APROXIMACE FUNKCÍ

Při numerickém řešení úloh matematické analýzy často nahrazujeme danou funkci f, vystupující v řešené matematické úloze, jinou funkcí φ, která v nějakém vhodném smyslu napodobuje funkci f a snadno se přitom matematicky zpracovává či modeluje na počítači. Tuto funkci φ nazýváme **aproximací funkce** f.

Poznámka: Aproximaci funkce jsme již používali u řešení nelineární rovnice. Například u Newtonovy metody jsme danou funkci f z řešené rovnice $f(x) = 0$ aproximovali lineární funkcí (tečnou ke grafu funkce f); podobně tak tomu bylo u metody sečen.

Poznámka: Již pouhý výpočet funkčních hodnot některých základních funkcí ($\sin x$, e^x, $\ln x$, ...) v počítači či na kalkulačce se provádí užitím aproximace těchto funkcí. Tyto aproximace jsou ovšem zabudovány do výpočetního systému a uživatel si často ani neuvědomuje, že píše-li v programu např. `y=sin(x)`, nahrazuje výpočet hodnoty funkce $\sin x$ výpočtem hodnoty jistého polynomu.

Příklady užití:

- numerické metody pro výpočet určitého integrálu
- zpracování výsledků měření

ZÁKLADNÍ APROXIMAČNÍ ÚLOHA

Je dána funkce $f = f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$. Zvolíme $(n+1)$ lineárně nezávislých funkcí $\varphi_0, \varphi_1, \dots \varphi_n$ a hledáme funkci φ definovanou na $\langle a, b \rangle$, kterou lze vyjádřit ve tvaru lineární kombinace

$$\boxed{\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x)}$$

a která je v nějakém smyslu blízká funkci f.

- Tento typ aproximace se nazývá <u>lineární aproximace</u>
- Pokud za funkce $\varphi_i(x)$ volíme polynomy, mluvíme <u>o polynomiální aproximaci</u>
- Příkladem <u>nelineární aproximace</u> je funkce $\varphi(x)$:

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m}{1 + b_1 x + \dots + b_n x^n}}$$

V tomto případě mluvíme o <u>racionální aproximaci</u>

Aproximace na okolí bodu - Použijeme, chceme-li aproximovat chování funkce v malém okolí bodu. Příkladem může být např. vyčíslení hodnoty $\sin \frac{\pi}{4}$ na kalkulačce.

Interpolace - Použijeme, chceme-li tabulkou danými body proložit polynom, tj. požadujeme-li, aby aproximace přesně procházela zadanými body.

L_2-aproximace - Použijeme, hledáme-li funkční závislost mezi tabulkou danými body (získaných například měřením), kde nutně nevyžadujeme, aby aproximace danými body procházela. Důvodem můžou být např. chyby, se kterými jsme hodnoty naměřili.

$\boxed{\text{Věta}}$ (WEIERSTRASSOVA)

Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na $\langle a, b \rangle$.
Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje přirozené číslo n
a polynom $p_n(x)$ stupně nejvýše n tak, že

$$\boxed{\max_{x \in \langle a, b \rangle} |f(x) - p_n(x)| < \varepsilon}$$

Polynom $p_n(x)$ se pak nazývá
<u>nejlepší aproximací spojité funkce f na $\langle a, b \rangle$</u>

Aproximace na okolí bodu

– mluvíme o **aproximaci Taylorovým polynomem**

Předpokládáme, že daná funkce f má v daném bodě x_0 a jeho okolí spojité derivace až do řádu n. Podmínky pro funkci, která co nejlépe napodobuje chování funkce f matematicky zapíšeme takto:

$$\boxed{\varphi^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0), \quad j = 0, 1, \ldots, n}$$

(hodnoty derivací funkcí f, φ v bodě x_0 jsou stejné až do řádu n)

Tuto podmínku samozřejmě splňuje Taylorův polynom

$$\boxed{T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}$$

Pro chybu aproximace Taylorovým polynomem platí

$$\boxed{e(x) = f(x) - T_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \xi \in \mathcal{U}(x_0)}$$

umíme-li odhadnout $n+1$ derivaci funkce f na daném okolí bodu x_0, můžeme provést následující odhad chyby aproximace:

Platí-li $|f^{(n+1)}(x)| \leq M \quad \forall x \in \mathcal{U}(x_0)$,

potom $|e(x)| \leq \dfrac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}$.

Příklad: Stanovte odhad chyby aproximace Taylorovým polynomem 10. stupně funkce $f(x) = e^x$ v bodě $x_0 = 0$ na intervalu $x \in \langle -1, 1 \rangle$

$$\boxed{T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{10}}{10!}}$$

$f^{(j)}(x) = e^x \quad j = 0, 1 \dots$

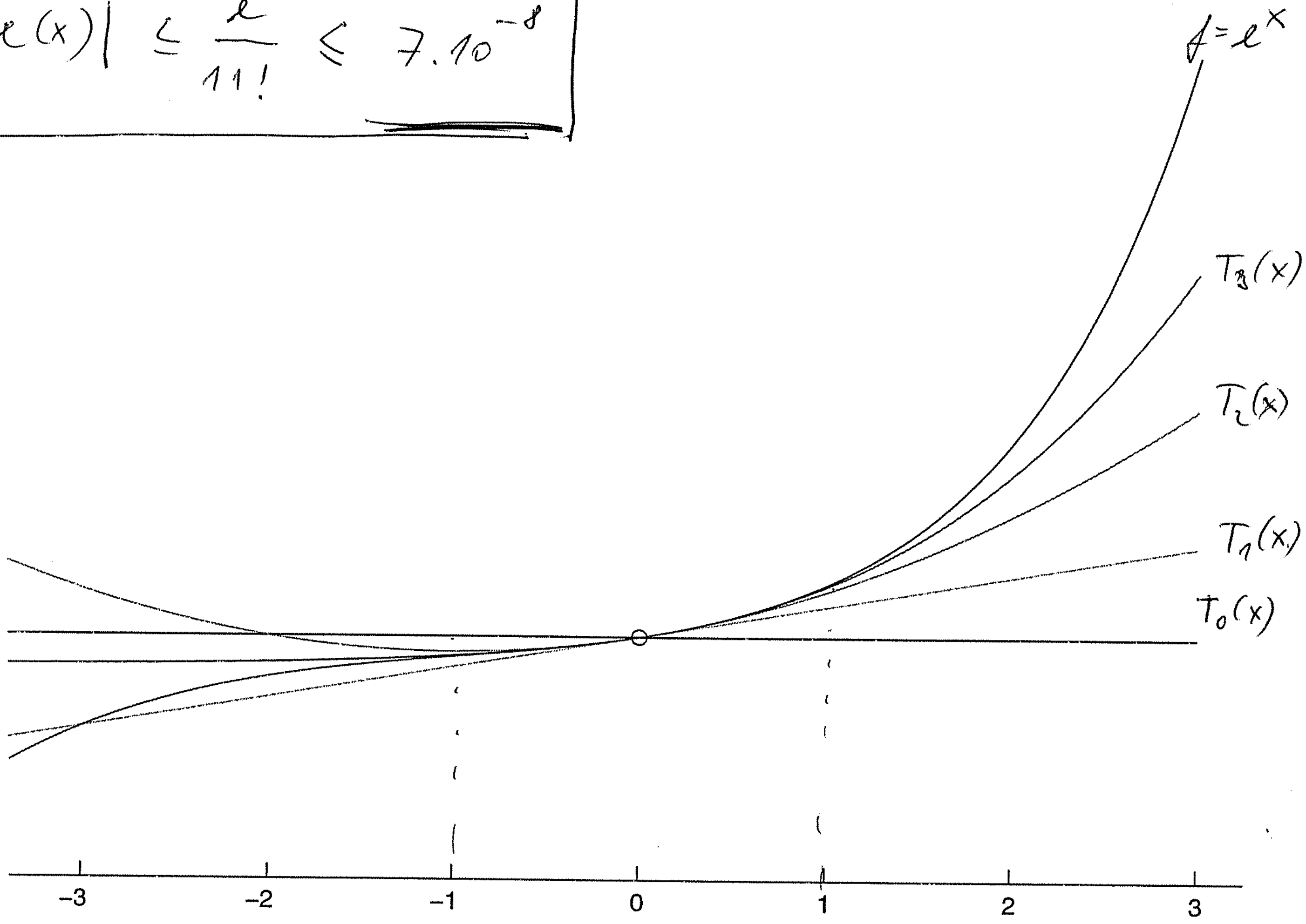
$f^{(j)}(0) = 1 \quad j = 0, 1 \dots$

$$e(x) = e^x - T_{10}(x)$$

$$= \frac{e^{\xi}}{11!} x^{11}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{|e(x)| \le \frac{e}{11!} \le 7 \cdot 10^{-8}}$$



Příklad: Určete stupeň Taylorova polynomu funkce $f(x) = \sin x$ v bodě $x_0 = 0$ tak, aby jeho chyba na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ byla nejvýše 10^{-5} (10^{-12})

$$\boxed{e(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)}$$

Zajímá nás chyba na intervalu délky $2\pi \Rightarrow$ odhad pro $f^{(n+1)}(x)$ je

$$|\underbrace{f^{(n+1)}(x)}_{\substack{\text{buď } \pm \sin x \\ \text{nebo } \pm \cos x}}| \leq 1 \quad \forall x \in \langle -\pi, \pi \rangle$$

(tento odhad je vždy nejmenší možný)

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq 10^{-5} \quad \forall x \in \langle -\pi, \pi \rangle$$

$$\frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!} \leq 10^{-5}$$

n	$\frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}$
0	π
1	4,9348022...
2	5,1677127...
3	4,0587121...
	⋮
→	$< 10^{-5}$ (10^{-12})

n	$\frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}$	
tab =		
0	3.14159265358979	
1.00000000000000	4.93480220054468	
2.00000000000000	5.16771278004997	
3.00000000000000	4.05871212641677	
4.00000000000000	2.55016403987735	
5.00000000000000	1.33526276885459	
6.00000000000000	0.59926452932079	
7.00000000000000	0.23533063035889	
8.00000000000000	0.08214588661113	
9.00000000000000	0.02580689139001	
10.00000000000000	0.00737043094571	
11.00000000000000	0.00192957430940	
12.00000000000000	0.00046630280577	
13.00000000000000	0.00010463810492	
14.00000000000000	0.00002191535345	
$n =$ 15.00000000000000	0.00000430306959	$< 10^{-5}$
16.00000000000000	0.00000079520540	
17.00000000000000	0.00000013878952	
18.00000000000000	0.00000002294843	
19.00000000000000	0.00000000360473	
20.00000000000000	0.00000000053927	
21.00000000000000	0.00000000007701	
22.00000000000000	0.00000000001052	
23.00000000000000	0.00000000000138	
$n =$ 24.00000000000000	0.00000000000017	$< 10^{-12}$

Jak vypadá Taylorův polynom $T_n(x)$?

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin x & f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -1 \\ \hline f^{(4)}(x) = \sin x & f^{(4)}(0) = 0 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

$$T_n(x) = \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{f(x_0)} + \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{f'(x_0)}(x - \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x_0}) + \frac{1}{2!}\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{f''(x_0)}(x - \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x_0})^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x_0})^n$$

$$\boxed{T_{15}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} - \frac{x^{15}}{15!}}$$

Má-li kalkulačka vypočítat např. $\sin 0{,}4$ a máme povolenu chybu $\underline{\underline{10^{-5}}}$, určí $\boxed{\sin 0{,}4 \doteq T_{15}(0{,}4)}$

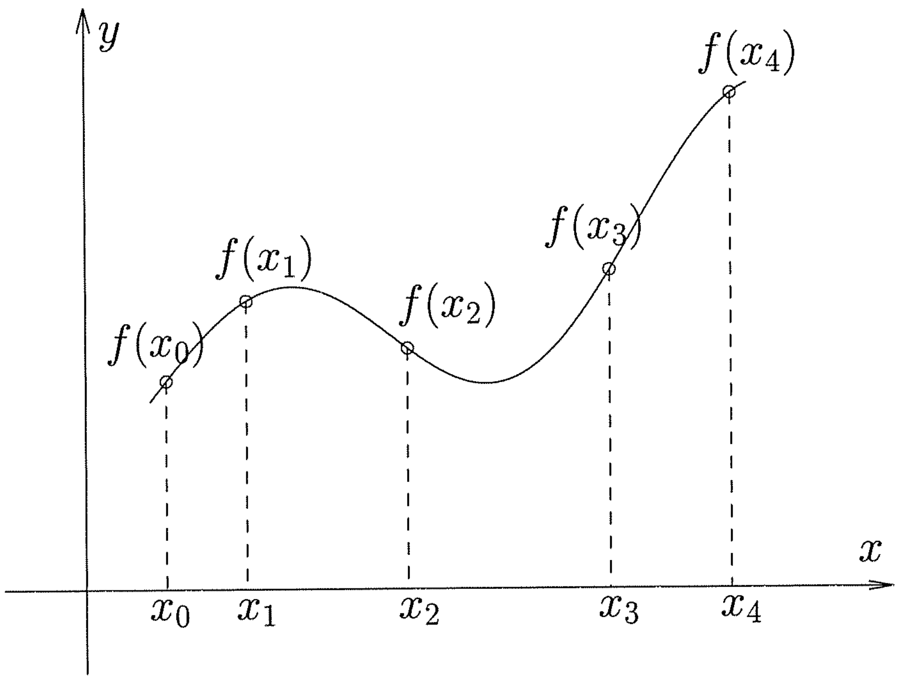
Pro chybu $\underline{\underline{10^{-12}}}$ stačí určit $\boxed{\sin 0{,}4 \doteq T_{24}(0{,}4)}$, tj. přičíst další 4 členy.

<u>Pozn</u>: Toholo lze užít i pro výpočet v bodech mimo interval $\langle -\pi, \pi \rangle$. Stačí využít periodičnosti fce $\sin x$.

Aproximace interpolačním polynomem

Aproximujeme funkci, která je dána svými hodnotami v $n+1$ bodech $x_i, i = 0, 1, \ldots, n$ (body x_i nazýváme uzly interpolace), a požadujeme, aby aproximace procházela zadanými body.

Aproximace nám potom poslouží k získání přibližné hodnoty zadané funkce v libovolném bodě intervalu $\langle x_0, x_n \rangle$.



<u>INTERPOLAČNÍ PODMÍNKY:</u>

$$\boxed{P_n(x_i) = f(x_i) \qquad i = 0, 1, \ldots, n}$$

Chyba $\underline{e(x) = f(x) - P_n(x)}$ pak nabývá nulových hodnot v uzlech interpolace

Věta: Interpolační úloha má jediné řešení, pokud uzly $x_0, x_1, \dots x_n$ jsou navzájem různé.

Důkaz: Interpolační polynom uvažujeme ve tvaru:

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k}$$

Dosazením do interpolačních podmínek získáme soustavu $(n+1)$ lin. rovnic pro koeficienty $a_0, a_1 \dots a_n$.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k = f(x_i) \qquad i = 0, 1, \dots n}$$

Matice soustavy (Vandermondova matice):

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}$$

Soustava má právě jedno řešení, pokud $\boxed{\det V \neq 0}$

Matici soustavy převedeme na $\triangledown$ tvar

- přičtením násobku řádku k jinému řádku se determinant nezmění
- vynásobíme-li řádek číslem α, pak je determinant α násobkem původního

$$V \sim \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \dots & x_0^n \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & x_1^3 - x_0^3 & \dots & x_1^n - x_0^n \\ 0 & x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0^2 & x_2^3 - x_0^3 & \dots & x_2^n - x_0^n \\ \vdots & & & & & \\ 0 & x_n - x_0 & x_n^2 - x_0^2 & x_n^3 - x_0^3 & \dots & x_n^n - x_0^n \end{bmatrix}$$

od 2 až $(n+1)$ řádku jsme odečetli 1. řádek

vynormujeme:

$$V \approx \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \dots & x_0^n \\ 0 & 1 & \frac{x_1^2 - x_0^2}{x_1 - x_0} & \frac{x_1^3 - x_0^3}{x_1 - x_0} & \dots & \\ 0 & 1 & \frac{x_2^2 - x_0^2}{x_2 - x_0} & \frac{x_2^3 - x_0^3}{x_2 - x_0} & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 1 & \frac{x_n^2 - x_0^2}{x_n - x_0} & \frac{x_n^3 - x_0^3}{x_n - x_0} & \dots & \end{bmatrix}$$

$(j+1)$-ní řádek jsme vydělili $(x_j - x_0)$ $j = 1, \dots, n$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \cdots & x_0^n \\ 0 & 1 & x_1 + x_0 & x_1^2 + x_1 x_2 + x_0^2 & \cdots & \\ 0 & 0 & x_2 - x_1 & (*) & \cdots & \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 & (**) & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & x_n - x_1 & \cdots & & \end{bmatrix}$$

od 3 až $(n+1)$ řádku jsme odečetli 2 řádek

$$(*) = \frac{x_2^3 - x_0^3}{x_2 - x_0} - \frac{x_1^3 - x_0^3}{x_1 - x_0} = \left(x_2^2 + x_2 x_0 + x_0^2\right) - \left(x_1^2 + x_1 x_0 + x_0^2\right) =$$

$$= x_2^2 - x_1^2 + x_0 (x_2 - x_1) =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + x_0)$$

$$(**) \quad \frac{x_3^3 - x_0^3}{x_3 - x_0} - \frac{x_1^3 - x_0^3}{x_1 - x_0} = \left(x_3^2 + x_3 x_0 + x_0^2\right) - \left(x_1^2 + x_1 x_0 + x_0^2\right) =$$

$$= x_3^2 - x_1^2 + x_0 (x_3 - x_1) =$$

$$= (x_3 - x_1)(x_3 + x_1 + x_0)$$

$$\vdots$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \dots & x_0^n \\ 0 & 1 & x_1 + x_0 & x_1^2 + x_1 x_0 + x_0^2 & \dots & \\ 0 & 0 & 1 & x_2 + x_1 + x_0 & \dots & \\ 0 & 0 & 1 & x_3 + x_1 + x_0 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 1 & x_n + x_1 + x_0 & \dots & \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{(j+1)-ní řádek jsme vydělili } (x_j - x_1) \quad j = 2, \dots n}$

$\vdots$

Získáme ∇ matici s jedničkami na diagonále, tj výsledná matice má determinant roven 1. Při úpravách jsme dělili $(x_j - x_i)$, $j > i$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\det V = \prod_{j>i}^{n} (x_j - x_i)}$$

$$\det V \neq 0 \iff x_i \neq x_j \quad \forall i \neq j$$

Lagrangeův interpolační polynom

Označme si hledaný polynom n-tého stupně $L_n(x)$. Víme, že musí být splněny interpolační podmínky

$$\boxed{L_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n.}$$

Lagrangeův interpolační polynom hledáme ve tvaru

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot l_i(x),}$$

kde $l_i(x)$ jsou polynomy n-tého stupně takové, že platí

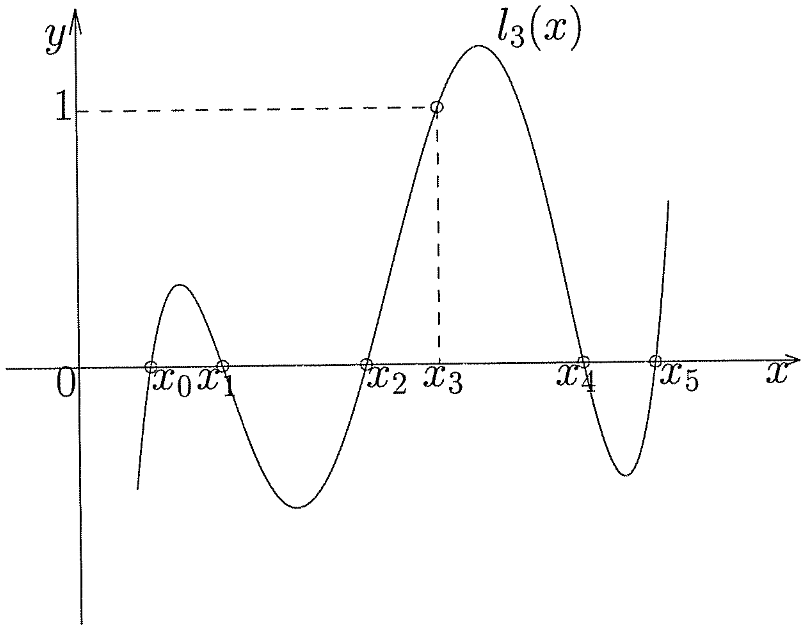
$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{matrix} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{matrix}$$

(snadno se přesvědčíte, že dosadíte-li do předpisu pro $L_n(x)$ uzly interpolace, získáte zadané interpolační podmínky).

Konkretizujme nyní dílčí polynomy $l_i(x)$. Víme, že $l_i(x)$ má kořeny $x_0, x_1, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n$ a nabývá hodnoty 1 v bodě x_i. Můžeme jej tedy zapsat ve tvaru

$$\boxed{l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n)}}$$

Na obrázku je ukázán příklad dílčího polynomu $l_3(x)$:



Newtonův interpolační polynom

Označme si hledaný polynom n-tého stupně $N_n(x)$. Pro jeho odvození použijeme jinou kontrukci. Polynom volíme ve tvaru

$$\boxed{N_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}$$

Opět požadujeme splnění interpolačních podmínek

$$\boxed{N_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n.}$$

Poznámka: Výhodou volby tohoto zdánlivě složitého předpisu je fakt, že přidáme-li další bod interpolace $[x_{n+1}, f(x_{n+1})]$, nemusíme celý výpočet opakovat, ale stačí dopočítat příslušný koeficient a_{n+1} (ostatní koeficienty a_i zůstávají beze změny). U Lagrangeova polynomu bychom museli celý výpočet provést znovu.

Ukažme si co dostaneme dosazováním interpolačních podmínek do předpisu polynomu:

$$N_n(x_0) = \boxed{a_0 = f(x_0)}$$

$$N_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}$$

$$N_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0) - a_1 \overbrace{(x_2 - x_0)}^{x_2 - x_1 + x_1 - x_0}}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} =$$

$$= \frac{f(x_2) - f(x_0) - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_1) - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} =$$

$$= \frac{f(x_2) - f(x_1) - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} =$$

$$\boxed{a_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}}$$

Poznámka:

Počítat koeficienty a_i přímo ze soustavy není praktické.

Koeficienty budeme počítat pomocí tzv. **poměrných diferencí**.

$\boxed{\text{ALGORITMUS}}$ (KOEFICIENTY NEWTONOVA POLYNOMU)

Pro $i = 0, 1, \dots n$

$$\boxed{A_{i0} = f(x_i)}$$

Pro $k = 1, 2, \dots i$

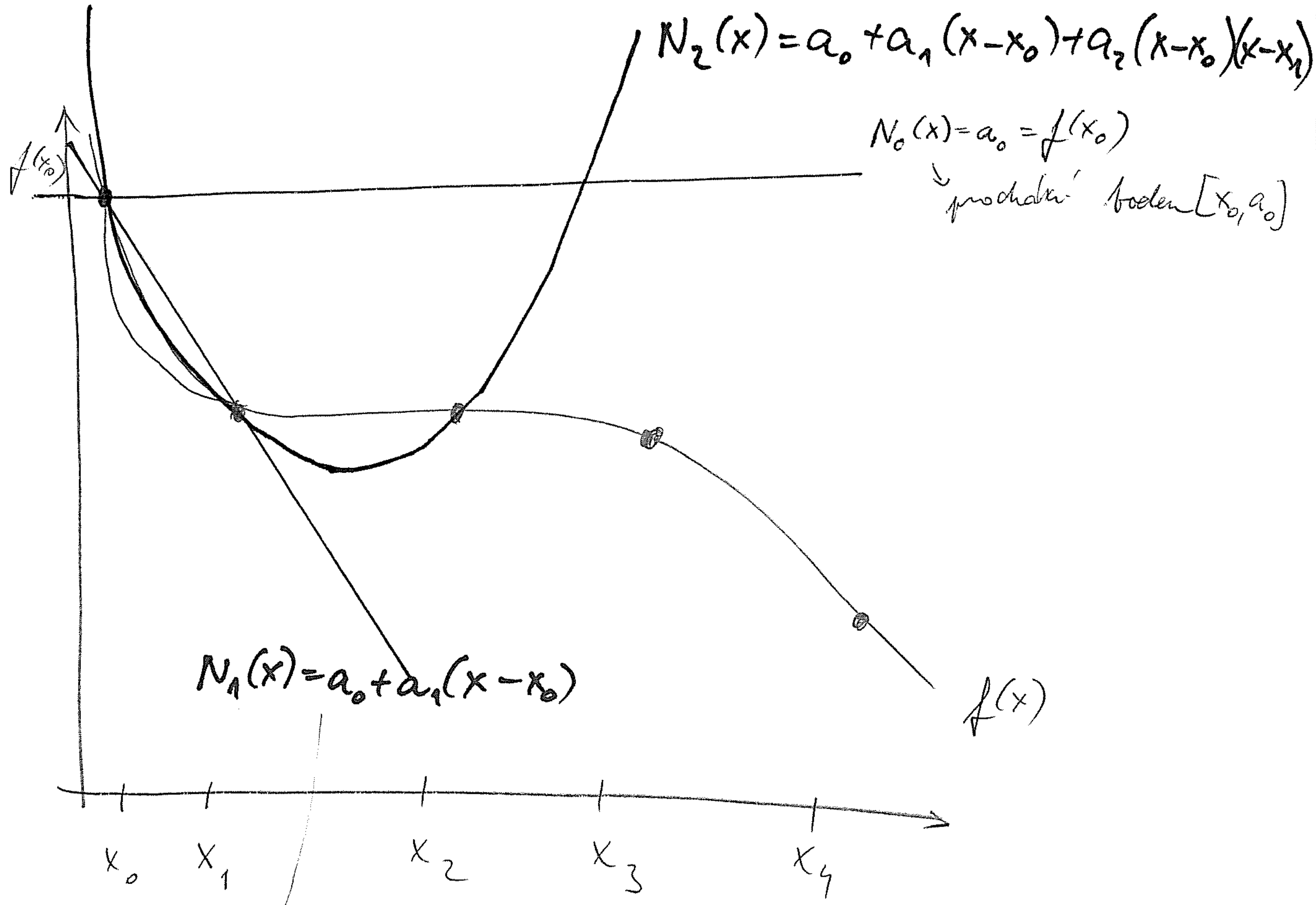
$$\boxed{A_{ik} = \frac{A_{i,k-1} - A_{i-1,k-1}}{x_i - x_{i-k}}}$$

Výstup: $\boxed{a_i = A_{ii}}$

Schéma algoritmu

x_0	$f(x_0) = A_{00} = a_0$				
x_1	$f(x_1) = A_{10}$	$A_{11} = a_1$			
x_2	$f(x_2) = A_{20}$	A_{21}	$A_{22} = a_2$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
x_n	$f(x_n) = A_{n0}$	A_{n1}	A_{n2}	$\dots$	$A_{nn} = a_n$

Pozn: Vezmu-li z matice A pouze prvních M řádků, znamená, to že jsem sestavil Newtonův polynom pro pouze prvních M zadaných tabulkových bodů.



$N_1(x)$ prochází bodem $[x_0, \overset{f(x_0)}{\overset{\shortparallel}{a_0}}]$ a směrnici má takovou, aby procházela také bodem $[x_1, f(x_1)]$.

$N_2(x)$ prochází bodem $[x_0, \overset{f(x_0)}{\overset{\shortparallel}{a_0}}]$, prochází bodem $[x_1, f(x_1)]$,

protože $N_2(x_1) = N_1(x_1)$, navíc prochází bodem $[x_2, f(x_2)]$.

$$N_2(x) = \overbrace{a_0 + a_1(x-x_0)}^{N_1(x)} + a_2(x-x_0)(x-x_1)$$

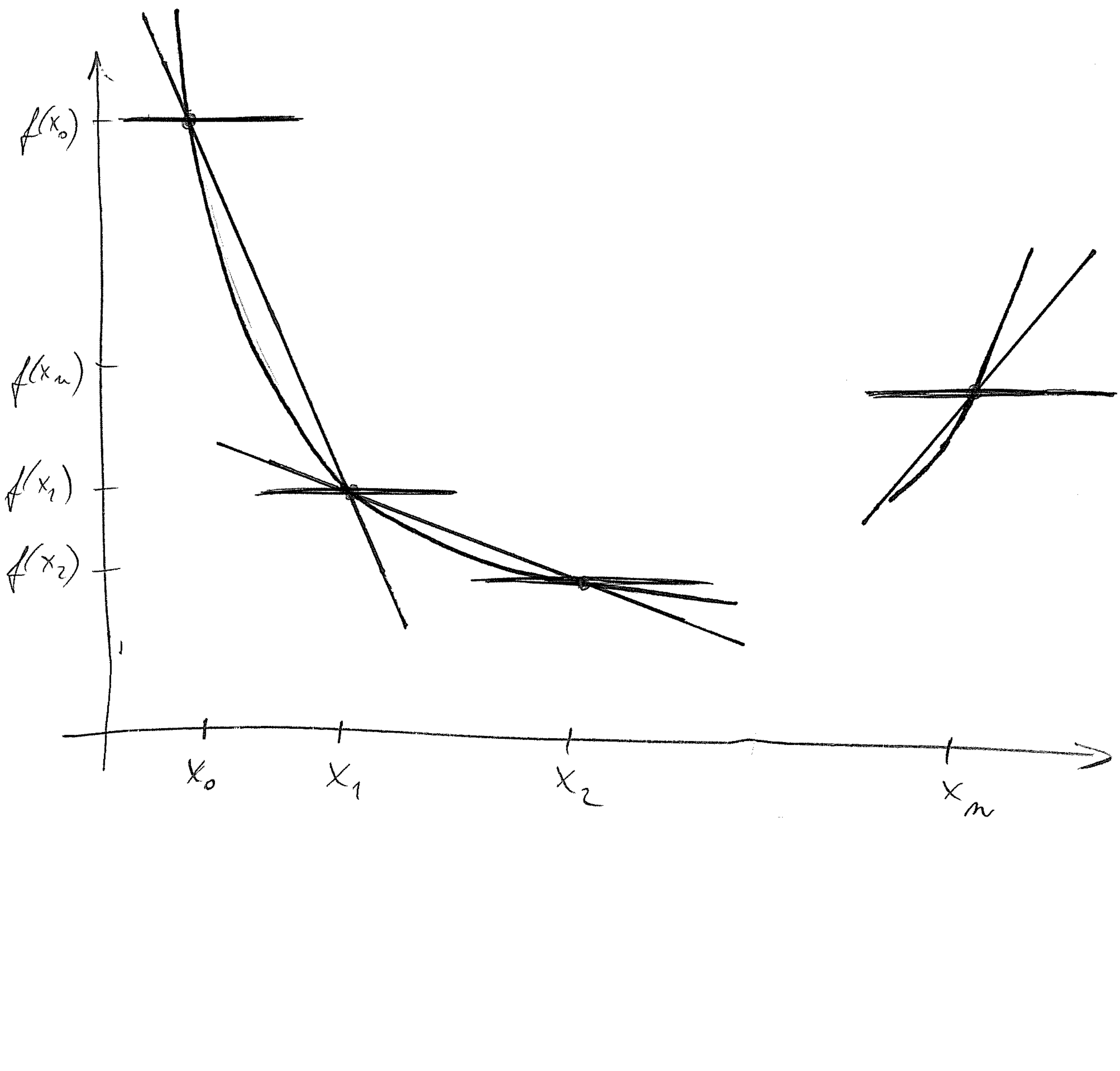
prochází $[x_0, f(x_0)]$

přidáme tento člen tak, aby se zachoval průchod $[x_0, f(x_0)]$ (hodnota pro $x = x_0$ je 0) a_1 se určí tak, aby procházel $[x_1, f(x_1)]$

přidáme tento člen tak, aby se zachoval průchod $[x_0, f(x_0)]$ a $[x_1, f(x_1)]$ (hodnota členu pro $x = x_0$ a $x = x_1$ je nulová) a_2 se určí tak, aby procházel bodem $[x_2, f(x_2)]$

Co znamenají jednotlivá čísla v tabulce?

x_0	$f(x_0)$	$=$	A_{00}		
x_1	$f(x_1)$	$=$	A_{10}	A_{11}	
x_2	$f(x_2)$	$=$	A_{20}	A_{21}	A_{22}
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	$f(x_n)$	$=$	$\underline{A_{n0}}$	A_{n1}	A_{n2}



Věta Má-li funkce f, které přísluší data $f(x_i)$, $i=0,1,\dots n$, spojité derivace v nějakém intervalu

$$\langle a,b\rangle \subset \operatorname{int}(x_0, x_1, \dots x_n)$$

do řádu n a derivaci $f^{(n+1)}(x)$ v (a,b) potom $\forall x \in \langle a,b\rangle\ \exists \xi=\xi(x) \in (a,b)$ tak, že

$$(*)\quad \boxed{e(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\underbrace{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}_{\text{polynom }(n+1)\text{ stupně}}}$$

Důkaz: pomocí věty o stř. hodnotě, viz dále.

Odhad chyby interpolace

Umíme-li stanovit číslo M takové, že $\forall x \in \langle a,b\rangle$ je $|f^{(n+1)}(x)| \le M$, pak

$$\boxed{|e(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|w(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}\max_{x\in\langle a,b\rangle}|w(x)|}$$

kde jsme označili $\underline{w(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}$

$\Rightarrow$ průběh chyby nezávisí jen na $f^{(n+1)}(x)$, ale i na $\underline{w(x)}$!

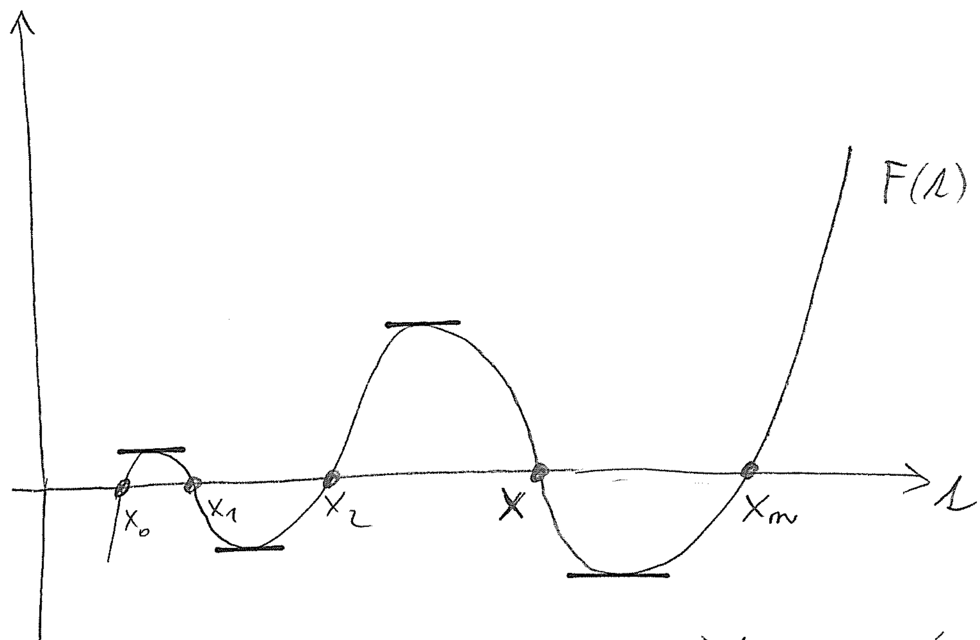
DŮKAZ: Zvolme bod $x \neq x_i$, $i = 0, 1, \dots n$ libovolně.

Definujme
$$\boxed{F(t) = f(t) - P_n(t) - \frac{f(x) - P_n(x)}{w_{n+1}(x)} w_{n+1}(t)} \quad (**)$$

Tato funkce proměnné t má $n+2$ nulových bodů:

- x_i, $i = 0, 1, \dots n$:
$$F(x_i) = \underbrace{f(x_i) - P_n(x_i)}_{=0} - \frac{f(x) - P_n(x)}{w_{n+1}(x)} \cdot \underbrace{w_{n+1}(x_i)}_{=0} = 0$$

- x:
$$F(x) = f(x) - P_n(x) - \frac{f(x) - P_n(x)}{w_{n+1}(x)} \cdot w_{n+1}(x) = 0$$



Použijeme-li $(n+1)$ krát Rolleovu větu, zjistíme, že první derivace $F'(t)$ má v (a, b) aspoň $n+1$ nulových bodů

(Rolleova věta: Nechť $f(x)$ je v $\langle a, b \rangle$ spojitá a má v (a, b) derivaci. Nechť $f(a) = f(b)$. Pak existuje aspoň 1 bod $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.)

Pokračujeme dál a aplikujeme nyní Rolleovu větu na funkci $F'(t)$ a zjistíme, že $F''(t)$ má v (a,b) aspoň n nulových bodů, atd.

$(n+1)$-ní derivace $F^{(n+1)}(t)$ má v (a,b) aspoň jeden nulový bod a ten označíme $\xi = \xi(x)$.

---

vztah ⊛⊛ zderivujeme $(n+1)$ krát podle t:

$$\underbrace{F^{(n+1)}(t)} = f^{(n+1)}(t) - \underbrace{P_n^{(n+1)}(t)}_{=0} - \frac{f(x)-P_n(x)}{w_{n+1}(x)} \cdot \underbrace{w_{n+1}^{(n+1)}(t)}_{=(n+1)!}$$

Víme, že existuje ξ tak, že $F^{(n+1)}(\xi)=0$

(P_n .. polynom n-tého stupně)

($w_{n+1}(t)$ je polynom $(n+1)$ stupně a u t^{n+1} je koef. 1)

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x)-P_n(x)}{w_{n+1}(x)} \cdot (n+1)!$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\, w_{n+1}(x)}$$

$\blacksquare$

- Při interpolaci v ekvidistantních uzlech polynomy vyšších stupňů mohou mít nepřesnosti ve vstupních datech silný vliv na hodnotu výsledku

  → úloha je špatně podmíněná

  Pozn: Špatná podmíněnost platí ještě více i pro extrapolaci.

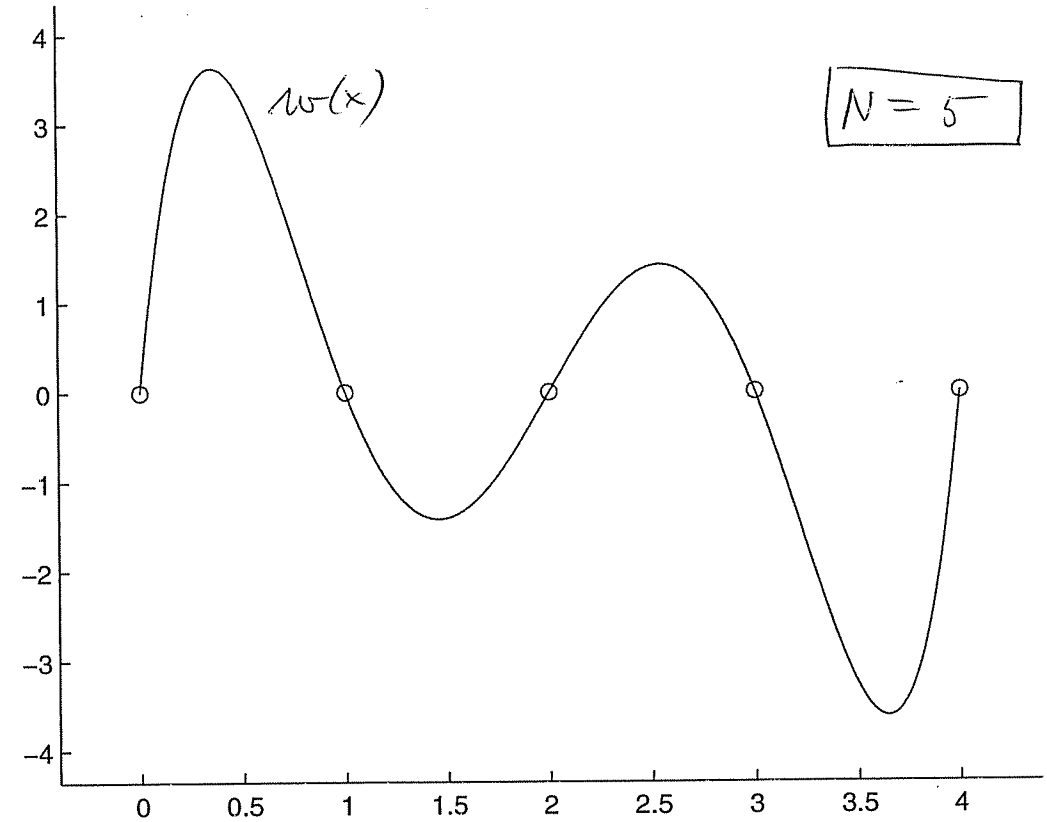
  $\boxed{\text{OBR}}$

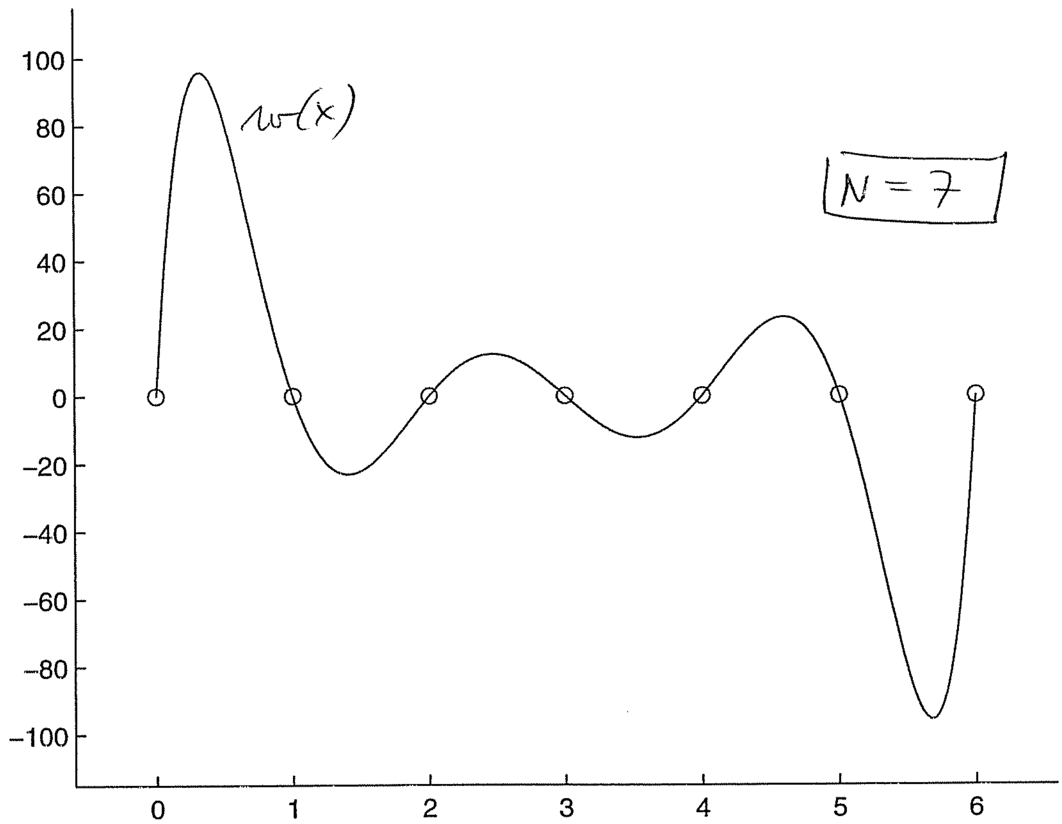
- Dobrou strategií je volit x_i tak, aby byly rozloženy stejně jako kořeny Čebyševových polynomů

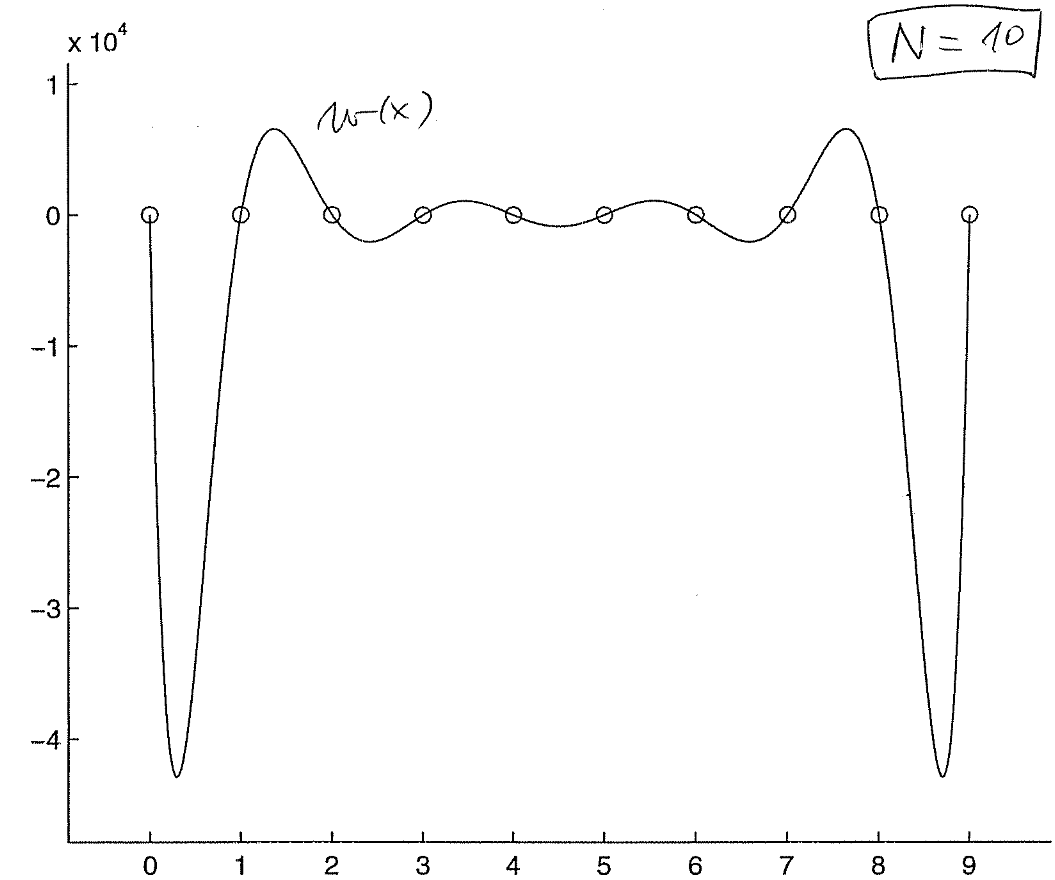
  → minimalizuje se tak hodnota $\max |w(x)|$

  $\boxed{\text{OBR}}$

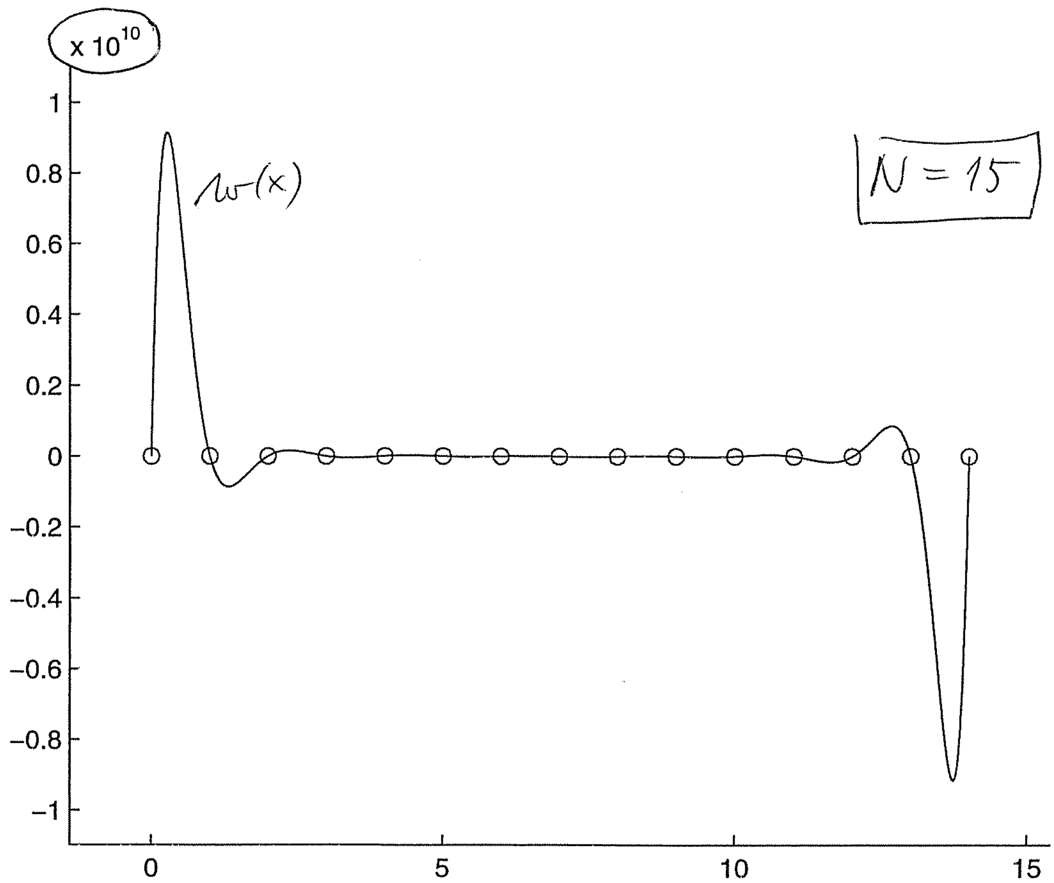
EKVIDISTANTNÍ UZLY





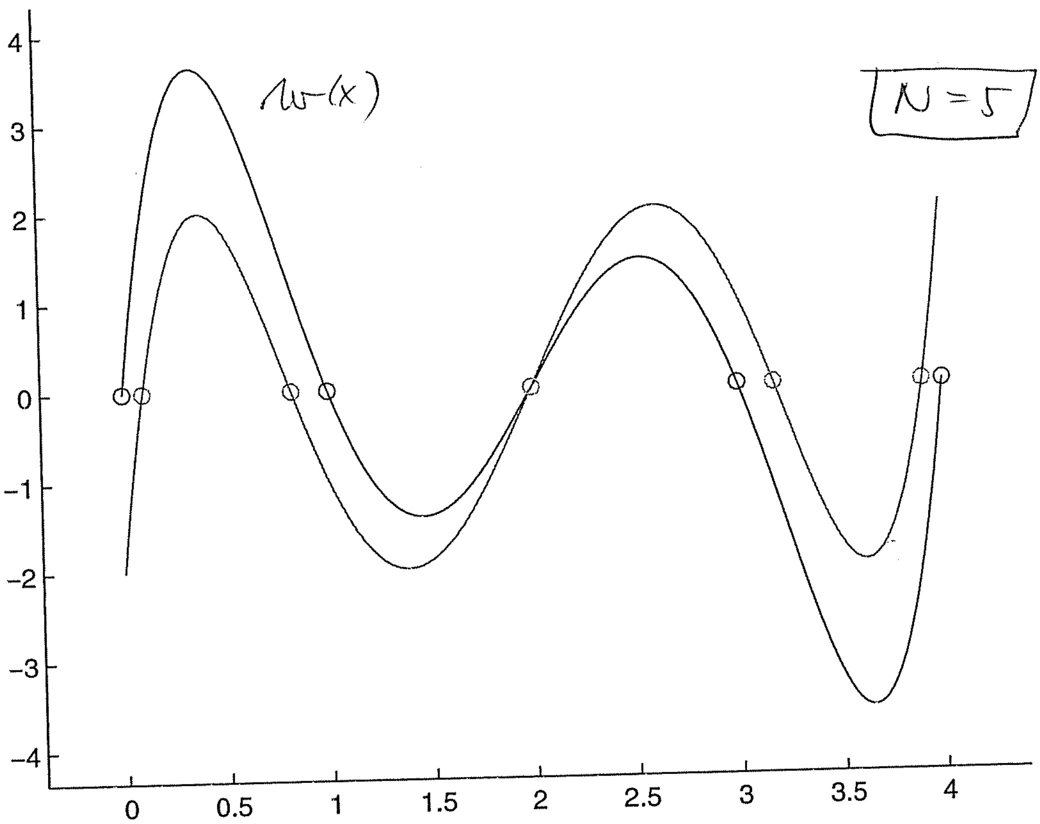


$$\frac{1}{15!} = \frac{1}{1{,}3 \cdot 10^{12}}$$

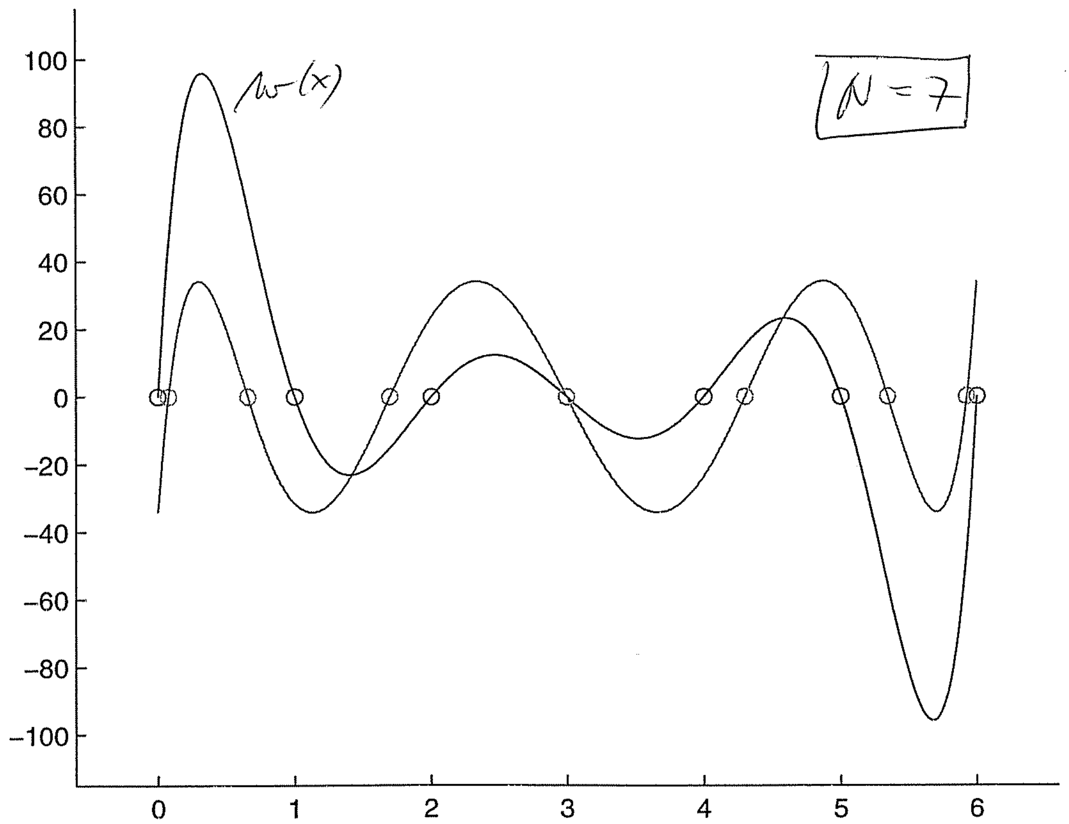


POUŽITÍ NEEKVIDISTANTNÍCH UZLŮ

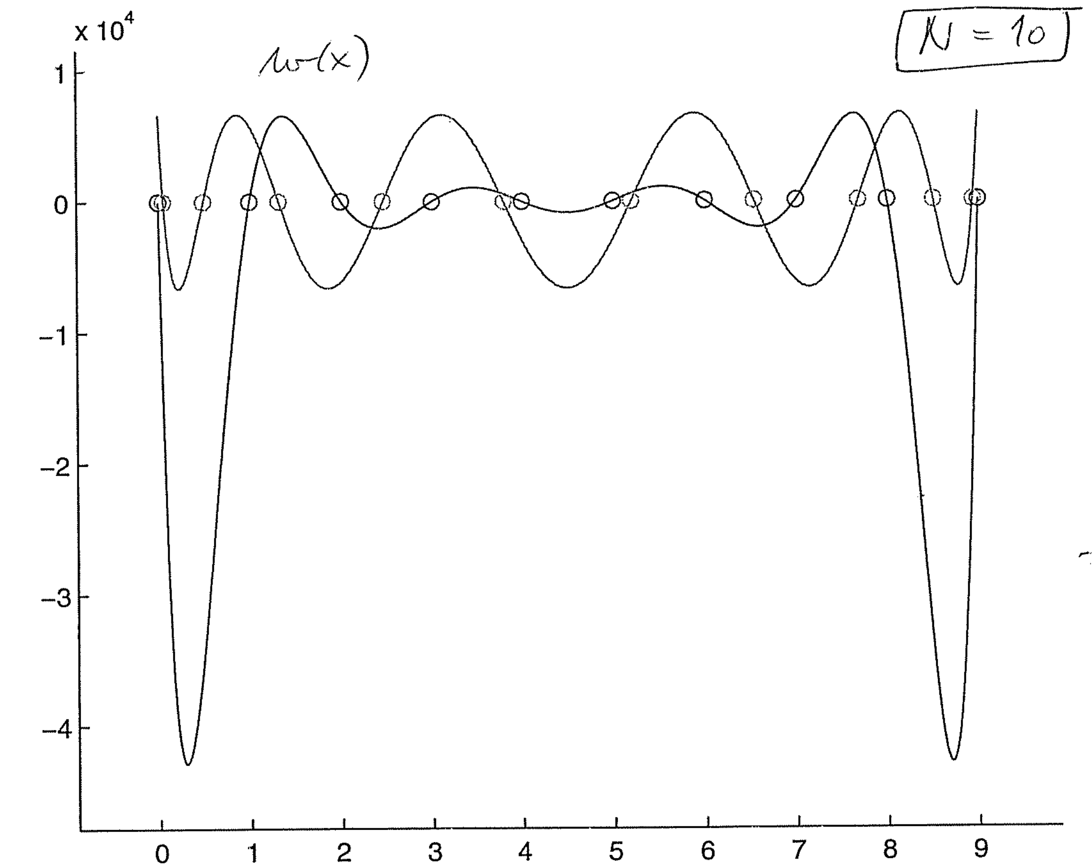
$\frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$



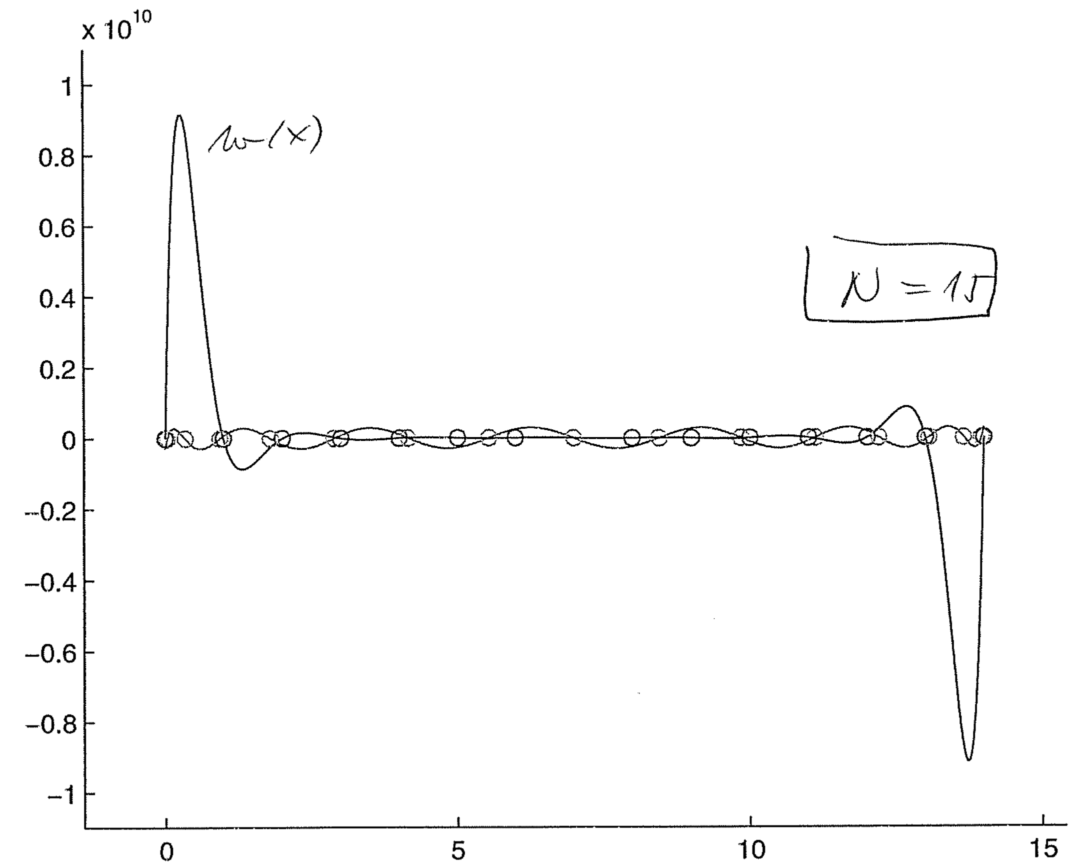
$\frac{1}{7!} = \frac{1}{5040}$



$\frac{1}{10!} = \frac{1}{3628800}$



$\frac{1}{15!} = \frac{1}{1{,}3 \cdot 10^{12}}$



Čebyševovy polynomy

$$\boxed{\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_{n+1}(x) &= 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x) \end{aligned}}$$

Užijeme-li substituci $\underline{x = \cos\alpha}$, $\underline{\alpha = \arccos x}$ a goniometrické vzorce, dostaneme

$$\boxed{T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x) \qquad x \in \langle -1, 1\rangle}$$

Dk:

$$T_0(x) = \cos(0 \cdot \arccos x) = 1 \ \checkmark$$

$$T_1(x) = \cos(1 \cdot \arccos x) = x \ \checkmark$$

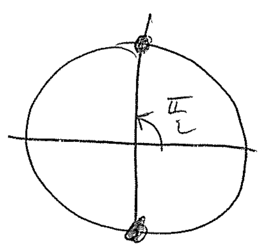
$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$ dosadíme do

$$\cos(\underbrace{(n+1)\arccos x}_{\alpha}) = 2x\cos(n\arccos x) - \cos(\underbrace{(n-1)\arccos x}_{\beta})$$

platí!

$$\boxed{\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Kořeny polynomů jsou



$$\cos(n\arccos x) = 0$$

$$n\arccos x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\arccos x_k = \frac{2k+1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right) \quad k = 0, 1, \dots n-1} \qquad (*)$$

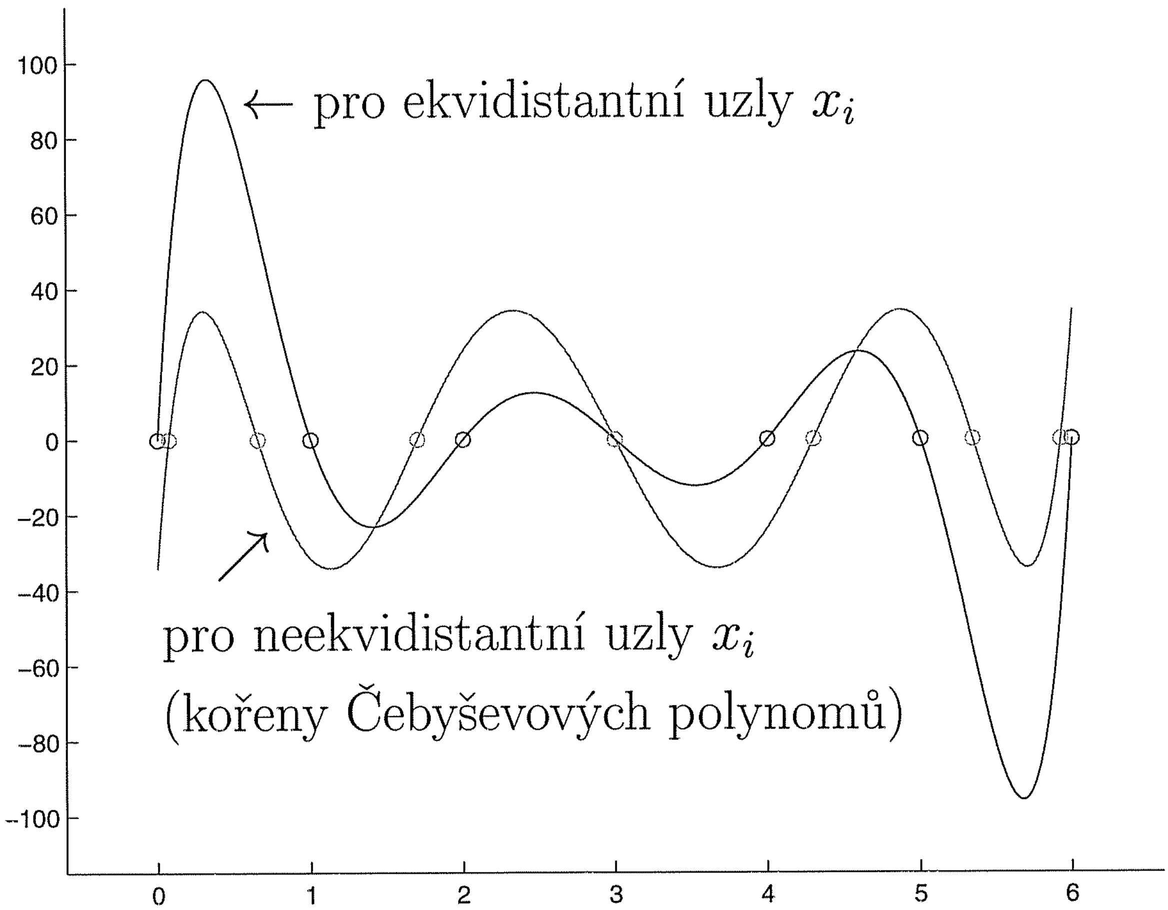
Pozn: pro obecný interval $\langle a, b\rangle$ použijeme transformaci

$$r_k = \frac{b-a}{2}x_k + \frac{a+b}{2}$$

Strategie volby uzlů pro interpolaci polynomem

$$w(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_N)$$

<u>Příklad:</u> N=6 (tj. pro 7 uzlů)



Čebyševova aproximace

K dané spojité funkci $f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, chceme najít mezi všemi polynomy $P_n(x)$ stupně nejvýše n takový polynom $P_n^*(x)$, který splňuje:

$$\boxed{\max_{x \in \langle a,b \rangle} |f(x) - P_n^*(x)| = \min_{P_n(x)} \max_{x \in \langle a,b \rangle} |f(x) - P_n(x)|}$$

Poznámka: Při volbě ekvidistantních uzlů byla úloha špatně podmíněná. Při volbě uzlů podle (*) má interpolační proces pro $n \to \infty$ tu vlastnost, že interpolační polynomy konvergují na $\langle a, b \rangle$ stejnoměrně k aproximované funkci např. v případě kdy existuje spojitá první derivace f' na $\langle a, b \rangle$.

Stejnoměrná konvergence

fce f_n def na $\langle a, b \rangle$

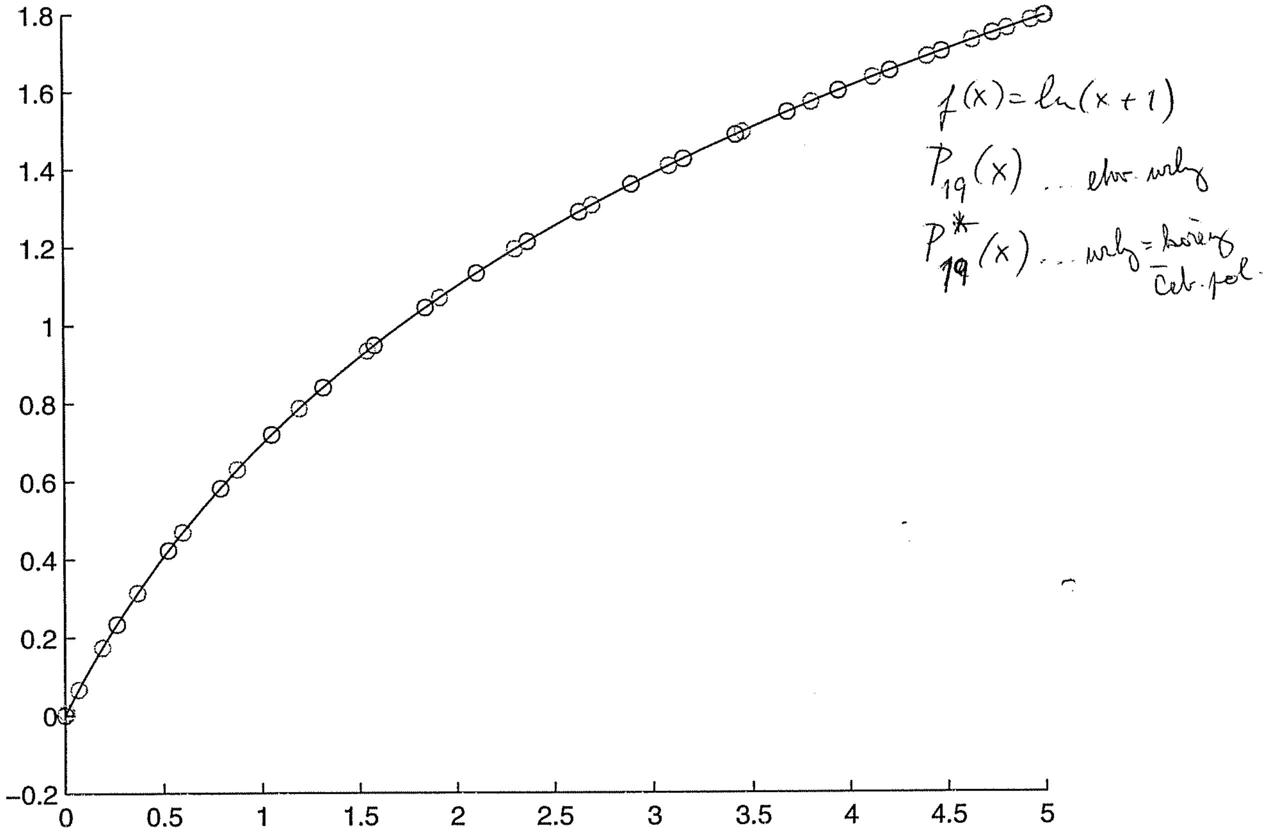
varianta 1: posl. $\{f_n\}$ je na $\langle a, b \rangle$ stejnoměrně konvergentní

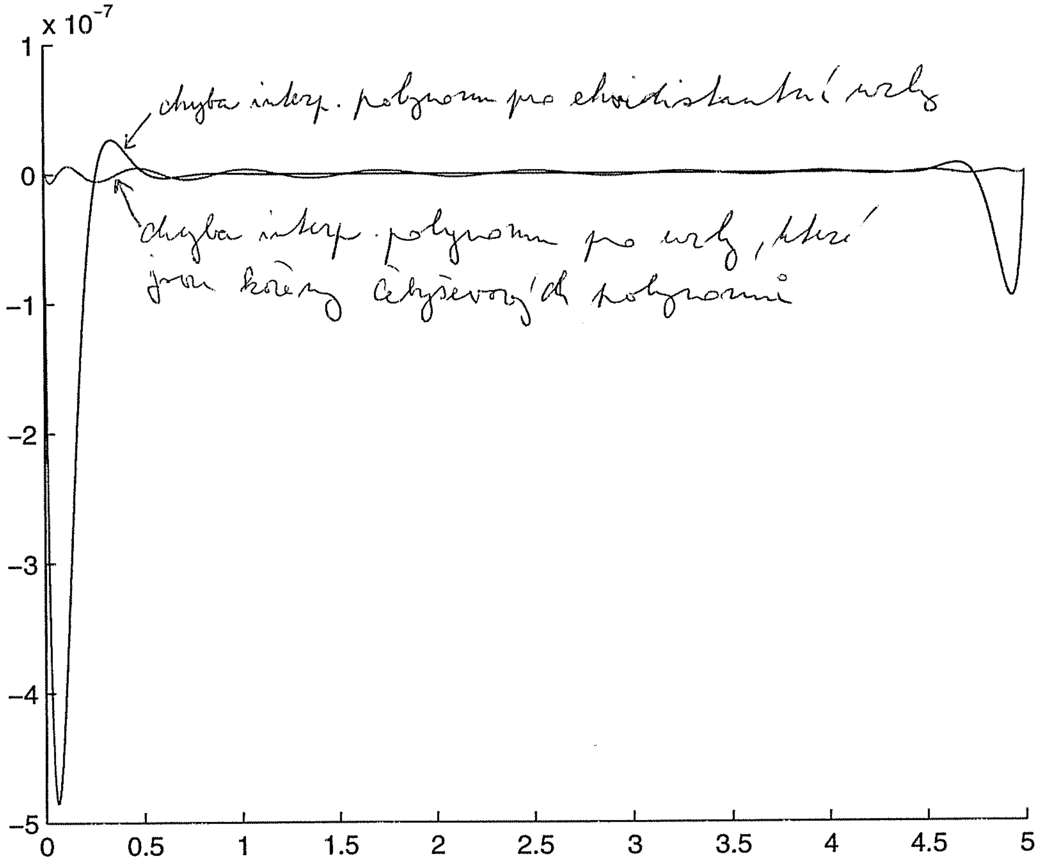
$\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}$: stejné $\forall x \in \langle a, b \rangle$ tak, že

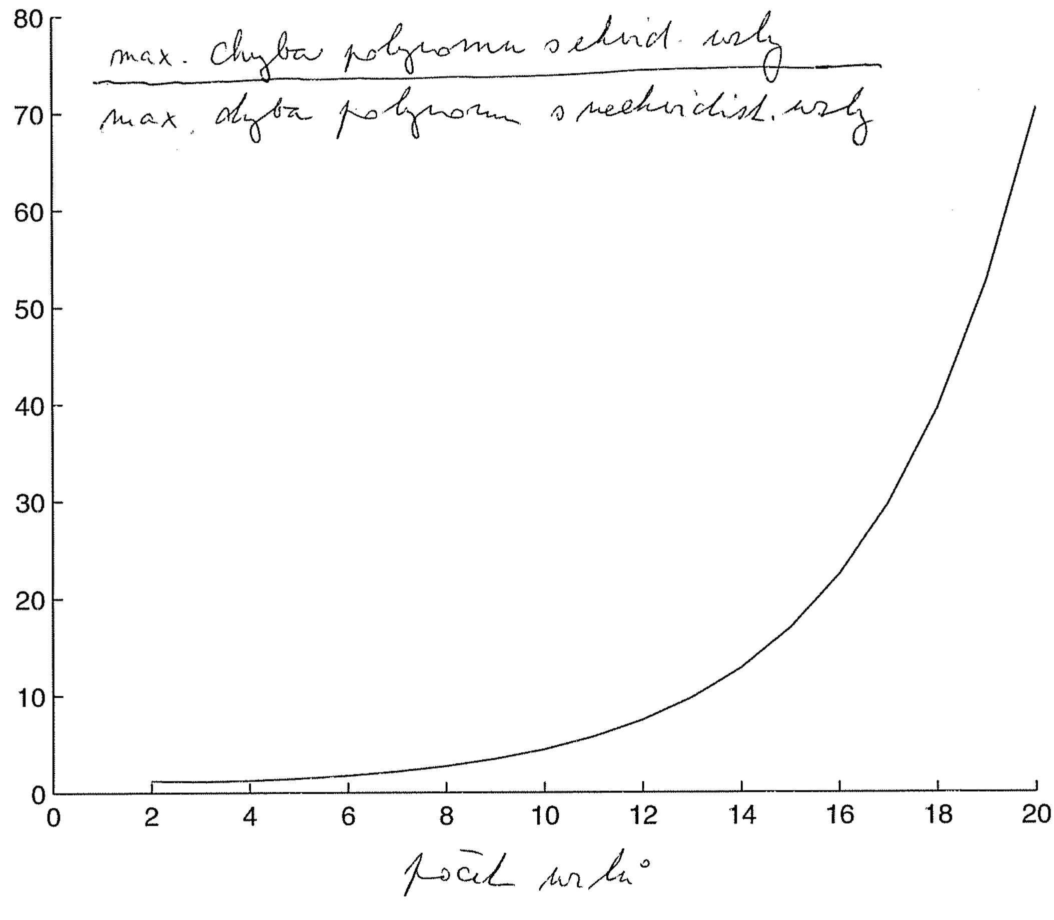
$\forall n > n_0$ a $\forall x \in \langle a, b \rangle$: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

varianta 2: $\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in \langle a,b \rangle} |f_n(x) - f(x)| = 0$

Příklad $f(x) = \ln(x+1)$; $x \in \langle 0;5 \rangle$






max. chyba polynomu s ekvid. uzly
max. chyba polynomu s neekvidist. uzly
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
počet uzlů

Poznámka: Všimněme si, že v konstrukci interpolačního polynomu nezáleží na pořadí zadaných tabulkových bodů.

Poznámka: V řadě případů potřebujeme kromě a_i vypočítat hodnotu polynomu v daném bodě α, tj.

$$N_n(\alpha) = a_0 + a_1(\alpha - x_0) + a_2(\alpha - x_0)(\alpha - x_1) + \ldots + a_n(\alpha - x_0)(\alpha - x_1)\ldots(\alpha - x_{n-1}).$$

Při vhodném uzávorkování můžeme výpočet zefektivnit (zmenšíme počet operací sčítání a násobení):

$$N_n(\alpha) = a_0 + (\alpha - x_0)\Big[a_1 + (\alpha - x_1)\big[a_2 + (\alpha - x_2)[a_3 + \ldots]\big]\Big].$$

Tento postup můžeme samozřejmě použít jen tehdy, když už známe koeficienty a_i.

Chceme-li vypočítat pouze hodnotu polynomu $N_n(\alpha)$ v bodě α za co nejmenšího počtu operací a nepotřebujeme-li koeficienty a_i, použijeme tzv. **Nevilleův algoritmus**. Princip je podobný jako v algoritmu pro určení koeficientů Newtonova polynomu.

Nevilleův algoritmus:

1. $P_{i,0} = f(x_i); \qquad i = 0, 1, \ldots, n$
2. $P_{i,k} = P_{i,k-1} + (\alpha - x_i)\dfrac{P_{i,k-1} - P_{i-1,k-1}}{x_i - x_{i-k}};$
3. $N_n(\alpha) = P_{nn}$

Princip Nevilleova algoritmu je ukázán v následujícím příkladu.

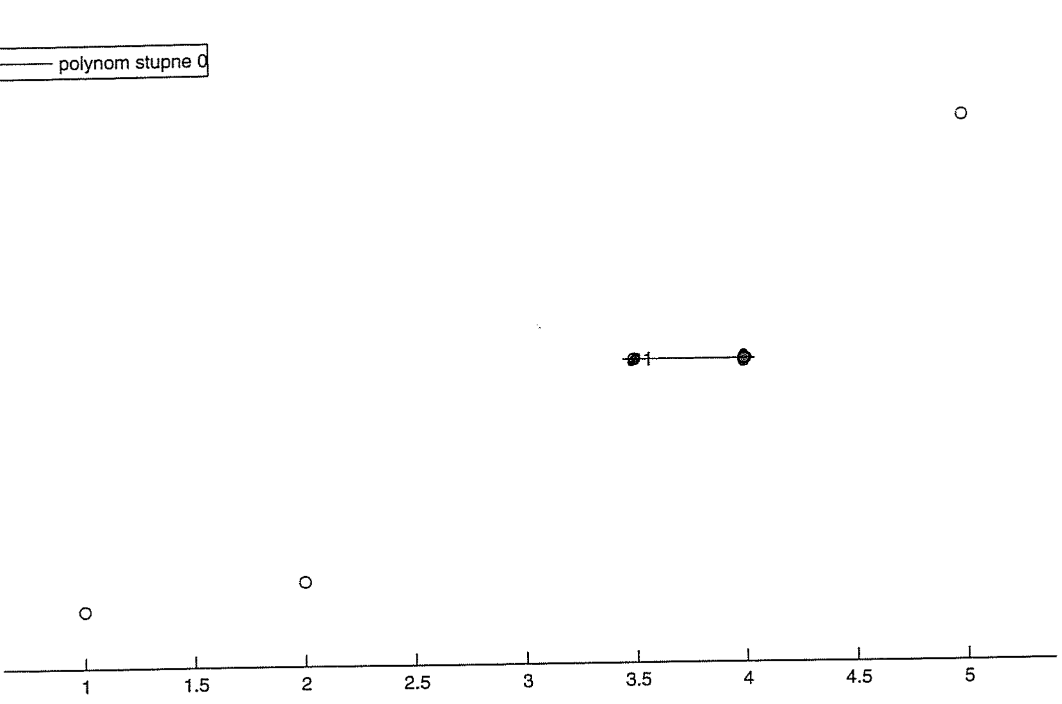
Příklad: Vypočtěte $f(3.5)$, kde funkce $f(x)$ je dána tabulkou:

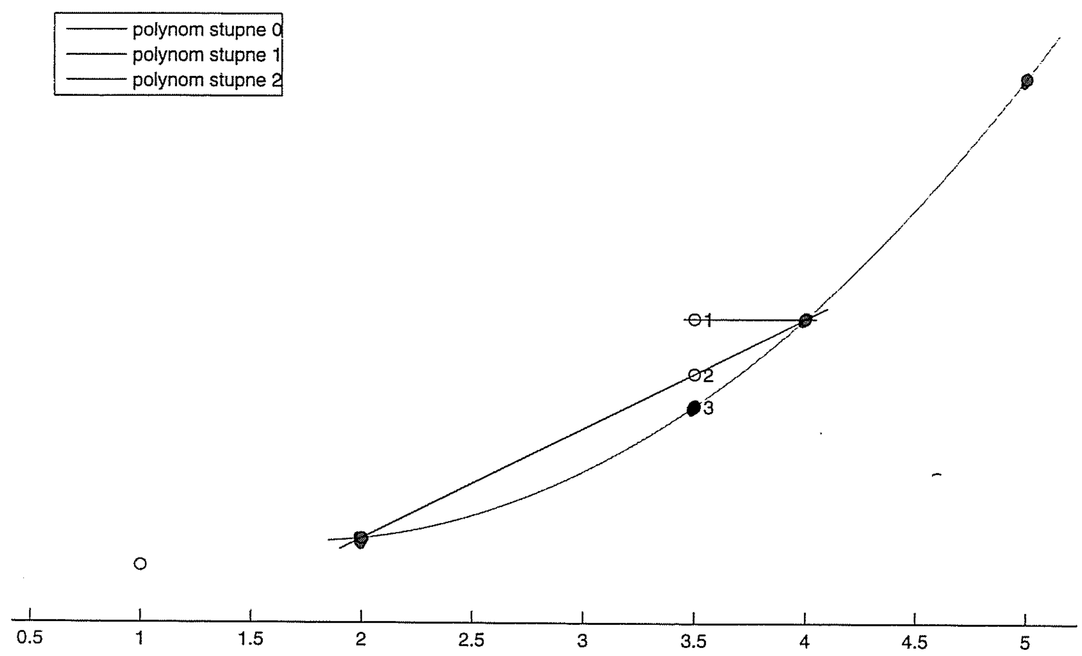
x_i	1	2	4	5
$f(x_i)$	1	8	64	125

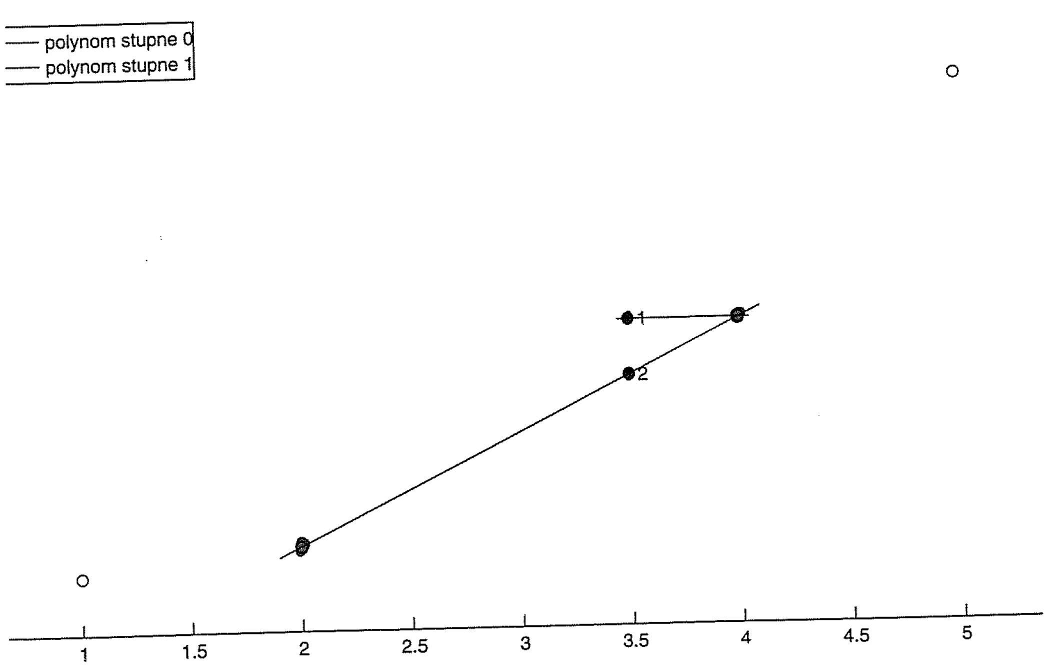
Řešení: Uzly x_i je výhodné uspořádat podle rostoucí vzdálenosti od bodu α, v němž chceme stanovit přibližnou hodnotu funce $f(x)$. Podle rozdílu hodnot $P_{i,i}$ a $P_{i-1,i-1}$ $(i = 1, \ldots, n)$ lze rozhodnout o předčasném ukončení Nevillova algoritmu, popř. o vhodnosti interpolace pomocí $N_n(x)$.

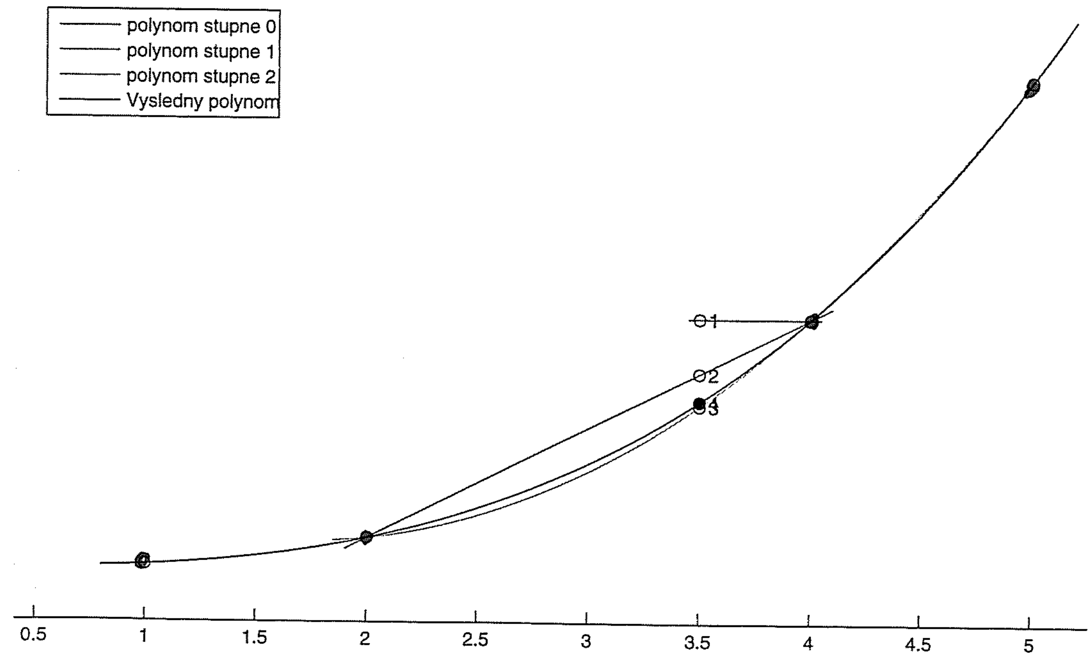
Nevillovo schéma:

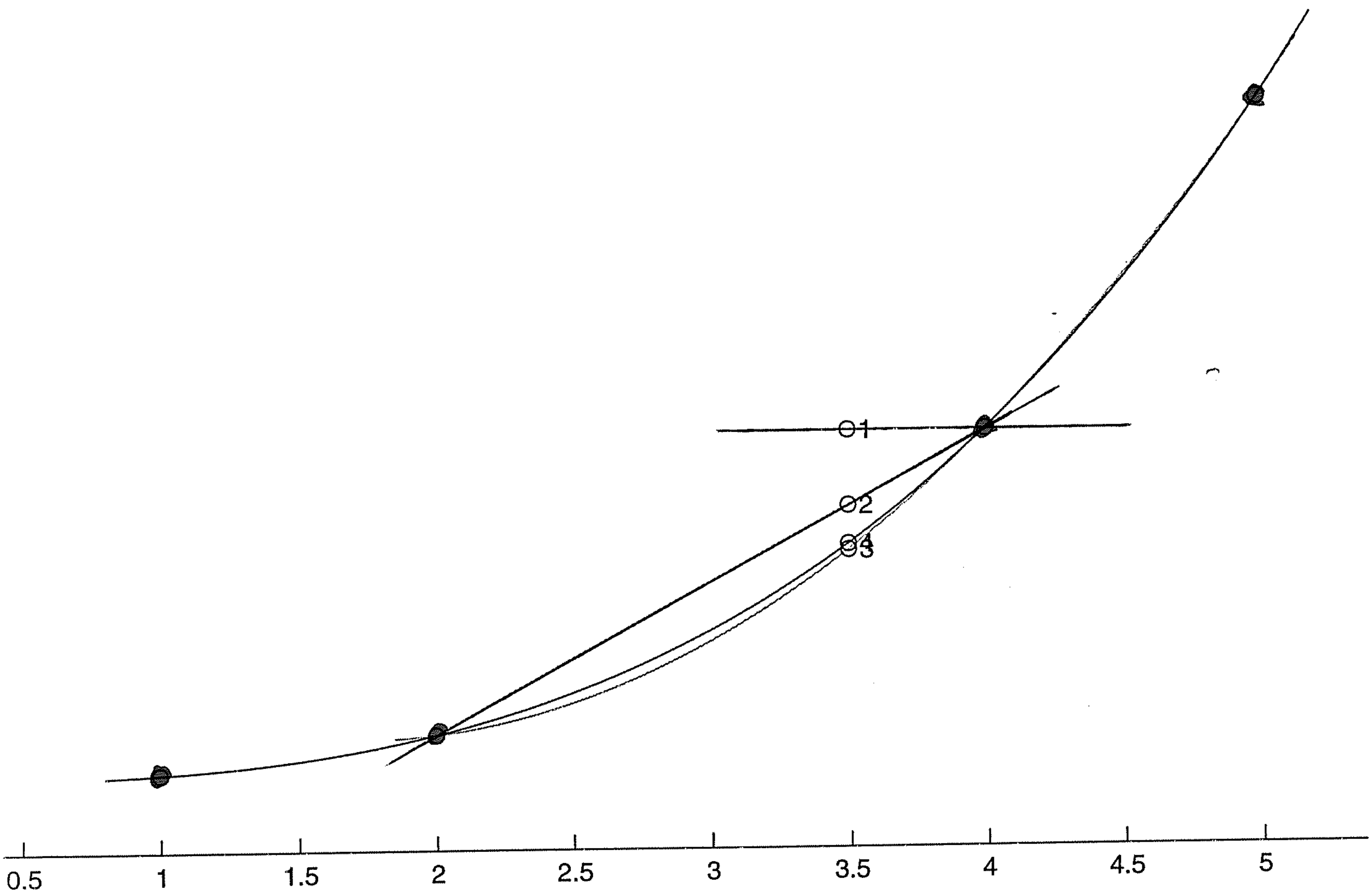
$\alpha - x_i$	x_i	$f(x_i)$			
-0,5	4	**64**			
1,5	2	8	$8+1{,}5\dfrac{8-64}{2-4}$ $= \mathbf{50}$		
-1,5	5	125	$125-1{,}5\dfrac{125-8}{5-2}$ $= 66{,}5$	$66{,}5-1{,}5\dfrac{66,5-50}{5-4}$ $= \mathbf{41{,}75}$	
2,5	1	1	$1+2{,}5\dfrac{1-125}{1-5}$ $= 78{,}5$	$78{,}5+2{,}5\dfrac{78,5-66,5}{1-2}$ $= 48{,}5$	$48{,}5+2{,}5\dfrac{48,5-78,5}{1-4}$ $= \mathbf{42{,}875}$


polynom stupne 0
1
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5


polynom stupne 0
polynom stupne 1
polynom stupne 2
1
2
3
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5


polynom stupne 0
polynom stupne 1
1
2
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5


polynom stupne 0
polynom stupne 1
polynom stupne 2
Vysledny polynom
1
2
3
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5



1
2
4
3
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5

Př:

UZLY SEŘAZENY PODLE VZDÁLENOSTI OD ALFA VZESTUPNĚ

Nevilluv algoritmus pro vypocet hodnoty funkce f v bode alfa=3.600000

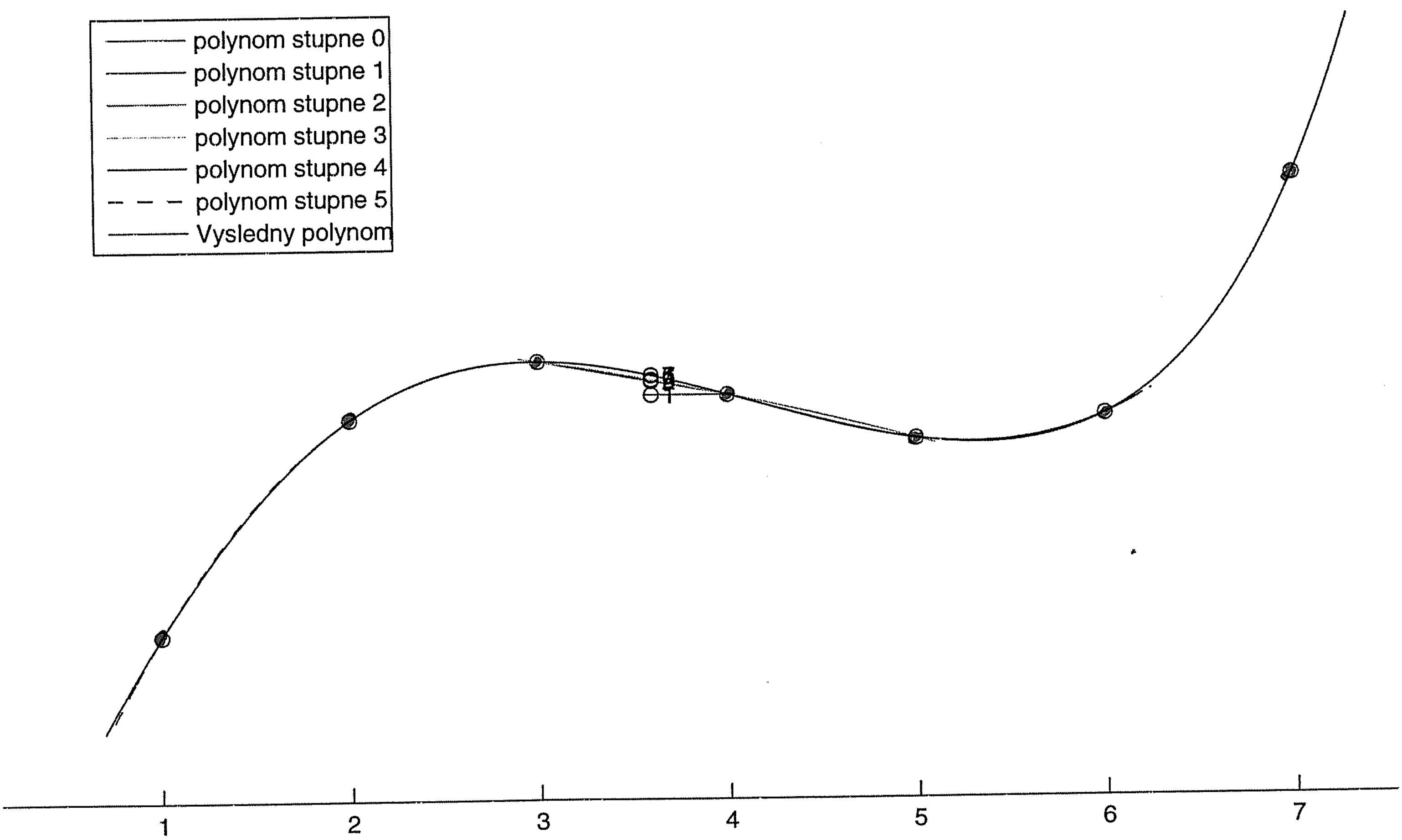
pro funkci zadanou tabulkou

x(k)	f(k)
4.0000	16.0000
3.0000	19.0000
5.0000	12.0000
2.0000	14.0000
6.0000	14.0000
1.0000	-5.0000
7.0000	35.0000

Stiskni klavesu

x(k)	f(k)	Aproximace f(alfa)					
4	16						
3	19	17.2000					
5	12	16.9000	17.3200				
2	14	12.9333	19.2800	17.7120			
6	14	14.0000	11.4400	17.7120	17.7120		
1	-5	4.8800	28.5920	17.4432	17.7926	17.7228	
7	35	12.3333	-13.0080	15.2800	18.9574	17.9674	17.6901

Priblizna hodnota f(alfa) = 17.6901



Př:

UZLY NEJSOU SEŘAZENY PODLE ROSTOUCÍ VZDÁLENOSTI OD ALFA

JSOU NAOPAK SEŘAZENY OD NEJVZDÁLENĚJŠÍHO K NEJBLIŽŠÍMU

Nevilluv algoritmus pro vypocet hodnoty funkce f v bode alfa=3.600000

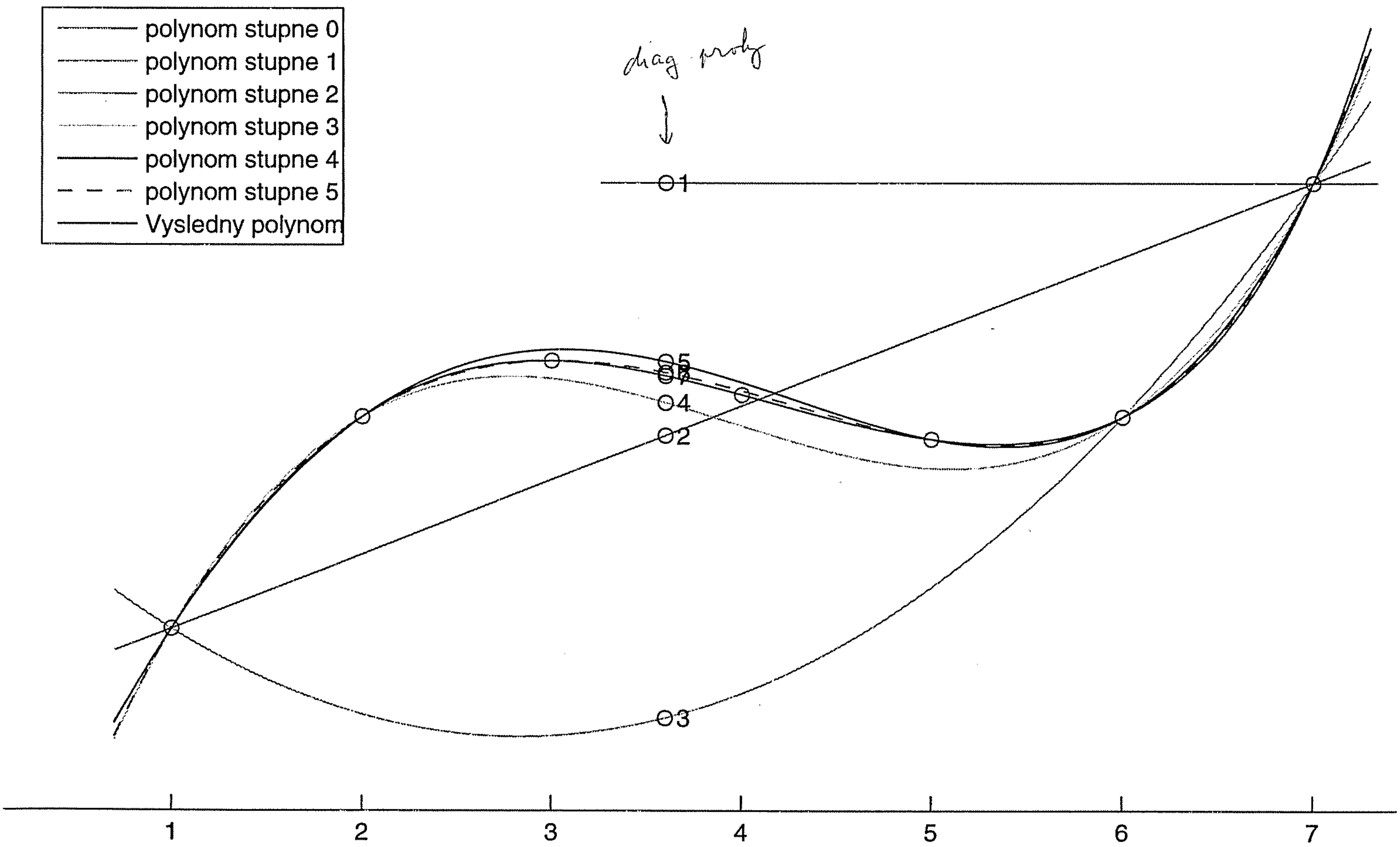
pro funkci zadanou tabulkou

x(k)	f(k)
7.0000	35.0000
1.0000	-5.0000
6.0000	14.0000
2.0000	14.0000
5.0000	12.0000
3.0000	19.0000
4.0000	16.0000

Stiskni klavesu

x(k)	f(k)	Aproximace f(alfa)					
7	35						
1	-5	12.3333					
6	14	4.8800	-13.0080				
2	14	14.0000	28.5920	15.2800			
5	12	12.9333	11.4400	17.4432	18.9574		
3	19	16.9000	19.2800	17.7120	17.7926	17.9674	
4	16	17.2000	17.3200	17.7120	17.7120	17.7228	17.6901

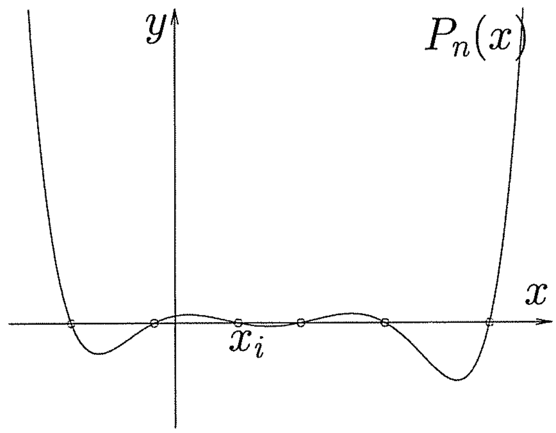
Priblizna hodnota f(alfa) = 17.6901



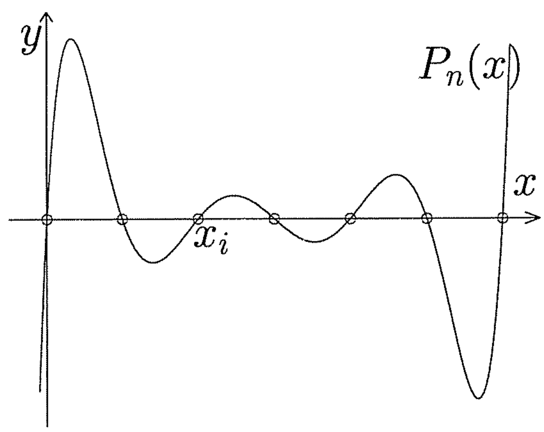
? význam prvků matice i mimo diagonálu ?

Poznámky:

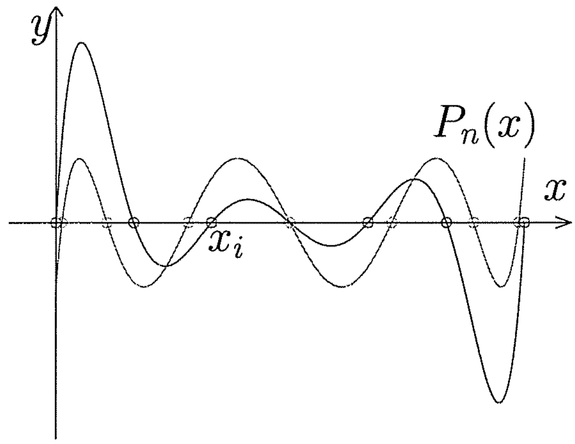
1) Interpolační polynomy vyšších řádů není vhodné užívat pro aproximaci hodnot funkce mimo interval obsahující uzly interpolace (tzv. extrapolaci), protože absolutní hodnota polynomu nabývá velkých hodnot.



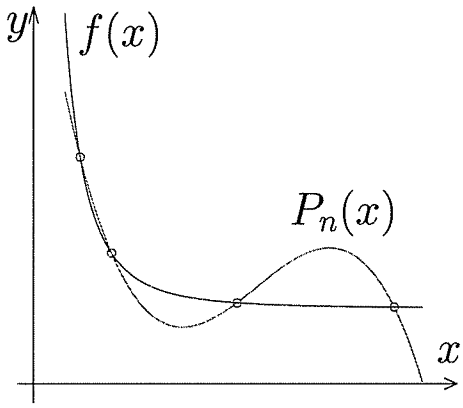
2) Dále není obecně vhodné interpolovat polynomem funkci, která je dána velkým počtem svých hodnot. Stupeň interpolačního polynomu by potom byl velký.



3) Použijeme-li vhodně zvolené neekvidistantní uzly, můžeme tyto oscilace minimalizovat. (Vhodnou volbou jsou uzly zvolené jako kořeny tzv. Čebyševových polynomů.)



4) Interpolace polynomem není obecně vhodná např. pro funkce, které mají asymptotu.



Poznámky:

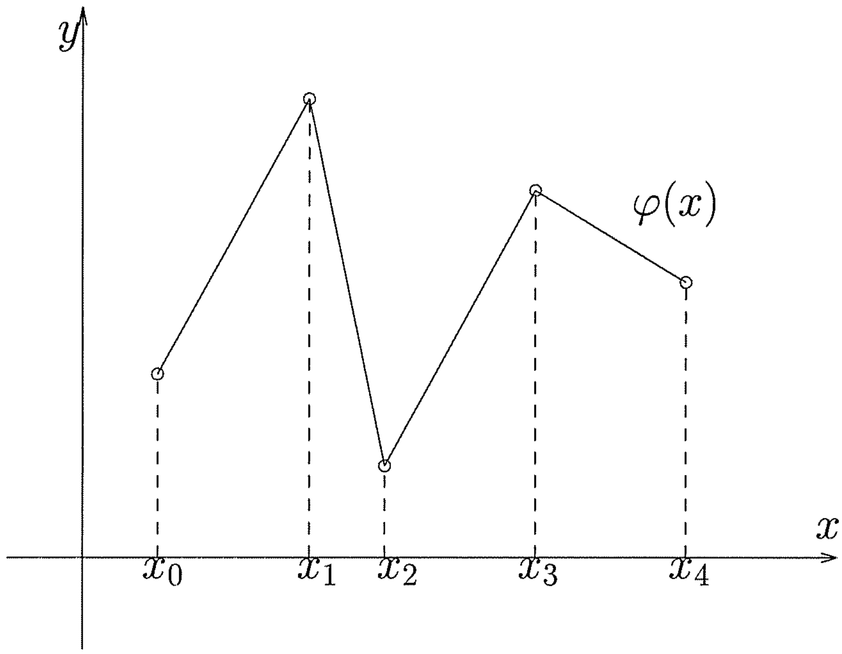
- Pokud chceme aproximovat funkci, která má např. asymptotu, je vhodné místo lineární aproximace (polynomiální) použít nelineární aproximaci

$$\boxed{R_{M,N}(x) = \frac{P_M(x)}{Q_N(x)} = \frac{p_0 + p_1 x + \ldots + p_M x^M}{1 + q_1 x + \ldots + q_N x^N}}$$

- pokud máme další informace např. o derivaci dané funkce v uzlových bodech, můžeme použít tzv. Hermitovu interpolaci

Interpolace spline funkcemi

Nejjednodušší spline funkcí je tzv. **lineární spline funkce**; jde vlastně o lomenou čáru spojující zadané interpolované body.



Lineární spline interpolace

Máme dánu fcí f tabulkou hodnot

$$\{x_i, f_i\} \quad i = 0,1,\dots n$$

Funkci $s(x)$ definovanou na intervalu $\langle x_0, x_n \rangle$ nazýváme lineární spline interpolací funkce $f(x)$, má-li následující vlastnosti:

(i) na $\forall$ intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle \quad i = 0,1,\dots n-1$ je polynomem prvního stupně, tj.

$$s(x) = s_i(x) \qquad x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle, \text{ kde } \boxed{s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i)}$$

(ii) splňuje interpolační podmínky

$$s(x_i) = f(x_i), \text{ tj.}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} s_i(x_i) = f_i & i = 0,1\dots n-1 \\ s_{n-1}(x_n) = f_n & \end{array}}$$

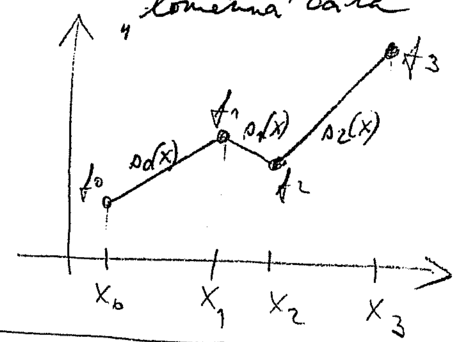
(iii) je spojitá na $\langle x_0, x_n \rangle$, tj. i v uzlech x_i

$$\boxed{s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1})}, \quad i = 0,1\dots n-2$$

Těmito požadavky je fce $s(x)$ určena jednoznačně

- $2n$ koeficientů a_i a b_i
- (ii) představuje $(n+1)$ podmínek
- (iii) představuje $(n-1)$ podmínek

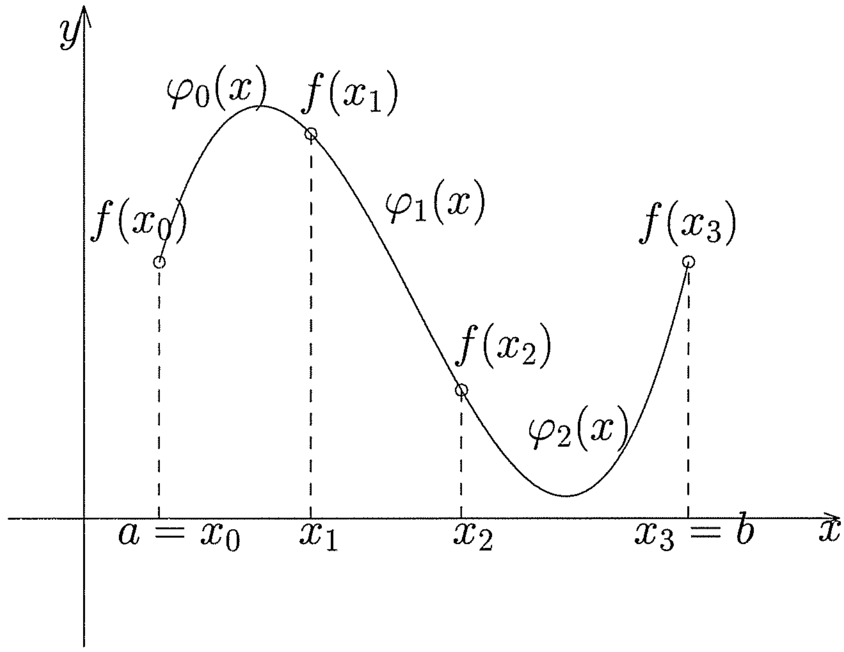
„lomená čára"



Platí:

$$\boxed{s_i(x) = f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i}(x - x_i)}, \quad \boxed{\begin{array}{l} h_i = x_{i+1} - x_i \\ i = 0,1\dots n-1 \end{array}} \qquad (\bullet\bullet\bullet)$$

Příklad : KUBICKÁ SPLINE INTERPOLACE



Jednotlivé funkce $\varphi_i(x)$ (na každém intervalu $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$ jde o jinou funkci) mají tvar:

$$\varphi_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3$$

Kubická spline interpolace

Fce f je dána tabulkou $\{x_i, f_i\}$, $i = 0,1 \dots n$

Funkci $s(x)$ definovanou na intervalu $\langle x_0, x_n \rangle$ nazýváme **kubickou spline interpolací** fce f má-li následující vlastnosti:

(i) je na každém intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ $i = 0,1 \dots n-1$ polynomem 3. stupně ve tvaru

$$\boxed{s_i(x) = a_i + b_i (x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3}$$

(ii) splňuje interpolační podmínky

$$\boxed{\begin{array}{l} s(x_i) = f(x_i), \text{ tj.} \\ s_i(x_i) = f_i \qquad i = 0,1, \dots n-1 \\ s_{n-1}(x_n) = f_n \end{array}}$$

(iii) je spojitá na $\langle x_0, x_n \rangle$, tj v uzlech x_i platí

$$\boxed{s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1}) \qquad i = 0,1 \dots n-2}$$

(iv) má spojitou první derivaci na $\langle x_0, x_n \rangle$

$$\boxed{s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1}) \qquad i = 0,1 \dots n-2}$$

(v) má spojitou druhou derivaci na $\langle x_0, x_n \rangle$

$$\boxed{s_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}''(x_{i+1}) \qquad i = 0,1 \dots n-2}$$

Funkce $s(x)$ není podmínkami (ii) – (v) určena jednoznačně:

(ii)	$(n+1)$
(iii)	$(n-1)$
(iv)	$(n-1)$
(v)	$(n-1)$
Σ	$4n-2$ podmínek

počet koeficientů je $\underline{4n}$

2 podmínky je nutno dodat:

(A) přirozené podmínky $\boxed{s''(x_0) = s''(x_n) = 0}$

(B) podmínky periodicity (s periodou $T = x_n - x_0$)

$s(x_0) = s(x_n)$, $\boxed{s'(x_0) = s'(x_n), \quad s''(x_0) = s''(x_n)}$

↳ splněna automaticky $f_0 = f_n$

(C) podmínky tečen $\boxed{s'(x_0) = y_0', \quad s'(x_n) = y_n'}$

kde y_0', y_n' jsou daná čísla

(D) viz MATLAB

Konstrukce kubické spline funkce

Funkci $s(x)$ lze psát ve tvaru

$$\boxed{s(x) = \chi_0 s_0(x) + \chi_1 s_1(x) + \dots + \chi_{n-1} s_{n-1}(x),}$$

kde $\chi_i = \chi_i(x)$ jsou charakteristické funkce intervalů, tj.

$$\left|\begin{array}{ll} \chi_i = 1 & \text{na } \langle x_i, x_{i+1}) \\ \chi_i = 0 & \text{jinde} \end{array}\right. \qquad \chi_{n-1} = 1 \text{ na } \langle x_{n-1}, x_n\rangle$$

Snadno lze odvodit:

$$\boxed{\begin{array}{l} s(x_i) = a_i, \quad s'(x_i) = b_i, \quad s''(x_i) = c_i \\ s'''(x_i+) = d_i, \quad s'''(x_i-) = d_{i-1} \end{array}}$$

Pomocí těchto vztahů přepíšeme podmínky (ii) až (v)

(ii) interpolační podmínky: (h_i viz (...))

$$f_i = a_i \qquad i = 0, 1, \dots n-1$$

$$f_n = a_{n-1} + b_{n-1} h_{n-1} + \frac{c_{n-1}}{2} h_{n-1}^2 + \frac{d_{n-1}}{6} h_{n-1}^3$$

(iii) spojitost

$$f_{i+1} = a_i + b_i h_i + \frac{c_i}{2} h_i^2 + \frac{d_i}{6} h_i^3 \qquad i = 0, 1, \dots n-2$$

$$[s_{i+1}'''(x_{i+1}) = s_i'''(x_{i+1})]$$

(iv) spojitost derivace

$$b_i + c_i h_i + \frac{d_i}{2} h_i^2 = b_{i+1} \qquad i = 0, 1 \dots n-2$$

(v) spojitost 2. derivace

$$c_i + d_i h_i = c_{i+1} \qquad i = 0, 1 \dots n-2$$

Z těchto podmínek lze sestavit soustavu lineárních algebraických rovnic pro neznámé $c_0, \dots c_n$ a jejich prostřednictvím vypočítat $b_0, \dots b_n$ a $d_0, \dots d_n$.
Po úpravách dostaneme:

$$\boxed{\alpha_k c_{k-1} + 2 c_k + \beta_k c_{k+1} = g_k \qquad k = 1, 2, \dots n-1}$$

kde

$$\boxed{\begin{aligned} \beta_k &= \frac{h_k}{h_k + h_{k-1}}, \quad \alpha_k = 1 - \beta_k, \\ g_k &= \frac{6}{h_k + h_{k-1}} \left[\frac{f_{k+1} - f_k}{h_k} - \frac{f_k - f_{k-1}}{h_{k-1}} \right] \end{aligned}}$$

Vztahy představují soustavu $(n-1)$ rovnic pro $(n+1)$ neznámých. Pro jednoznačnost je třeba přidat jednu z podmínek (A), (B), (C).

Soustava bude mít tvar:

$$\begin{bmatrix} 2 & \beta_0 & & & & \\ \alpha_1 & 2 & \beta_1 & & & \\ & \alpha_2 & 2 & \beta_2 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & \alpha_{n-1} & 2 & \beta_{n-1} \\ & & & & \alpha_n & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ \\ g_n \end{bmatrix}$$

(A), (B) nebo (C)

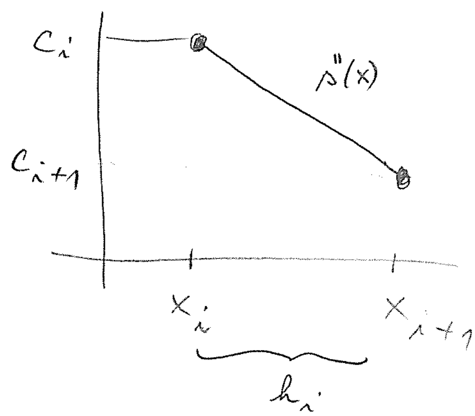
Pozn.: matice soustavy je třídiagonální a ostře diagonálně dominantní ($\alpha_k + \beta_k = 1$). $\Rightarrow$ je regulární $\Rightarrow \exists!$ řešení
Soustavu řešíme <u>GEM pro třídiagonální matice</u>.

ODVOZENÍ PŘEVODU NA 3DIAGONÁLNÍ MATICI PRO c_i

druhá derivace : $\boxed{s_i''(x) = c_i + d_i(x - x_i)}$

je lineární funkcí, tj. známe-li $s''(x_i) = c_i$, pak na $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ můžeme psát

$$\boxed{s_i''(x) = c_i \frac{x_{i+1}-x}{h_i} + c_{i+1}\frac{x-x_i}{h_i}} \qquad (*)$$



ověření:

$s_i''(x_i) = c_i$, $s_i''(x_{i+1}) = c_{i+1}$

$s_i''(x)$ ... je lineární

Integrací (*) dostaneme:

$$\boxed{s_i'(x) = -c_i \frac{(x_{i+1}-x)^2}{2h_i} + c_{i+1}\frac{(x-x_i)^2}{2h_i} + A_i} \qquad (**)$$

$$s_i(x) = c_i \frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_i} + c_{i+1}\frac{(x-x_i)^3}{6h_i} + A_i(x-x_i) + B_i$$

Z interpolačních podmínek plyne ($s(x_i) = f_i$):

$$\boxed{B_i = f_i - \frac{c_i h_i^2}{6}}$$

Pro $x = x_{i+1}$

$$f_{i+1} = c_{i+1}\frac{h_i^2}{6} + A_i h_i + \overbrace{f_i - \frac{c_i h_i^2}{6}}^{B_i}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_i = \frac{f_{i+1}-f_i}{h_i} - \frac{(c_{i+1}-c_i)h_i}{6}} \qquad (***)$$

Ze spojitosti první derivace $\boxed{s_i'(x_{i+1}^-) = s_{i+1}'(x_{i+1}^+) \quad i=0,1,\dots n-2}$

s užitím (**) a (***) plyne:

$$\overbrace{c_{i+1}\frac{h_i}{2} + \underbrace{\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i} - \frac{(c_{i+1}-c_i)h_i}{6}}_{A_i}}^{s_i'(x_{i+1})} =$$

$$= \underbrace{-c_{i+1}\frac{h_{i+1}^2}{2h_{i+1}} + \underbrace{\frac{f_{i+2}-f_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{(c_{i+2}-c_{i+1})h_{i+1}}{6}}_{A_{i+1}}}_{s_{i+1}'(x_{i+1})}$$

$$\boxed{c_i\cdot\frac{h_i}{6} + c_{i+1}\Big(\underbrace{\frac{h_i}{2}-\frac{h_i}{6}}_{=\frac{h_i}{3}} + \underbrace{\frac{h_{i+1}}{2}-\frac{h_{i+1}}{6}}_{\frac{h_{i+1}}{3}}\Big) + c_{i+2}\frac{h_{i+1}}{6} = \frac{f_{i+2}-f_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}}$$

vynásobíme $\dfrac{6}{h_i+h_{i+1}}$ a dostaneme

$$\underbrace{\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}}_{=\alpha_i}c_i + 2c_{i+1} + \underbrace{\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}}_{=\beta_i}c_{i+2} = \underbrace{\frac{6}{h_i+h_{i+1}}\left(\frac{f_{i+2}-f_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}\right)}_{=g_i}$$

Minimální vlastnost a odhad chyby

Označme $S_1(\langle a, b\rangle)$ množinu funkcí f, které splňují podmínky (ii) až (v) a podmínku (A) a jsou navíc na $\langle a, b\rangle$ integrovatelné s kvadrátem.

Mezi všemi funkcemi $f \in S_1(\langle a, b\rangle)$ právě přirozený kubický spline udílí nejmenší hodnotu integrálu

$$\boxed{J(f) = \int_a^b |f''(x)|^2 \, dx}$$

míra celkové křivosti křivky $y = f(x)$

<u>Věta</u>: Nechť fce f má spojité derivace až do řádu 4 a má omezenou 4. derivaci pro $x \in \langle a, b\rangle$.
Nechť dále platí:

$$\frac{h}{h_i} \leq K \qquad i = 0, 1, \dots n-1 \qquad h = \max_i |x_{i+1} - x_i|.$$

Když $s(x)$ je spline interpolace fce f v bodech x_i a splňuje podmínky $s'(a) = f'(a)$, $s'(b) = f'(b)$, potom pro $x \in \langle a, b\rangle$ platí:

$$|f(x) - s(x)| \leq c_1 K h^4$$

$$|f'(x) - s'(x)| \leq c_2 K h^3$$

$$|f''(x) - s''(x)| \leq c_3 K h^2.$$