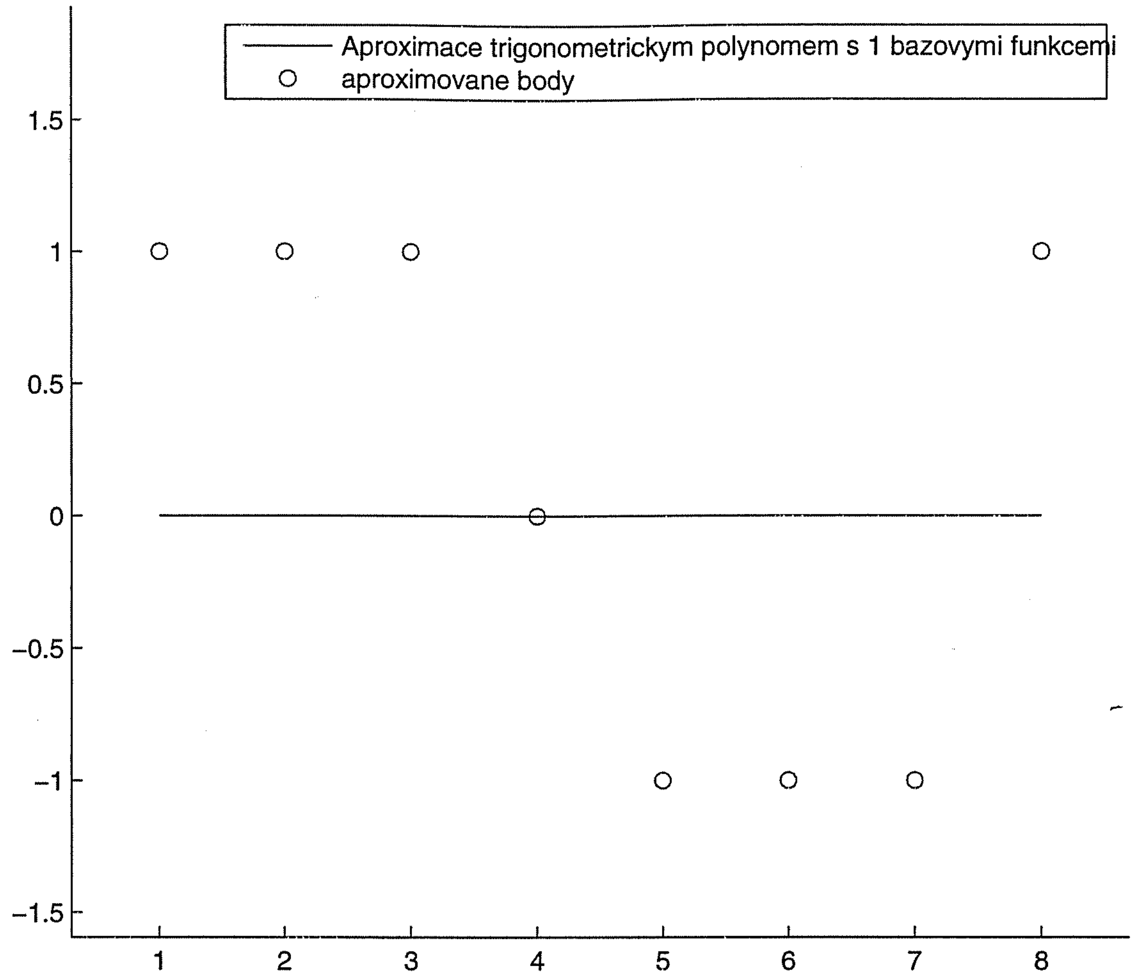
$$B_k = \frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\,\sin kx_j$$

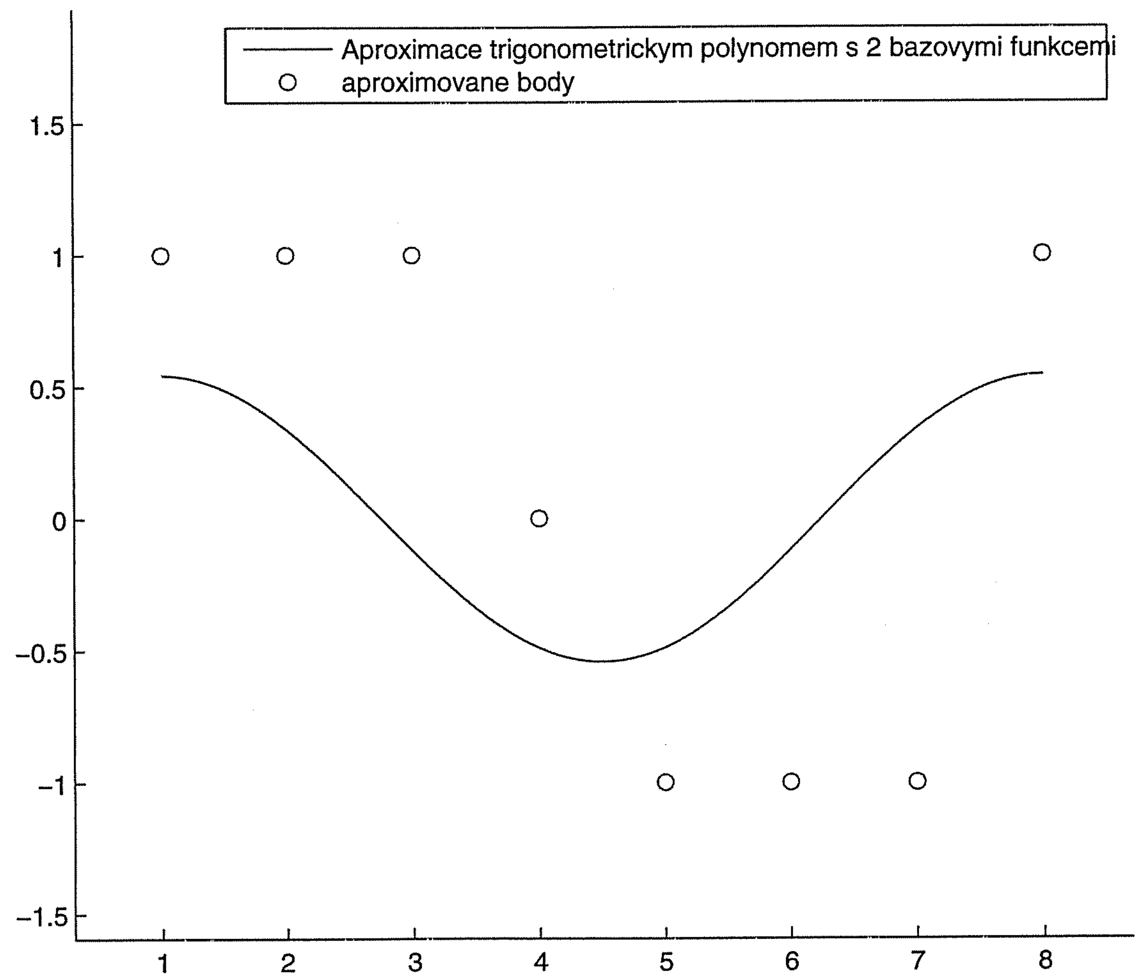
$$C_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\,e^{-ikx_j}$$

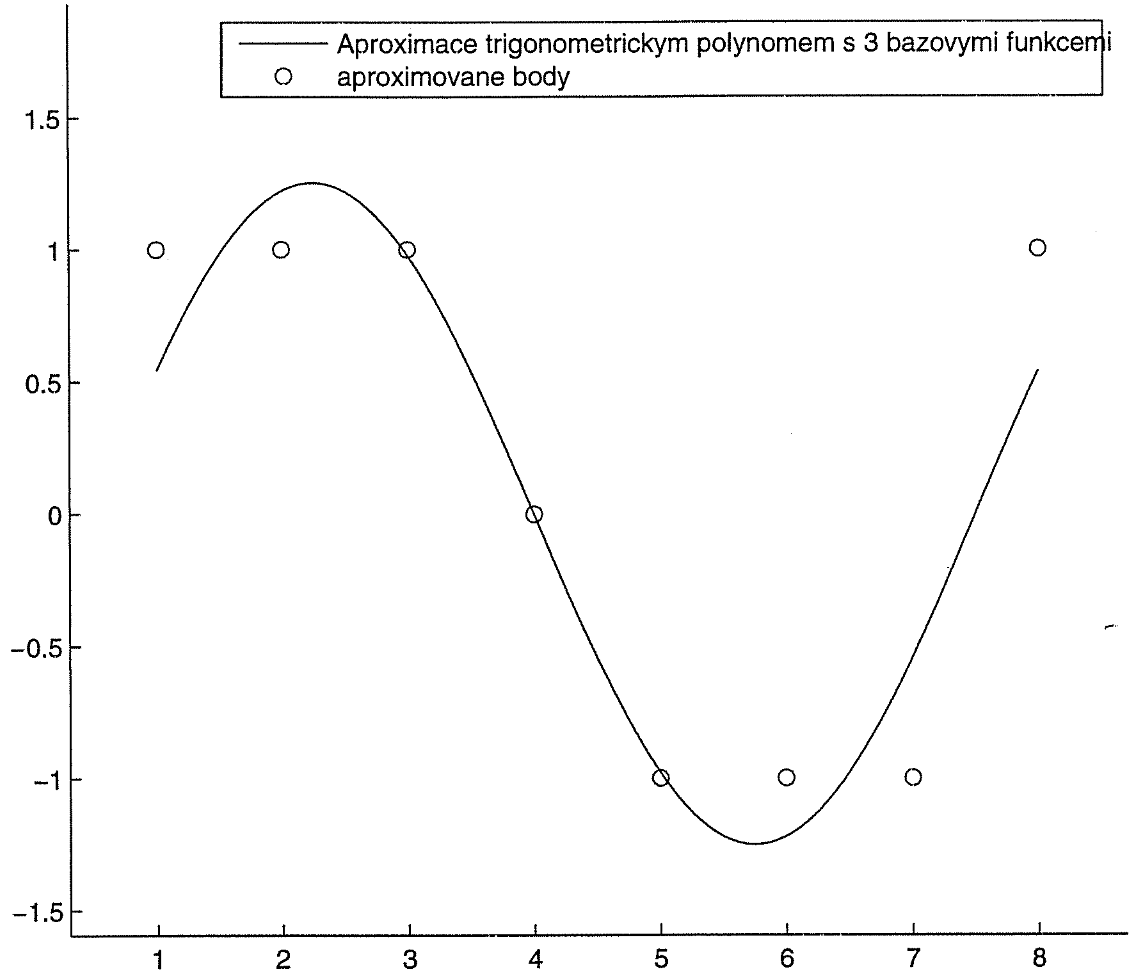
Poznámka

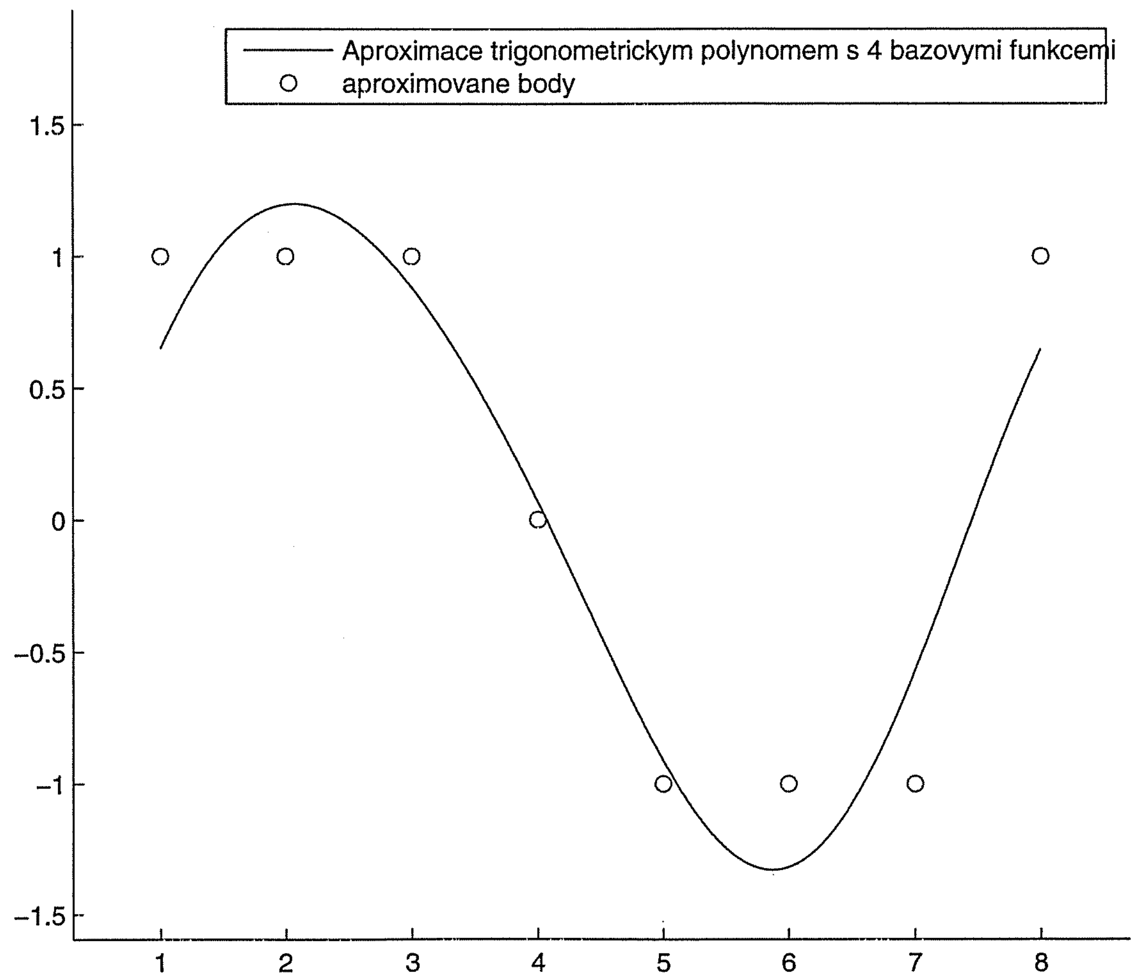
Vezmeme-li aproximující polynom o menším počtu bázových funkcí než je počet zadaných bodů, jedná se o aproximaci ve smyslu metody nejmenších čtverců, tj. diskrétní L_2-aproximaci. Potom obecně nemohou být splněny interpolační podmínky přesně (pouze ve speciálních případech).

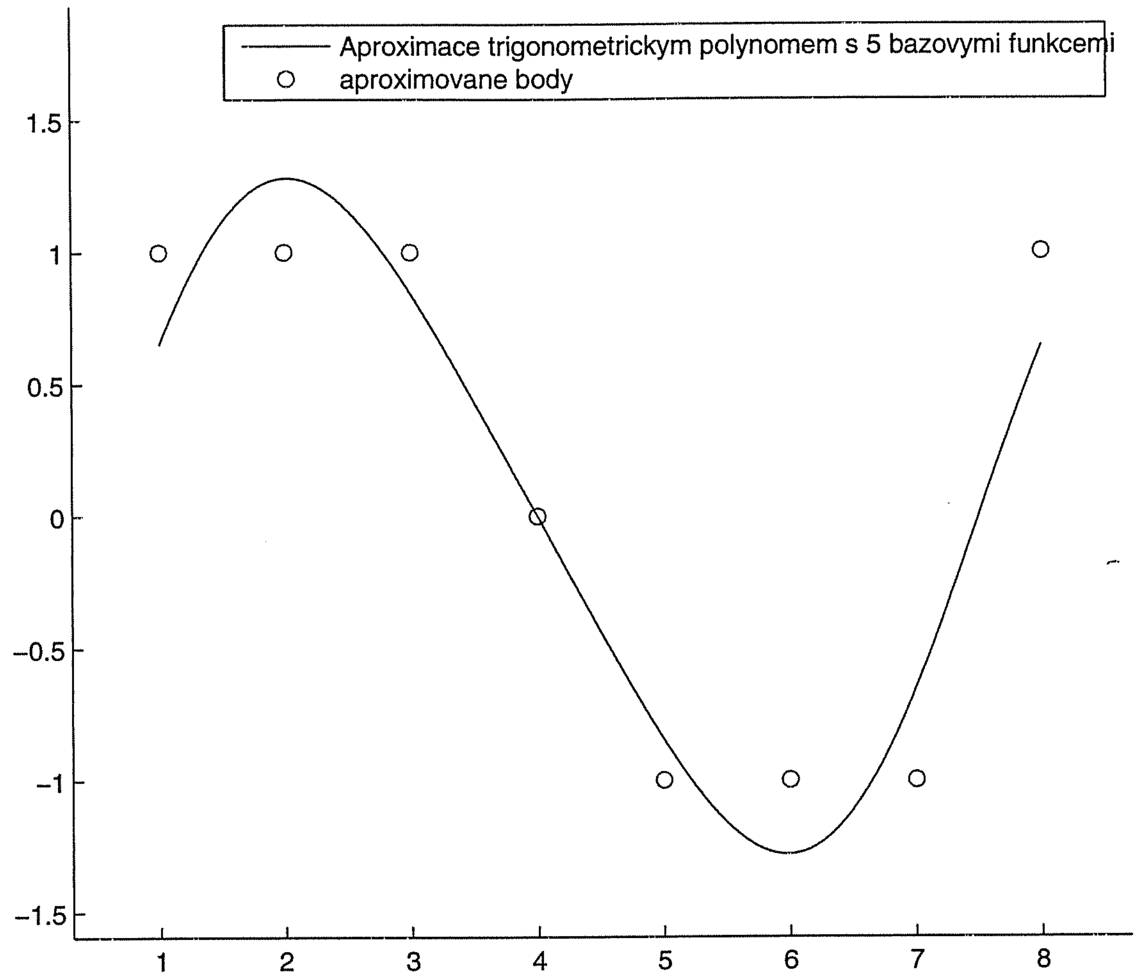
```
-----------------------------------------------------------------
 Fourierova analyza pro funkci zadanou tabulkou

 |    x(k)     |    f(k)     |
 ===========================
 |    1.0000   |    1.0000   |
 |    2.0000   |    1.0000   |
 |    3.0000   |    1.0000   |
 |    4.0000   |    0.0000   |
 |    5.0000   |   -1.0000   |
 |    6.0000   |   -1.0000   |
 |    7.0000   |   -1.0000   |
 |    8.0000   |    1.0000   |

 Stiskni klavesu

 koeficient A(0) = 0.000000    u bazove funkce phi(0) = 1
 koeficient A(1) = 0.543134    u bazove funkce phi(1) = cos(2*pi*1*x/7-1)
 koeficient B(1) = 1.127829    u bazove funkce phi(2) = sin(2*pi*1*x/7-1)
 koeficient A(2) = 0.107574    u bazove funkce phi(3) = cos(2*pi*2*x/7-1)
 koeficient B(2) = 0.085788    u bazove funkce phi(4) = sin(2*pi*2*x/7-1)
 koeficient A(3) = 0.349292    u bazove funkce phi(5) = cos(2*pi*3*x/7-1)
 koeficient B(3) = 0.079724    u bazove funkce phi(6) = sin(2*pi*3*x/7-1)

 Aproximace je dana predpisem :

-----------------------------------------------------------------------
                 L
  phi = A(0) + suma [ A(i)*phi(2i-1) + B(i)*phi(2i) ]
                i=1
                                  pro pocet bazovych funkci N=2L+1
-----------------------------------------------------------------------

-----------------------------------------------------------------------
                L-1
  phi = A(0) + suma [ A(i)*phi(2i-1) + B(i)*phi(2i) ] + A(L)*phi(2L-1)
                i=1
                                  pro pocet bazovych funkci N=2L
-----------------------------------------------------------------------
```

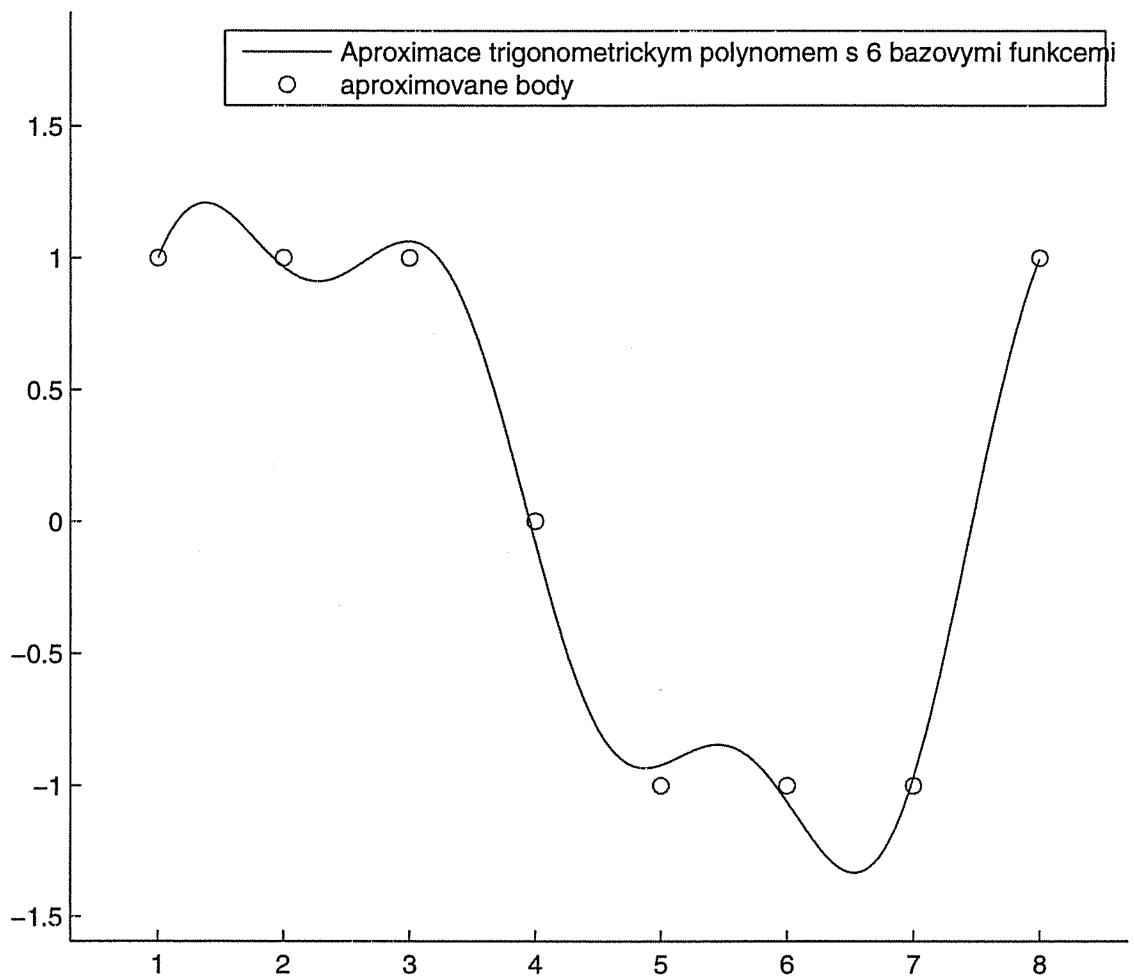

Aproximace trigonometrickym polynomem s 1 bazovymi funkcemi
aproximovane body
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
1
2
3
4
5
6
7
8

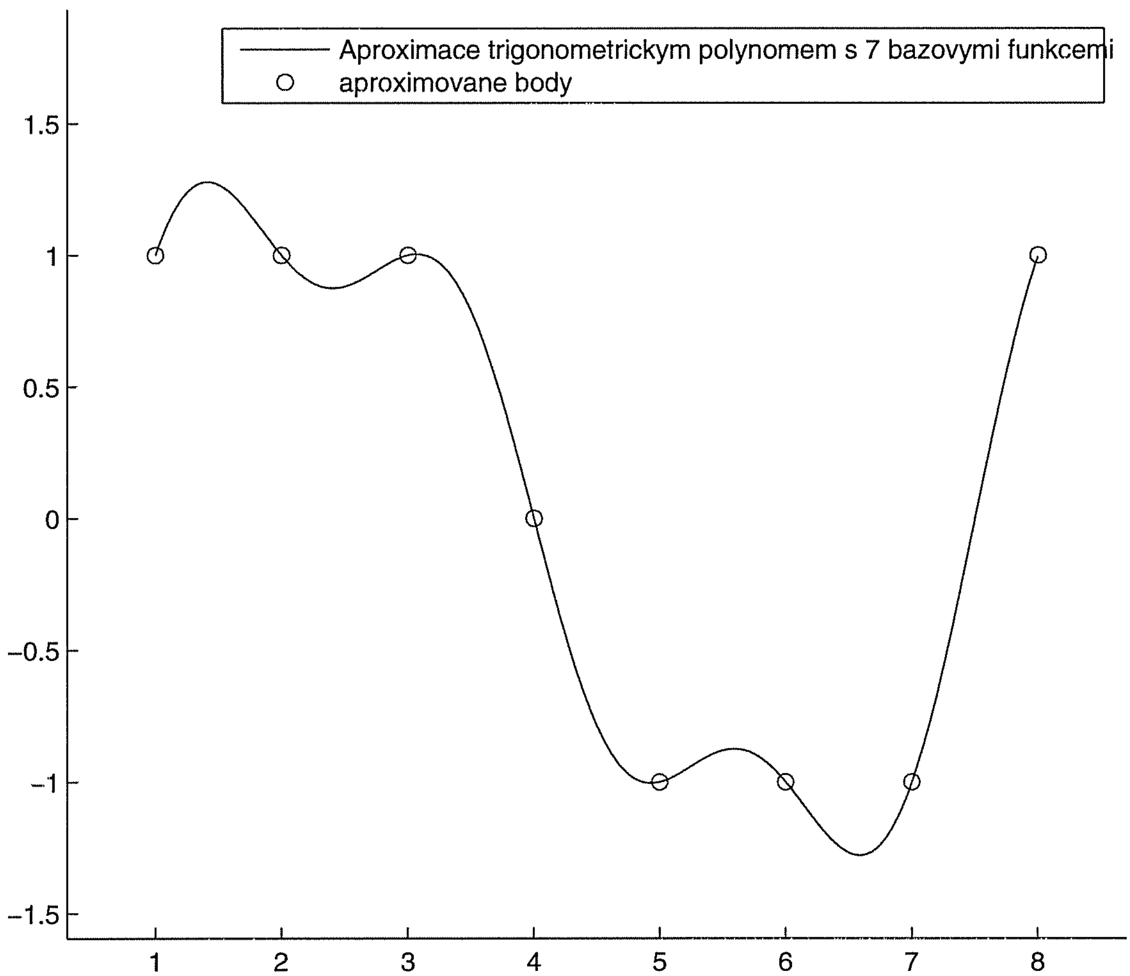

Aproximace trigonometrickym polynomem s 2 bazovymi funkcemi
aproximovane body
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
1
2
3
4
5
6
7
8


Aproximace trigonometrickym polynomem s 3 bazovymi funkcemi
aproximovane body
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
1
2
3
4
5
6
7
8


Aproximace trigonometrickym polynomem s 4 bazovymi funkcemi
aproximovane body
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
1
2
3
4
5
6
7
8


Aproximace trigonometrickym polynomem s 5 bazovymi funkcemi
aproximovane body
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
1
2
3
4
5
6
7
8


Aproximace trigonometrickym polynomem s 6 bazovymi funkcemi
aproximovane body
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
1
2
3
4
5
6
7
8


Aproximace trigonometrickym polynomem s 7 bazovymi funkcemi
aproximovane body
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
1
2
3
4
5
6
7
8

Poznámka

Výpočet koeficientů C_k představuje sčítání konečné řady. Uvažujeme-li počet aproximujících bázových funkcí N jako mocninu čísla 2 (tj. $N = 2^M$), lze odvodit velmi rychlý a efektivní algoritmus pro výpočet koeficientů C_k. Tento algoritmus se potom nazývá **rychlá Fourierova analýza**.

Příklad: $N=4$

x_i	$x_0=0$	$x_1=\frac{\pi}{2}$	$x_2=\pi$	$x_3=\frac{3\pi}{2}$
$f(x_i)$	f_0	f_1	f_2	f_3

Chceme vypočítat koeficienty c_k

Platí:
$$\boxed{c_k=\frac{1}{4}\left(f_0+f_1 e^{-ik\frac{\pi}{2}}+f_2 e^{-ik\pi}+f_3 e^{-ik\frac{3\pi}{2}}\right)},\quad k=0,1,2,3$$

Označme:
$$\boxed{w=e^{-i\frac{\pi}{2}}}\qquad \boxed{F_s=\frac{1}{4}f_s\,,\quad s=0,1,2,3}$$

$$\boxed{c_k=F_0+F_1 w^k+F_2 w^{2k}+F_3 w^{3k}\qquad k=0,1,2,3}$$

Uvědomme si, že platí: $w^4=1$ $(w^N=1)$

$$\boxed{\begin{aligned}
c_0&=\underbrace{(F_0+F_2)}_{R_0}+\underbrace{(F_1+F_3)}_{S_0}\\
c_1&=\underbrace{(F_0+w^2F_2)}_{R_1}+w\underbrace{(F_1+w^2F_3)}_{S_1}\\
c_2&=(F_0+F_2)+w^2(F_1+F_3)\\
c_3&=(F_0+w^2F_2)+w^3(F_1+w^2F_3)
\end{aligned}}$$

Výpočetní náročnost:

na R_i, S_i	$4S+2N$
na c_i	$4S+3N$
Σ	$8S+5N$