1 Pozn.: **Normy vektorů a matic**

norma: zobrazení v lineárním vektorovém prostoru $\mathcal{L}$ do R_0^+:
1/ $n(x) = 0 \iff x = o$ (definitnost)
2/ $n(\lambda x) = |\lambda| \cdot n(x)$ (homogenita)
3/ $n(x+y) \leq n(x) + n(y)$ (Δ nerovnost)

VEKTORY:

$$\|x\|_p = \left(\sum_i |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$ … p-tá vektorová norma

MATICE:

$\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$ … první vektorová norma $\longleftrightarrow$ $\|A\|_S = \max_k \left\{\sum_i a_{ik}\right\}$ sloupcová maticová norma

$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}$ … euklidovská vektorová norma $\longleftrightarrow$ $\|A\|_{SP} = \max_k \left\{\lambda_k^{\frac{1}{2}}(A^H A)\right\}$ spektrální norma

$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$ … maximová norma $\longleftrightarrow$ $\|A\|_R = \max_i \left\{\sum_k a_{ik}\right\}$ řádková maticová norma

$= \lim_{p \to \infty} \left(\sum_i |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$n(Ax) \leq n(A)\,n(x)$
$(\exists x_0 \neq o \quad n(Ax_0) = n(A)\,n(x_0))$

($\longleftrightarrow$ maticová norma je podřízená vektorové normě)
($\Rightarrow$ kompatibilní)

Pozn.: A^H … hermitovsky transponovaná
$A^H = [a_{ij}^H] = [\bar{a}_{ji}]$ komplexně sdružené č.

Př.: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \longleftrightarrow x = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\|A\|_S = \max\{|2|+|0|\,;\,|-1|+|3|\} = \max\{2;4\} = \underline{4} \longleftrightarrow \|x\|_1 = |6|+|-1| = \underline{7}$

$\|A\|_R = \max\{|2|+|-1|\,;\,|0|+|3|\} = \max\{3,3\} = \underline{3} \longleftrightarrow \|x\|_\infty = \max\{|6|,|-1|\} = \underline{6}$

$\|A\|_{SP}$: $\quad A^H A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$

$\det(A^H A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 10-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(10-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 14\lambda + 36$

$\lambda_{1,2}(A^H A) = \dfrac{14 \pm \sqrt{14^2 - 4\cdot 36}}{2} = 7 \pm \sqrt{7^2 - 36} = 7 \pm \sqrt{13}$

$\max|\lambda_{1,2}| = 7 + \sqrt{13}$

$\|A\|_{SP} = \sqrt{7+\sqrt{13}} \doteq \underline{3{,}2566}$

$\|x\|_2 = \sqrt{6^2 + (-1)^2} = \sqrt{37} \doteq \underline{6{,}0827}$