ŘEŠENÍ SOUSTAV NELINEÁRNÍCH ROVNIC

Formulace

Jsou dány funkce $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ definované na $\langle a_i, b_i \rangle$.

Označme $I = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \ldots \times \langle a_n, b_n \rangle$.

Hledáme $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in I$ tak, aby

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

Vektorově:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0},$$

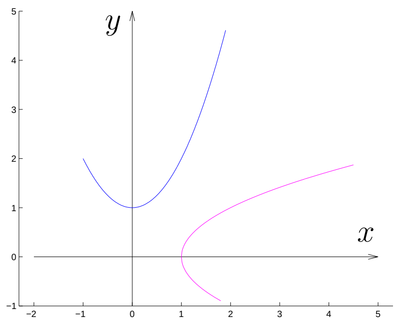
kde $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n)^T$.

Příklad: Řešte soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé

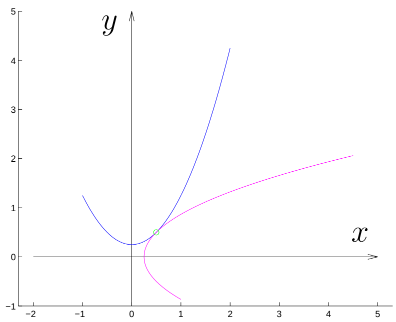
$$x^2 - y + a = 0$$
$$-x + y^2 + a = 0$$

---

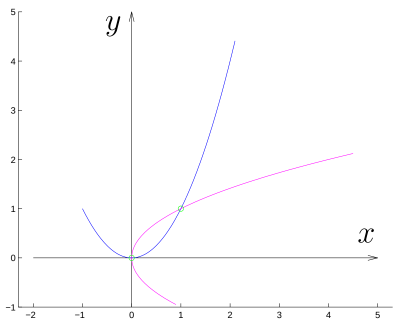
1) $a = 1$



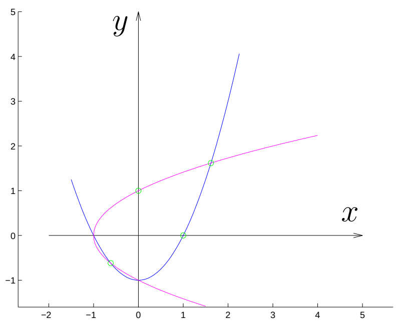
2) $a = \dfrac{1}{4}$



3) $a = 0$



4) $a = -1$



Metoda prosté iterace

Soustavu rovnic $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ nahradíme soustavou rovnic $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$.
(Více možností)

Algoritnus:

1) Zadáme $\boldsymbol{x}^0 \in I$, $\varepsilon > 0$
2) $\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^k)$
3) Je-li $\|\boldsymbol{x}^{k+1} - \boldsymbol{x}^k\| < \varepsilon$, pak $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{k+1}$, KONEC
jinak jdi na 2)

Věta: (Postačující podmínky konvergence)
Předpokládejme, že je funkce $\boldsymbol{\Phi}$ na I spojitá a platí:
(a) $\forall \boldsymbol{x} \in I : \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) \in I$ (funkce $\boldsymbol{\Phi}$ zobrazuje I do sebe),
(b) $\exists q \in \langle 0, 1) : \; \|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{y})\| \le q\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in I$
(funkce $\boldsymbol{\Phi}$ je kontrakce).
Potom 1. v množině I existuje právě jedno řešení $\boldsymbol{x}$ soustavy rovnic $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$,
2. posloupnost $\{\boldsymbol{x}^k\}_{k=1}^{\infty}$ určená formulí $\boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{k-1})$ konverguje
pro každé $\boldsymbol{x}^0 \in I$ a $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{x}$.

Poznámka: Pro diferencovatelnou funkci $\boldsymbol{\Phi}$ lze podmínku (b) nahradit
(b‘) $\exists q \in \langle 0, 1) : \; \|\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x})\| \le q \quad \forall \boldsymbol{x} \in I$

kde $\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}) = \left[\dfrac{\partial \Phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_j}\right]$ je Jacobiho matice.

Výhoda: Výpočet podle rekurentní formule je velmi jednoduchý.

Nevýhoda: Obecně je obtížné najít funkci $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$ tak, aby byla zaručena konvergence.

Příklad:

Řešte metodou prosté iterace soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé

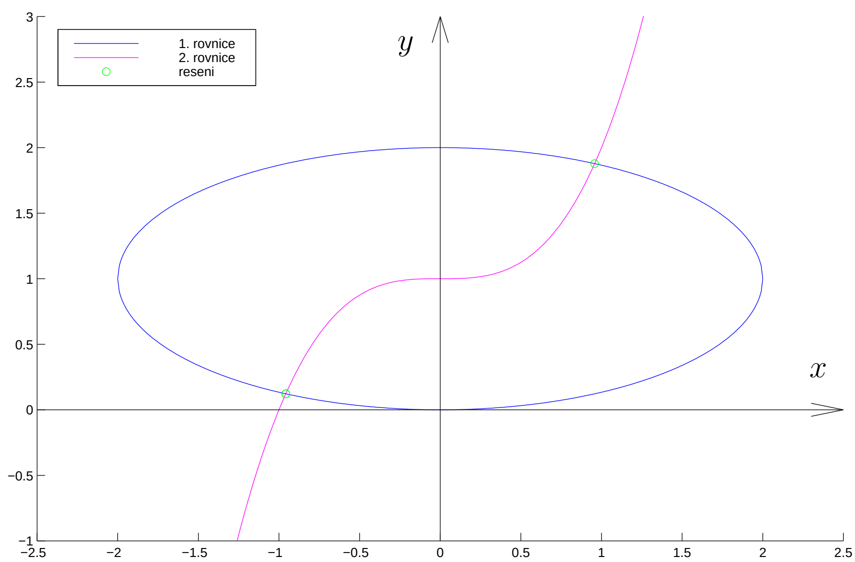
$$x^2 + 4y^2 - 8y = 0$$
$$x^3 - y + 1 = 0$$

---

1. rovnice je rovnicí eplipsy $\quad x^2 + 4(y-1)^2 = 4$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = 1$$

2. rovnici upravíme na tvar $\quad y = x^3 + 1$



Z 2.rovnice vyjádříme x:

$$x^3 = y - 1$$

$$x = \sqrt[3]{y-1}$$

Z 1.rovnice vyjádříme y:

$$4y^2 = 8y - x^2$$

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{8y - x^2}$$

Rekurentní formule:

$$x_{k+1} = \sqrt[3]{y_k - 1} \qquad\qquad y_{k+1} = \frac{1}{2}\sqrt{8y_k - x^2_{k(+1)}}$$

Řešení: pro $x_0 = 2$, $y_0 = 2$, $\varepsilon = 0,01$

k	x_k	y_k	$\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_{k-1}\|$
0	2.0000	2.0000	
1	1.0000	1.7321	0.1159
2	0.9013	1.7928	0.0523
3	0.9255	1.8392	0.0283
4	0.9432	1.8612	0.0126
5	0.9514	1.8708	0.0054

Newtonova metoda

Odvození je opět analogické případu funkce jedné reálné proměnné.
Vyjádříme si Taylorův rozvoj funkce $\boldsymbol{F}$ v bodě $\boldsymbol{x}^k$.
(Předpokládáme, že existují derivace !)

$$\boldsymbol{F}(x) = \boldsymbol{F}(x^k) + \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}^k)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^k) + \frac{1}{2}\boldsymbol{F}''(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k)^2$$

Soustavu rovnic $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ nahradíme soustavou lineárních rovnic

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^k) + \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}^k)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^k) = \boldsymbol{0}$$

Její řešení označíme $\boldsymbol{x}^{k+1}$, tj.

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^k) + \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}^k)\underbrace{(\boldsymbol{x}^{k+1} - \boldsymbol{x}^k)}_{\boldsymbol{h}^k} = \boldsymbol{0}$$

Dostáváme soustavu

$$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}^k)\boldsymbol{h}^k = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^k),$$

která má řešení

$$\boldsymbol{h}^k = -[\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}^k)]^{-1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^k)$$

Novou iteraci $\boldsymbol{x}^{k+1}$ získáme ze vztahu

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{h}^k$$

Poznámka:

$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}^k)$ je Jacobiho matice funkce $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{x}^k$.
Je zřejmé, že musí být regulární (musí existovat matice k ní inverzní).

Příklad:

Řešte Newtonovou metodou soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 - 8y &= 0 \\ x^3 - y + 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{F}(x, y) = \begin{bmatrix} x^2 + 4y^2 - 8y \\ x^3 - y + 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} = 8y - 8$$

$$\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} = 3x^2 \qquad \frac{\partial F_2(x,y)}{\partial y} = -1$$

$$\boldsymbol{F}'(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 8y - 8 \\ 3x^2 & -1 \end{bmatrix}$$

<u>1. iterace</u>

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ y^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1^0 \\ h_2^0 \end{bmatrix}$$

Platí

$$\boldsymbol{h}^0 = -[\boldsymbol{F}'(x^0, y^0)]^{-1}\boldsymbol{F}(x^0, y^0)$$

Abychom nemuseli počítat inverzní matici, vypočteme $\boldsymbol{h}^0$ jako řešení soustavy

$$\boldsymbol{F}'(x^0, y^0)\boldsymbol{h}^0 = -\boldsymbol{F}(x^0, y^0)$$

$$\boldsymbol{F}(x^0, y^0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{F}'(x^0, y^0) = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 12 & -1 \end{bmatrix}$$

Dostaneme

$$\boldsymbol{h}^0 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x^1 \\ y^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1^0 \\ h_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,4 \\ 1,8 \end{bmatrix}$$

2. iterace

$$\begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 \\ y^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1^1 \\ h_2^1 \end{bmatrix}$$

Platí

$$\boldsymbol{h}^1 = -[\boldsymbol{F}'(x^1, y^1)]^{-1}\boldsymbol{F}(x^1, y^1)$$

Abychom nemuseli počítat inverzní matici, vypočteme $\boldsymbol{h}^1$ jako řešení soustavy

$$\boldsymbol{F}'(x^1, y^1)\boldsymbol{h}^1 = -\boldsymbol{F}(x^1, y^1)$$

$$\boldsymbol{F}(x^1, y^1) = \begin{bmatrix} 0,52 \\ 1,944 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{F}'(x^1, y^1) = \begin{bmatrix} 2,8 & 6,4 \\ 5,88 & -1 \end{bmatrix}$$

Dostaneme

$$\boldsymbol{h}^1 = \begin{bmatrix} -0,3206 \\ 0,0590 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 \\ y^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1^1 \\ h_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,4 \\ 1,8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,3206 \\ 0,0590 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0794 \\ 1,8590 \end{bmatrix}$$

3. iterace

$$\begin{bmatrix} x^3 \\ y^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1^2 \\ h_2^2 \end{bmatrix}$$

Platí

$$\boldsymbol{h}^2 = -[\boldsymbol{F}'(x^2, y^2)]^{-1}\boldsymbol{F}(x^2, y^2)$$

Abychom nemuseli počítat inverzní matici, vypočteme $\boldsymbol{h}^2$ jako řešení soustavy

$$\boldsymbol{F}'(x^2, y^2)\boldsymbol{h}^2 = -\boldsymbol{F}(x^2, y^2)$$

$$\boldsymbol{F}(x^2, y^2) = \begin{bmatrix} 0,52 \\ 1,944 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{F}'(x^1, y^1) = \begin{bmatrix} 2,8 & 6,4 \\ 5,88 & -1 \end{bmatrix}$$

Dostaneme

$$\boldsymbol{h}^1 = \begin{bmatrix} -0,3206 \\ 0,0590 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 \\ y^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1^1 \\ h_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,4 \\ 1,8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,3206 \\ 0,0590 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0794 \\ 1,8590 \end{bmatrix}$$

k	x_k	y_k	$\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_{k-1}\|$
0	2.0000	2.0000	
1	1.4000	1.8000	0.6325
2	1.0794	1.8590	0.3260
3	0.9703	1.8763	0.1105
4	0.9577	1.8779	0.0127