SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ALGEBRAICKÝCH ROVNIC

Metody

- **přímé** (GEM, metoda LU-rozkladu)
- $\boxed{\textbf{iterační}}$
- **gradientní**

Iterační metody najdou přesné řešení *teoreticky* až po nekonečně mnoha krocích.

Pamatujme si, že v numerické praxi používáme pro řešení soustav s plnou maticí přímé metody, zatímco pro speciální (řídké) matice používáme iterační metody.

Toto rozdělení je dáno **výpočetní složitostí** těchto metod, tj. počtem matematických operací sčítání, odčítání, násobení a dělení nutných k získání výsledku.

Poznámka: V případě plné matice je výpočetní cena v každé iteraci řádu n^2, srovnáme-li toto s celkovou výpočetní cenou přímých metod, tj. řádově $2/3\, n^3$, vidíme, že má-li být výpočetní složitost iterační metody stejná jako u přímé metody, musela by iterační metoda najít řešení (s předem zadanou přesností) řádově po n iteracích. Na druhou stranu v případě speciální (řídké) matice je výhodné použít iterační metodu.

Příklad:
Uvažujme rovnici

$$9x = 9$$

Řešení je

$$x^* = 1$$

Rovnici lze přepsat např. na tvar

$$10x - x = 9$$

$$x = \frac{9 + x}{10}$$

- viz metoda prosté iterace pro nelineární rovnice
- nyní uvažujeme lineární rovnice, proto předpis funkce $\phi(x)$ může být lineární
- řešení hledáme pomocí rekurentní formule

$$x^{(k+1)} = \frac{9 + x^{(k)}}{10}$$

  kde volíme např. $x^{(0)} = 1$

Dostáváme

$$x^{(1)} = 0.9$$
$$x^{(2)} = 0.99$$
$$x^{(3)} = 0.999$$
$$x^{(4)} = 0.9999$$

Zastavíme např. pomocí $|x^{(4)} - x^{(3)}| < \varepsilon = 0.001$

Uvedený postup realizujeme pro soustavy.

Podobně jako v metodě prosté iterace pro nelineární soustavy přepíšeme soustavu

$$\mathbf{Ax} - \mathbf{b} = \mathbf{o} \qquad \longleftrightarrow \qquad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$$

na tvar

$$\mathbf{x} = \mathbf{Hx} + \mathbf{g} \qquad \longleftrightarrow \qquad \mathbf{x} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$$

Uvažujeme-li soustavu lineárních algebraických rovnic, tj. funkce $\mathbf{F}$ je lineární, můžeme potom najít lineární předpis pro funkci $\mathbf{\Phi}$.

Všechny iterační metody pro řešení soustavy lineárních algebraických rovnic budou používat iterační formuli

$$\boxed{\mathbf{x}^{(\mathbf{k+1})} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}^{(\mathbf{k})} + \mathbf{g}}$$

samozřejmě s různou iterační maticí $\mathbf{H}$ a vektorem $\mathbf{g}$ a je zřejmé, že o kvalitě metody rozhodují právě vlastnosti matice $\mathbf{H}$.

Počáteční aproximaci $\mathbf{x}^{(\mathbf{0})}$ zvolíme

a výpočet ukončíme pomocí zastavovací podmínky

$$\|\mathbf{x}^{(\mathbf{k})} - \mathbf{x}^{(\mathbf{k-1})}\| < \varepsilon$$

Jacobiova metoda

Princip:

Z i-té rovnice vyjádříme i-tou složku vektoru $\mathbf{x}$

i-tá rovnice: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$

pro $a_{ii} \neq 0$: $x_i = \dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1\ j\neq i}^{n} a_{ij}x_j\right)$

Iterační formule:

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1\ j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)}$$

Gaussova-Seidelova metoda

Princip:

Stejný jako u Jacobiovy metody s tím rozdílem, že jestliže při výpočtu $(k+1)$-iterace již známe $(k+1)$-iteraci některých složek, tak ji použijeme.

Iterační formule:

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)}$$

Relaxační metoda SOR

Princip:

Vyjdeme z Gaussovy-Seidelovy metody jejíž iterační formuli lze psát takto:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + r_i^{(k)} \quad \text{kde}$$

$$r_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

Abychom urychlili výpočet, nebudeme přičítat $r_i^{(k)}$, ale $\omega r_i^{(k)}$, tj.

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega r_i^{(k)}$$

Iterační formule:

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)}$$

Poznámka:

$(k+1)$-iterace metody SOR je lineární kombinací $(k+1)$-iterace získané Gauss-Seidlovou metodou a předchozí k-té iterace.

$$x_i^{(k+1)} = \omega \underbrace{\frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)}_{x_i^{(k+1)} \text{ z Gaussovy-Seidelovy metody}} + (1-\omega) x_i^{(k)}$$

Maticový zápis iteračních metod

Nejprve rozložíme matici $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U},$$

kde $\mathbf{L}$ je dolní trojúhelníková část matice $\mathbf{A}$ s nulami na diagonále, $\mathbf{D}$ je diagonální matice a $\mathbf{U}$ je horní trojúhelníková část matice $\mathbf{A}$ s nulami na diagonále.

Jacobiova metoda:

$$\begin{gathered}
\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\
(\mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
\mathbf{Dx} + (\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
\mathbf{Dx} = \mathbf{b} - (\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x} \\
\hline
\mathbf{x} = \underbrace{-\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})}_{\mathbf{H}_J}\mathbf{x} + \underbrace{\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{g}_J}
\end{gathered}$$

Gauss-Seidlova metoda:

$$\begin{gathered}
\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\
(\mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
(\mathbf{L} + \mathbf{D})\mathbf{x} + \mathbf{Ux} = \mathbf{b} \\
(\mathbf{L} + \mathbf{D})\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{Ux} \\
\hline
\mathbf{x} = \underbrace{-(\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{U}}_{\mathbf{H}_{GS}}\mathbf{x} + \underbrace{(\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{g}_{GS}}
\end{gathered}$$

Relaxační metoda SOR:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\
\omega\mathbf{Ax} &= \omega\mathbf{b} && / + \mathbf{Dx} \\
(\omega\mathbf{A} + \mathbf{D})\mathbf{x} &= \omega\mathbf{b} + \mathbf{Dx} \\
[\omega(\mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}) + \mathbf{D})]\,\mathbf{x} &= \omega\mathbf{b} + \mathbf{Dx} \\
(\omega\mathbf{L} + \mathbf{D})\mathbf{x} &= \omega\mathbf{b} + \mathbf{Dx} - \omega\mathbf{Dx} - \omega\mathbf{Ux} \\
(\omega\mathbf{L} + \mathbf{D})\mathbf{x} &= [(1-\omega)\mathbf{D} - \omega\mathbf{U}]\,\mathbf{x} + \omega\mathbf{b}
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{x} = \underbrace{(\omega\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\,[(1-\omega)\mathbf{D} - \omega\mathbf{U}]}_{\mathbf{H}_{SOR}}\,\mathbf{x} + \underbrace{(\omega\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\omega\mathbf{b}}_{\mathbf{g}_{SOR}}
$$

Metoda je dána formulí $\boxed{x^{(k+1)} = H x^{(k)} + g}$

Pro přesné řešení x^* musí platit

- $x^* = H x^* + g$
- $x^* = A^{-1} b$

$$\left.\begin{array}{l} x^* = H x^* + g \\ x^* = A^{-1} b \end{array}\right\} \quad \boxed{A^{-1} b = H A^{-1} b + g} \quad (*)$$

<u>Definice</u>: Iterační metoda $x^{(k+1)} = H x^{(k)} + g$ nazveme <u>konzistentní</u>, pokud platí $(*)$.

<u>Poznámka</u> Uvedené metody jsou konzistentní

- <u>např</u>: pro Jacobiovu metodu musí platit i

$$A^{-1} b = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{H_J} A^{-1} b + \underbrace{D^{-1} b}_{g_J}$$

$$A^{-1} b = \underbrace{D^{-1}\Big(\underbrace{-(L+U) + A}_{D}\Big)}_{I} A^{-1} b$$

OK

- <u>Dov</u>: Ukažte, že Gauss-Seidelova metoda i metoda SOR jsou konzistentní

Definice: Iterační metoda $x^{(k+1)} = Hx^{(k)} + g$ se nazývá **konvergentní**, jestliže pro každou poč. aproximaci $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ platí:

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^* \quad \left(= A^{-1}b\right)}$$

Chyba k-té iterace: $\boxed{e^{(k)} = x^{(k)} - x^*}$

Nutná a postačující podmínka konvergence metody

iterační předpis $\qquad x^{(k)} = Hx^{(k-1)} + g$

konzistentní metoda $\qquad x^* = Hx^* + g$

$$x^{(k)} - x^* = H\left(x^{(k-1)} - x^*\right)$$

$$e^{(k)} = He^{(k-1)}$$

Platí: $\boxed{e^{(k)} = He^{(k-1)} = H^2 e^{(k-2)} = \dots = H^{(k)} e^{(0)}}$

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*} \iff \boxed{\lim e^{(k)} = 0}$$

$\boxed{\text{Věta}}$ Daná konzistentní iterační metoda $x^{(k+1)} = Hx^{(k)} + g$ konverguje pro libovolné $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když je stabilní, tj.

$$\boxed{\rho(H) = \max_i |\lambda_i(H)| < 1},$$

kde číslo $\rho(H)$ nazýváme spektrální poloměr matice H a $\lambda_i(H)$ jsou vlastní čísla matice H.

Myšlenka důkazu:

Jsou-li $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ vlastní čísla matice H, pak existuje regulární matice T taková, že $\boxed{H = TJT^{-1}}$ kde J je tzv. Jordanova matice, což je blokově diagonální matice s bloky

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \lambda_i & 1 & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Platí: $H^2 = TJT^{-1} \cdot TJT^{-1} = TJ^2T^{-1}$

Obecně $H^k = TJ^kT^{-1}$

Platí-li $\boxed{\max_i |\lambda_i(H)| < 1} \Rightarrow \boxed{\lim_{k\to\infty} J^k = O}$, tj.

$$e^{(k)} = H^k e^{(0)} \to o$$

Je-li $\boxed{\lim_{k\to\infty} H^k = O}$ (metoda konverguje) $\Rightarrow \boxed{\lim_{k\to\infty} J^k = O}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{|\lambda_i| < 1 \quad \forall i}$$

Poznámka

Uvažujme 1 jordanův blok J_i.

Označme S matici $\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$

Potom

$$\boxed{J_i = \lambda_i I + S}$$

Podle binomické věty

$$\boxed{J_i^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda_i^{k-j} S^j}$$

$S^j = \mathbb{O}$ pro $j \geq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{řád bloku}}}{l}$

$$\boxed{= \sum_{j=0}^{\min(k,l)} \binom{k}{j} \lambda_i^{k-j} S^j}$$

$(l = \min(k,l))$

$$\boxed{= \lambda_i^k I + \binom{k}{1} \lambda_i^{k-1} S + \binom{k}{2} \lambda_i^{k-2} S^2 + \ldots + \binom{k}{l} \lambda^{k-l} S^l}$$

$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$ $S^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$ $S^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$ $\ldots$

$$\boxed{J_i^k \to \mathbb{O}} \iff \boxed{\lambda_i^k \to 0}$$

Poznámka Připomeňme souvislost s metodou prosté iterace pro řešení soustav nelineárních rovnic:

Funkce $\Phi(x)$ z přepisu $x = \Phi(x)$ musela splňovat podmínku (b') ... (pokud byla diferencovatelná)

$$\boxed{\exists q \in \langle 0,1) : \|\Phi'(x)\| \leq q \quad \forall x.}$$

V našem případě je $\Phi(x) = Hx + g \Rightarrow \Phi'(x) = H$.

Tj. $\boxed{\|H\| < 1}$ Spektrální poloměr $\rho(H)$ je také normou matice H, tj. $\boxed{\rho(H) < 1}$

Předchozí věta je silnější (kritérium), $\Longleftrightarrow$

Věta pro prostou iteraci uváděla postačující podmínky $\Longrightarrow$

Poznámka: Určovat $\rho(H)$ je velmi drahé, proto zachytili uvedené věty (postačující podmínky) jejíž předpoklady se ověří snadněji.

Definice: Maticovou normu $\|\cdot\|$ nazveme multiplikativní, splňuje-li pro všechny čtvercové matice A, B řádu n vztah

$$\boxed{\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|}$$

Příklad

Řešme soustavu $Ax = b$ Jacobiovou metodou

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}9 & 0{,}9 \\ 0{,}9 & 1 & 0{,}9 \\ 0{,}9 & 0{,}9 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2{,}8 \\ 2{,}8 \\ 2{,}8 \end{bmatrix}$$

.. (přesné řešení $x^* = [1, 1, 1]^T$)

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}9 & -0{,}9 \\ -0{,}9 & 0 & -0{,}9 \\ -0{,}9 & -0{,}9 & 0 \end{bmatrix}$$

.. vl. čísla

$-1{,}8 \,;\; 0{,}9 \,;\; 0{,}9$

$\Rightarrow \rho(H) = 1{,}8 > 1$

$\Rightarrow$ metoda diverguje !!!

Maximová norma $\|H\|_M = \max_{i,j} |h_{ij}|$

(Dcv. Ukažte, že $\|\cdot\|_M$ splňuje vlastnosti normy)

$$\boxed{\|H\|_M = 0{,}9 < 1 \quad !!!}$$

$\|\cdot\|_M$ není multiplikativní:

např.: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad A \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

$\|A\|_M = 1 \qquad \|B\|_M = 2 \qquad \|A \cdot B\|_M = 4$

$\|A\|_M \cdot \|B\|_M = 2 < \|A \cdot B\|_M = 4$

!!!

Věta Pro každou multiplikativní maticovou normu $\|\cdot\|$ a čtvercovou matici A platí:

$$\boxed{\rho(A) \leq \|A\|}$$

<u>Důkaz</u>:

$$\rho(A) = \max_i \{|\lambda_i|\} = \lambda_p$$

- nechť číslu λ_p odpovídá normovaný vlastní vektor v_p ($\nu(v_p) = 1$)
- potom

$$\rho(A) = |\lambda_p| \cdot \nu(v_p) = \nu(\lambda_p v_p) = \nu(A v_p)$$

$$\boxed{\nu(A v_p) \leq \|A\| \cdot \underbrace{\nu(v_p)}_{=1}} = \|A\|$$

→ vlastnost kompatibilní maticové a vektorové normy

<u>Věta</u>: Ke každé multiplikativní maticové normě μ existuje kompatibilní vektorová norma ν

<u>Dk</u>: dána maticová norma μ

def: $\nu(x) = \mu([x, 0, 0, 0, .. 0])$ ... splňuje vlastnosti normy

? <u>kompatibilita</u>:

$$\nu(Ax) = \mu([Ax, 0, 0 \ldots 0]) = \mu(A[x, 0, 0, \ldots 0]) \leq$$

$$\leq \mu(A)\mu[x, 0, 0, \ldots 0] = \mu(A) \cdot \nu(x)$$

↑ μ je multiplikativní

Postačující podmínka konvergence

Věta Je-li pro multiplikativní normu splněna podmínka $\boxed{\|H\| \le q < 1}$, potom posloupnost $\{x^{(k)}\}$ určená konzistentní formulí $x^{(k)} = Hx^{(k-1)} + g$ konverguje při libovolné volbě vektoru $x^{(0)} \in R^n$ a platí:

$$\boxed{\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = (I-H)^{-1} g = x^*}$$

Důkaz: Důsledek kritéria a předchozí věty (jiný důkaz viz skripta)

Odhad chyby

Předpokládáme, že je splněna postačující podmínka konvergence

$$\|\mathbf{H}\| \le q < 1$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x^{(k)}} - \mathbf{x}^* &= \mathbf{H}(\mathbf{x^{(k-1)}} - \mathbf{x}^*) = \\
&= \mathbf{H}(\mathbf{x^{(k-1)}} - \mathbf{x^{(k)}} + \mathbf{x^{(k)}} - \mathbf{x}^*) = \\
&= \mathbf{H}(\mathbf{x^{(k-1)}} - \mathbf{x^{(k)}}) + \mathbf{H}(\mathbf{x^{(k)}} - \mathbf{x}^*)
\end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$\left\|\mathbf{x^{(k)}} - \mathbf{x}^*\right\| \ \le \ q\left\|\mathbf{x^{(k)}} - \mathbf{x^{(k-1)}}\right\| + q\left\|\mathbf{x^{(k)}} - \mathbf{x}^*\right\|$$

tj.

$$\underbrace{(1-q)}_{>0}\ \left\|\mathbf{x^{(k)}} - \mathbf{x}^*\right\| \ \le \ q\left\|\mathbf{x^{(k)}} - \mathbf{x^{(k-1)}}\right\|$$

a po vydělení

$$\left\|\mathbf{x^{(k)}} - \mathbf{x}^*\right\| \ \le \ \frac{q}{1-q}\left\|\mathbf{x^{(k)}} - \mathbf{x^{(k-1)}}\right\|$$

Jestliže $\left\|\mathbf{x^{(k)}} - \mathbf{x^{(k-1)}}\right\| < \varepsilon$, potom

$$\boxed{\left\|\mathbf{x^{(k)}} - \mathbf{x}^*\right\| \ \le \ \frac{q}{1-q}\,\varepsilon}$$

Příklad Jacobiovou metodou řešte soustavu $Ax = b$:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 14 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix} \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{L} + \underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{U}$$

$$H_J = -D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}5 & -0{,}25 \\ -0{,}1 & 0 & -0{,}1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad g_J = D^{-1}b = \begin{bmatrix} 1{,}75 \\ 1{,}2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Provedeme 5 iterací:

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k
0	0	0	0
1	1,75	1,2	1
2	0,9	0,925	1
3	1,0375	1,01	1
4	0,995	0,99625	1
5	1,001875	1,0005	1

$$\underbrace{x^{(5)} - x^{(4)}}_{= r^{(5)}} = \begin{bmatrix} 0{,}006875 \\ 0{,}004250 \\ 0{,}000000 \end{bmatrix}$$

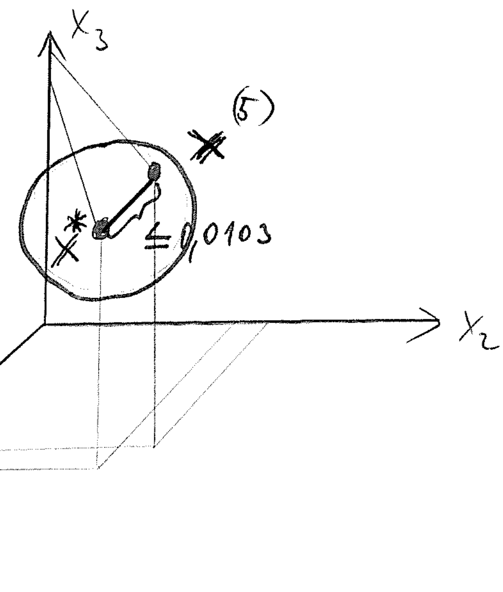
Odhadněme chybu $x^{(5)}$, tj. $\|x^{(5)} - x^*\| \le \dfrac{\|H\|}{1-\|H\|} \cdot \|x^{(5)} - x^{(4)}\|$

Odhad chyby	maticová norma	vektorová norma
$\frac{0{,}5}{1-0{,}5} \cdot 0{,}011125 = \mathbf{0{,}011125}$	$\|H\|_S = \max_k \left(\sum_i h_{ik}\right) = 0{,}5$	$\|r^{(5)}\|_1 = \sum_i \lvert r_i \rvert = 0{,}011125$
$\frac{0{,}75}{0{,}25} \cdot 0{,}006875 \doteq \mathbf{0{,}0206}$	$\|H\|_R = \max_i \left(\sum_k h_{ik}\right) = 0{,}75$	$\|r^{(5)}\|_\infty = \max_i \lvert r_i \rvert = 0{,}006875$
$\frac{0{,}56}{0{,}44} \cdot 0{,}0081 = \mathbf{0{,}0103}$	$\|H\|_{SP} = \max_k \lambda_k^{\frac{1}{2}}(H^H H) \doteq 0{,}56$	$\|r^{(5)}\|_2 = \sum_i r_i^2 \doteq 0{,}0081$

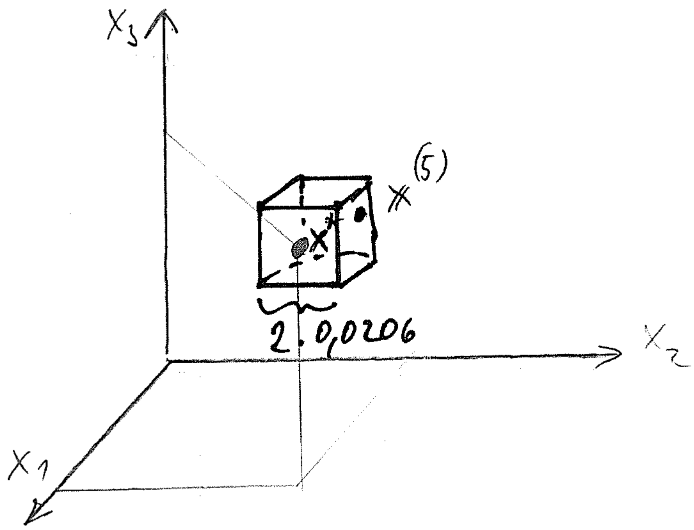
Geometrický význam

- $\boxed{\| x^{(5)} - x^* \|_2 \leq 0{,}0103}$

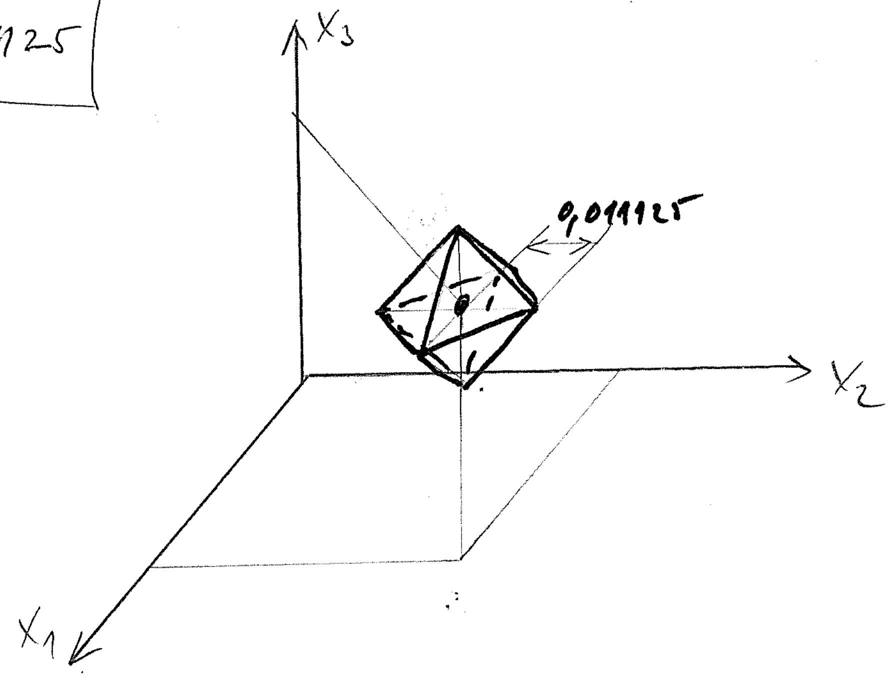
vzdálenost $x^{(5)}$ a x^* je menší než odhad



- $\boxed{\| x^{(5)} - x^* \|_\infty \leq 0{,}0206}$



- $\boxed{\| x^{(5)} - x^* \|_1 \leq 0{,}01125}$



Rychlost konvergence

- **Lineární rychlost konvergence**

$\exists q \in (0,1)\quad k_0 \geq 0\quad k > k_0:$ $\boxed{\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq q\,\|x^{(k)} - x^*\|}$

- **Superlineární rychlost konvergence**

$$\boxed{\begin{aligned}\|x^{(k+1)} - x^*\| &\leq q_k\,\|x^{(k)} - x^*\|\\ q_k &\to 0 \quad (k \to \infty)\end{aligned}}$$

- **Konvergence řádu r**

$$\boxed{\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq q\,\|x^{(k)} - x^*\|^{r}}$$

Pozn:

- Jacobiova m., Gauss-Seidel, SOR ... lineární rychlost konvergence

$$x^{(k+1)} - x^* = H(x^{(k)} - x^*)$$

během výpočtu se nemění iterační matice H, jedná se o stacionární metody .... $\underset{\text{pevné číslo}}{\|H\| \leq q}$

- Metody se superlineární rychlostí konvergence patří mezi nestacionární procesy

$$\boxed{x^{(k+1)} = H_k\,x^{(k)} + g_k}$$

V každém kroku se mohou měnit H_k, g_k

Potom $\|H_k\| \leq q_k$, platí-li $q_k \to 0$ pak jde o superlineární metodu.

Definujeme <u>asymptotickou rychlost konvergence</u>

$$\boxed{R = -\log \frac{\|e^{(k)}\|}{\|e^{(k-1)}\|} \geq -\log \|H\|}$$

udává počet platných desetinných míst získaných v jednom iteračním kroku

<u>Prakticky</u>:

$$\frac{\|e^{(k)}\|}{\|e^{(k-1)}\|} = \frac{\|x^{(k)} - x^*\|}{\|x^{(k-1)} - x^*\|} \approx \frac{\cancel{\frac{q}{1-q}}}{\frac{q}{1-q}} \frac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|}{\|x^{(k-1)} - x^{(k-2)}\|}$$

<u>Pozn</u> Pro metody s lineární rychlostí konvergence (Jacobi, Gauss-Seidel, SOR) lze pro urychlení použít <u>Aitkenovu extrapolační formuli</u> (viz dříve)

posloupnost chyb je geometrická: $e^{(k)} = H e^{(k-1)}$

$$\frac{\underbrace{x_i^{(k+1)} - x_i^*}_{e_i^{(k+1)}}}{\underbrace{x_i^{(k)} - x_i^*}_{e_i^{(k)}}} \approx \frac{\underbrace{x_i^{(k)} - x_i^*}_{e_i^{(k)}}}{\underbrace{x_i^{(k-1)} - x_i^*}_{e_i^{(k-1)}}}$$

po úpravě:

$$\boxed{x_i^* \approx x_i^{(k+1)} - \frac{\left(x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right)^2}{x_i^{(k+1)} - 2x_i^{(k)} + x_i^{(k-1)}}}$$

Při odvození metody SOR jsme se pokusili urychlit výpočet změnou iterační matice H tak, aby měla menší spektrální poloměr $\rho(H)$.

Čím menší je $\rho(H)$, tím je větší asymptotická rychlost konvergence.

$\boxed{\text{Věta}}$ Spektrální poloměr $\rho(H_{SOR})$ splňuje podmínku

$$\rho(H_{SOR}) \geq |\omega - 1| \qquad \forall \omega \in R$$

Důkaz:

$$\boxed{H_{SOR} = (\omega L + D)^{-1}\left[(1-\omega)D - \omega U\right]}$$

Je známo, že součin vlastních čísel je roven determinantu

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det(H_{SOR})}$$

$$\det(H_{SOR}) = \det\left[(\omega L + D)^{-1}\left[(1-\omega)D - \omega U\right]\right]$$

$$= \det\left[\left(D(\omega D^{-1}L + I)\right)^{-1} \cdot D\left[(1-\omega)I - \omega D^{-1}U\right]\right]$$

$$= \det\left[(\omega D^{-1}L + I)^{-1}\left[(1-\omega)I - \omega D^{-1}U\right]\right]$$

$$= \det\underbrace{(\omega D^{-1}L + I)}_{\substack{\triangle \text{ matice} \\ \text{s 1 na diagonále}}}{}^{-1} \cdot \det\Big[\underbrace{(1-\omega)I - \omega D^{-1}U}_{\substack{\nabla \text{ matice s prvky } (1-\omega) \\ \text{na diagonále}}}\Big]$$

$$= (1-\omega)^n$$

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = (1-\omega)^n \Rightarrow \boxed{\underbrace{\max_i |\lambda_i|}_{\rho(H_{SOR})} \geq |1-\omega|}$$

(Dk: sporem $\forall \lambda_i \ |\lambda_i| < |1-\omega| \ / \prod_{i=1}^{n}$

$\prod_{i=1}^{n} |\lambda_i| < |1-\omega|^n$)

Důsledek: Aby SOR konvergovala, musí platit:

$$|\omega - 1| \leq \boxed{\rho(H_{SOR}) < 1}$$

$$|\omega - 1| < 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega \in (0, 2)}$$

Poznámka:

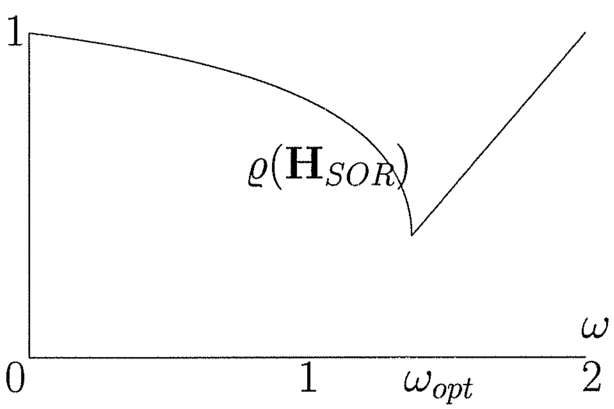
Parametr ω v relaxační metodě SOR volíme z intervalu $(0, 2)$. Pro $\omega = 1$ přejde relaxační metoda na Gauss-Seidlovu metodu. Volba parametru ω samozřejmě ovlivní rychlost konvergence iteračního procesu metody SOR. Lze ukázat, že existuje optimální hodnota parametru omega

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \varrho^2}},$$

kde ϱ je spektrální poloměr Jacobiovy iterační matice $\mathbf{H}_J$.

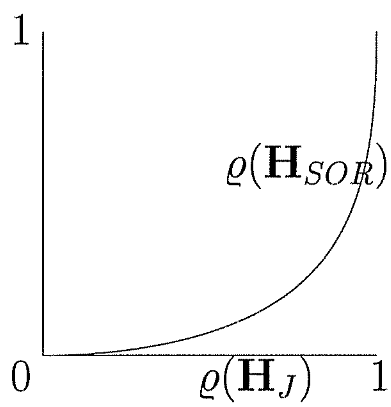
(spektrální poloměr = maximální vlastní číslo v absolutní hodnotě)

Pro spektrální poloměr iterační matice $\mathbf{H}_{SOR}$ relaxační metody lze odvodit následující závislosti:



Obr. 1

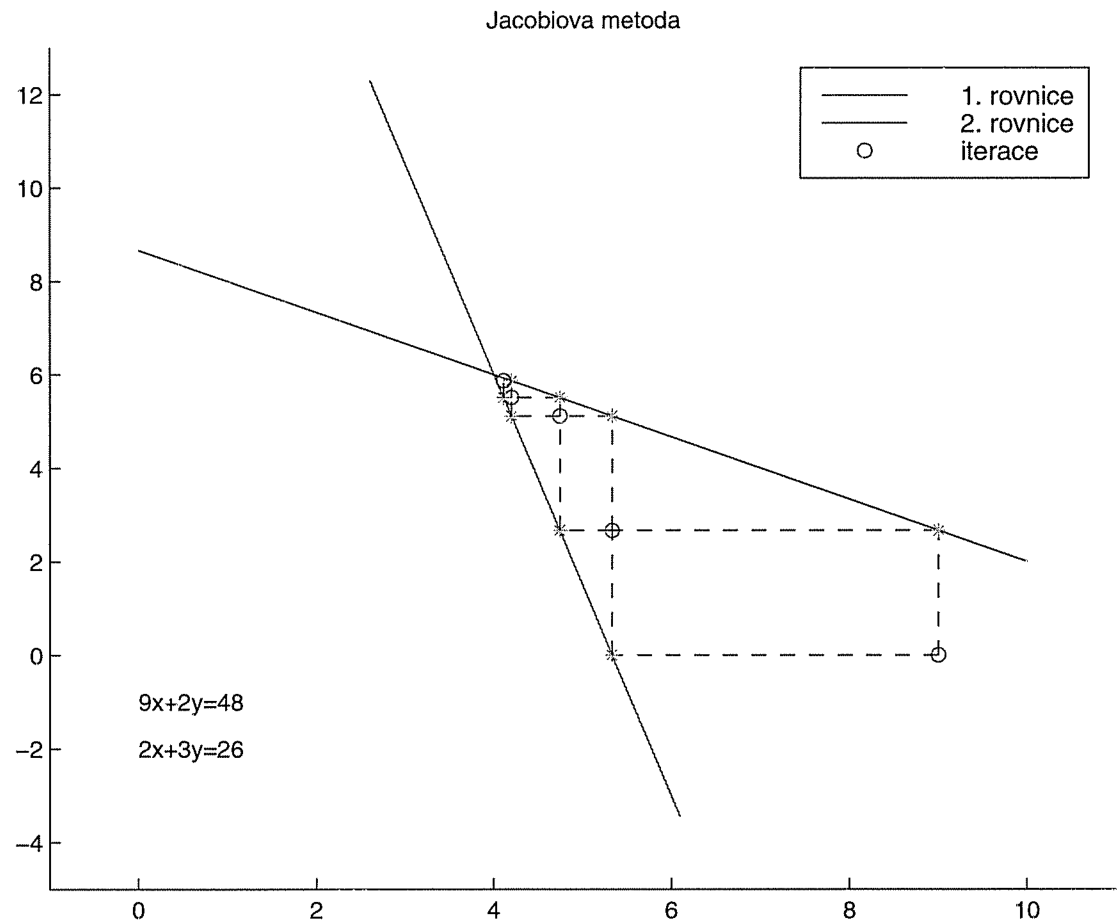
Závislost spektrálního poloměru iterační matice metody SOR na na relaxačním parametru ω



Obr. 2

Závislost spektrálního poloměru matice metody SOR na spektrálním poloměru iterační matice Jacobiovy metody

GEOMETRICKÝ VÝZNAM JACOBIOVY METODY

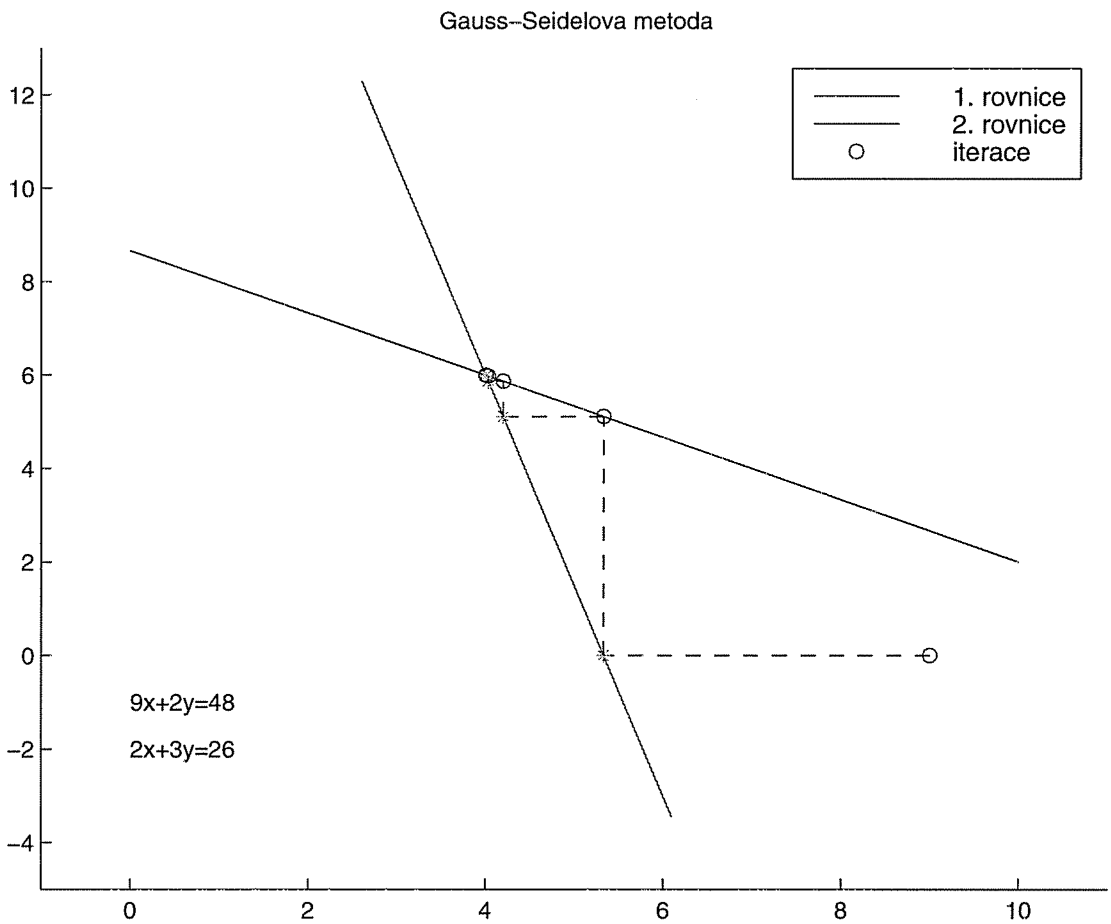


$$x^{(k+1)} = \frac{1}{9}(48 - 2y^{(k)})$$

$$y^{(k+1)} = \frac{1}{3}(26 - 2x^{(k)})$$

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$
0	9.0000	0
1	5.3333	2.6667
2	4.7407	5.1111
3	4.1975	5.5062
4	4.1097	5.8683
5	4.0293	5.9268

GEOMETRICKÝ VÝZNAM GAUSSOVY-SEIDELOVY METODY

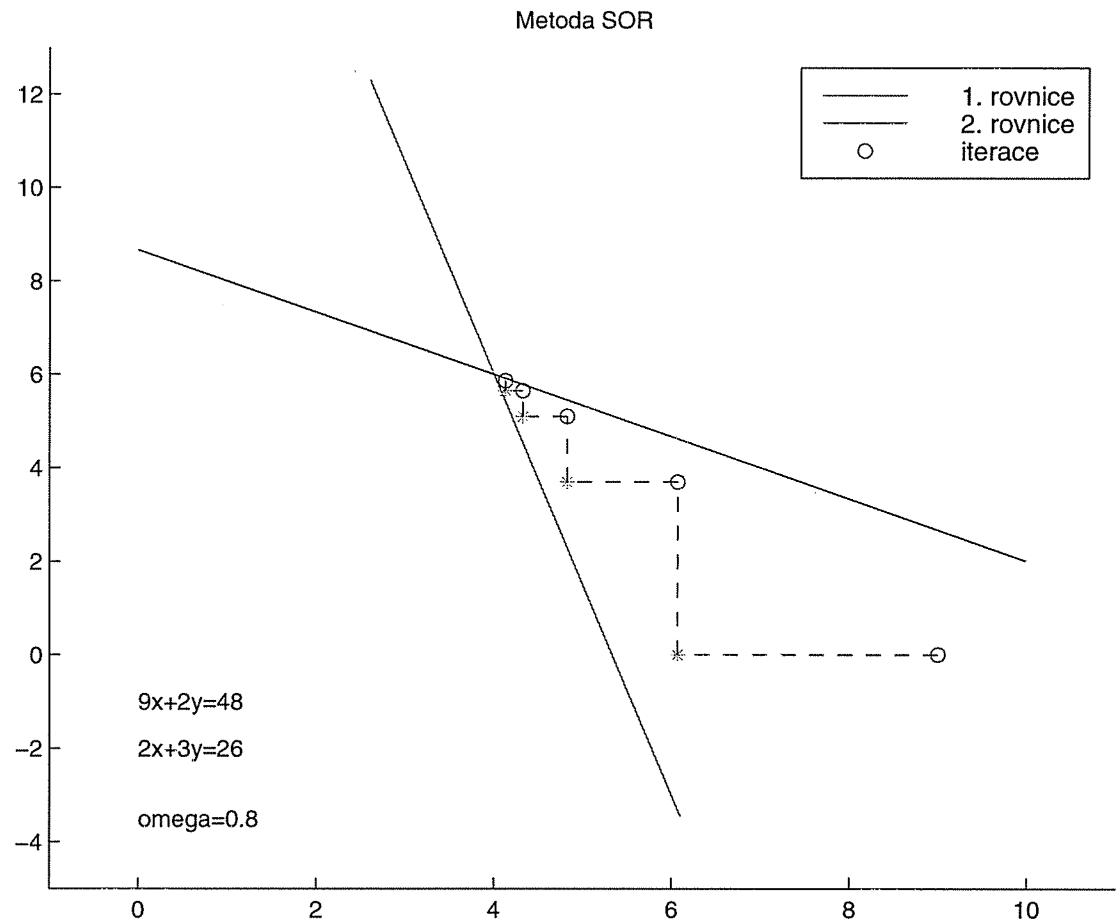


$$x^{(k+1)} = \frac{1}{9}(48 - 2y^{(k)})$$

$$y^{(k+1)} = \frac{1}{3}(26 - 2x^{(k+1)})$$

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$
0	9.0000	0
1	5.3333	5.1111
2	4.1975	5.8683
3	4.0293	5.9805
4	4.0043	5.9971
5	4.0006	5.9996

GEOMETRICKÝ VÝZNAM METODY SOR ($\omega = 0.8$)

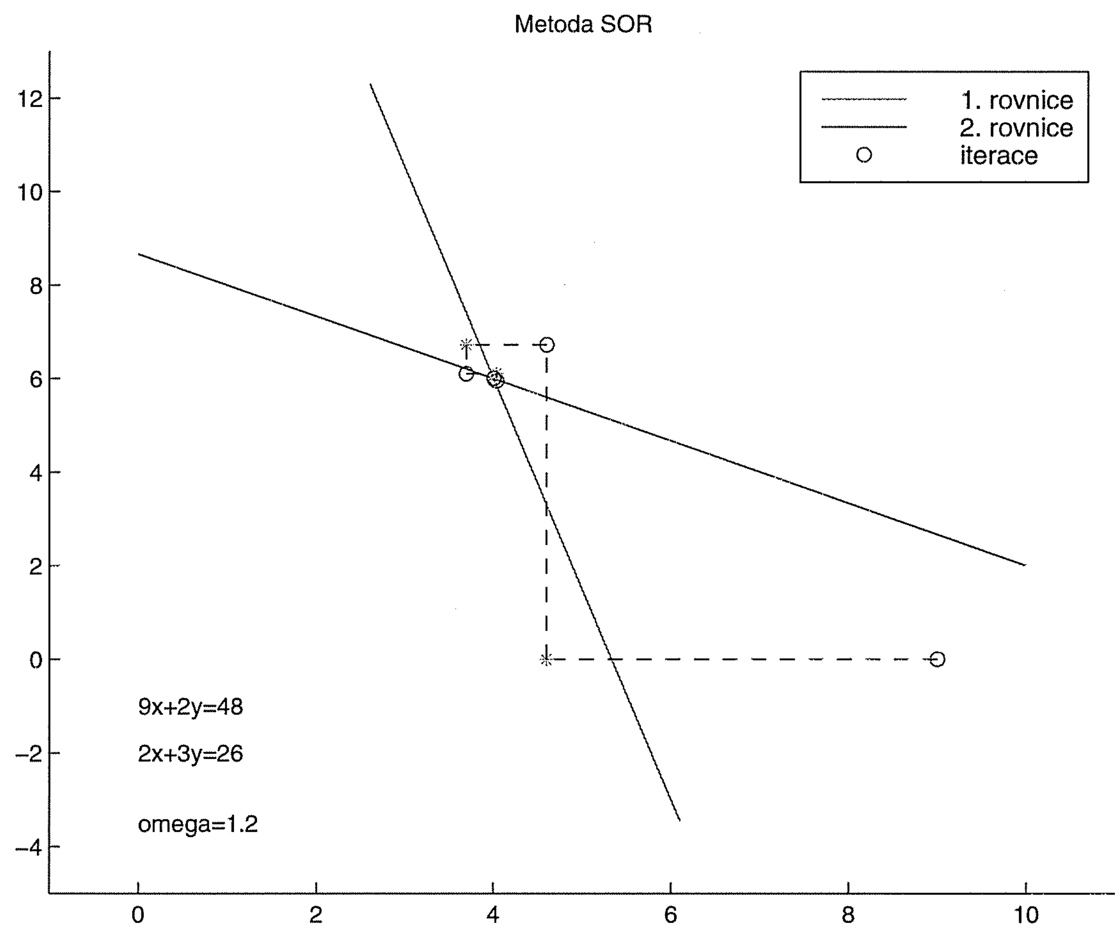


$$x^{(k+1)} = \omega\frac{1}{9}(48 - 2y^{(k)}) + (1-\omega)x^{(k)}$$

$$y^{(k+1)} = \omega\frac{1}{3}(26 - 2x^{(k+1)}) + (1-\omega)y^{(k)}$$

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$
0	9.0000	0
1	6.0667	3.6978
2	4.8226	5.1008
3	4.3244	5.6472
4	4.1276	5.8614
5	4.0502	5.9455

GEOMETRICKÝ VÝZNAM METODY SOR ($\omega = 1.2$)



$$x^{(k+1)} = \omega \frac{1}{9}(48 - 2y^{(k)}) + (1-\omega)x^{(k)}$$

$$y^{(k+1)} = \omega \frac{1}{3}(26 - 2x^{(k+1)}) + (1-\omega)y^{(k)}$$

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$
0	9.0000	0
1	4.6000	6.7200
2	3.6880	6.1056
3	4.0342	5.9515
4	4.0061	6.0048
5	3.9975	6.0010

KONVERGENČNÍ VĚTY

dosud jsme udávali podmínky pro iterační matici H. To je ovšem nepraktické. Uvedeme několik snadněji ověřitelných podmínek.

V1) Je-li matice A ostře diagonálně dominantní, potom konverguje Jacobiova i Gauss-Seidelova metoda pro libovolnou volbu $x^{(0)}$

V2) Je-li matice A symetrická a pozitivně definitní, potom Gauss-Seidelova metoda konverguje pro libovolnou volbu $x^{(0)}$

V3) Nutnou podmínkou konvergence SOR je $0<\omega<2$. Přidáme-li symetrii a pozitivní definitnost matice A, dostaneme postačující podmínky konvergence

Důkaz V1) pro Jacobiova metoda:

$Ax = b$, rozklad matice $A = L + D + U$

označme-li $C = L + U$, potom $A = C + D$

- Jacobiova metoda $\boxed{x^{(k+1)} = H_J x^{(k)} + g_J}$

$$\underline{H_J} = -D^{-1}(L+U) = \underline{-D^{-1}C} \quad \text{a} \quad \underline{g_J = D^{-1}b}$$

- Matice A je ostře diag. dominantní, platí

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad i = 1, 2, \ldots n$$

- Pro náš rozklad $A = C + D$ tedy platí:

$$|d_{ii}| > \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| \quad i = 1, 2 \ldots n \quad / : |d_{ii}| \neq 0$$

Platí: $\forall i$ $\boxed{\sum_{j=1}^{n} \frac{|c_{ij}|}{|d_{ii}|} < 1}$ $(*)$

(kdyby $|d_{ii}| = 0$, potom by byl celý řádek nulový $\lightning$ A ... regulární)

$$H_J = -D^{-1}C = -\begin{bmatrix} \frac{1}{d_{11}} & & & \\ & \frac{1}{d_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{d_{nn}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} & & \\ & c_{ij} & \\ & & \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} & & \\ & \frac{c_{ij}}{d_{ii}} & \\ & & \end{bmatrix}$$

Řádková norma matice H_J:

$$\boxed{\|H_J\|} = \max_{i} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{c_{ij}}{d_{ii}} \right| \boxed{< 1} \quad (*)$$

∎