NELINEÁRNÍ ROVNICE

Formulace:

Je dána funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná na intervalu $\langle a, b \rangle$.
Hledáme číslo x z intervalu $\langle a, b \rangle$ tak, aby platila rovnost $f(x) = 0$.
Číslo x nazveme **řešení** nebo **kořen rovnice**.

Poznámka:

Najít přesné řešení analyticky je možné jen ve velmi jednoduchých případech, např. při řešení lineární rovnice $12x - 3 = 0$, při řešení kvadratické rovnice $4x^2 - 5x + 8 = 0$ nebo např. při řešení rovnice $\sin 5x = \pi$. Proto je nutné pro nalezení kořenů použít nějakou numerickou metodu.

Numerické metody, kterými se budeme zabývat jsou založeny na **iteračních principech**. Pro každou iterační metodu nás budou zajímat odpovědi na dvě otázky:

- Konverguje posloupnost iterací ke hledanému kořenu?
- Jestliže ano, jak rychle?

Metody řešení:

- startovací metody (vždy konvergentní metody)
- zpřesňující metody
- speciální metody (např. pro polymomy)

Tímto rozdělením ovšem nechceme zdůraznit, že startovací metoda konverguje pomalu vždy a naopak, že zpřesňující metoda konverguje vždy rychle.

Poznamenejme, že vždy budeme předpokládat, že daná funkce f je v uvažovaném intervalu $\langle a, b\rangle$ **spojitá** neboť tento předpoklad je důležitý v následující větě.

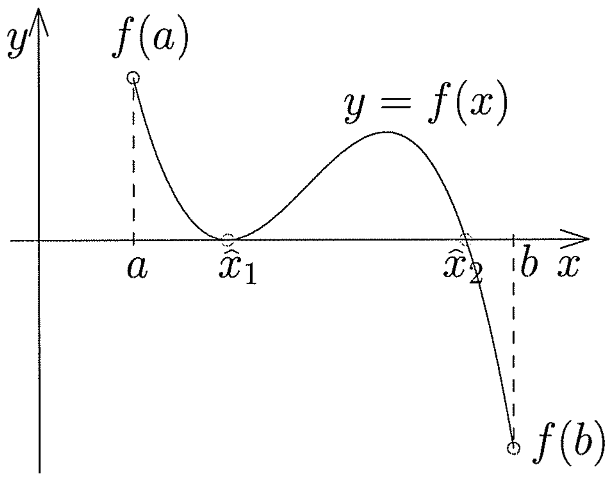
Věta: Předpokládejme, že

(i) reálná funkce f je spojitá pro $x \in \langle a, b \rangle$,

(ii) $f(a).f(b) < 0$.

Potom existuje aspoň jedno řešení x rovnice $f(x) = 0$ na $\langle a, b \rangle$.

Větu ilustruje obrázek



Startovací metody

- metoda půlení intervalu
- regula falsi
- metoda prosté iterace

Zpřesňující metody

- Newtonova metoda
- metoda sečen
- Mullerova metoda

Metoda prosté iterace

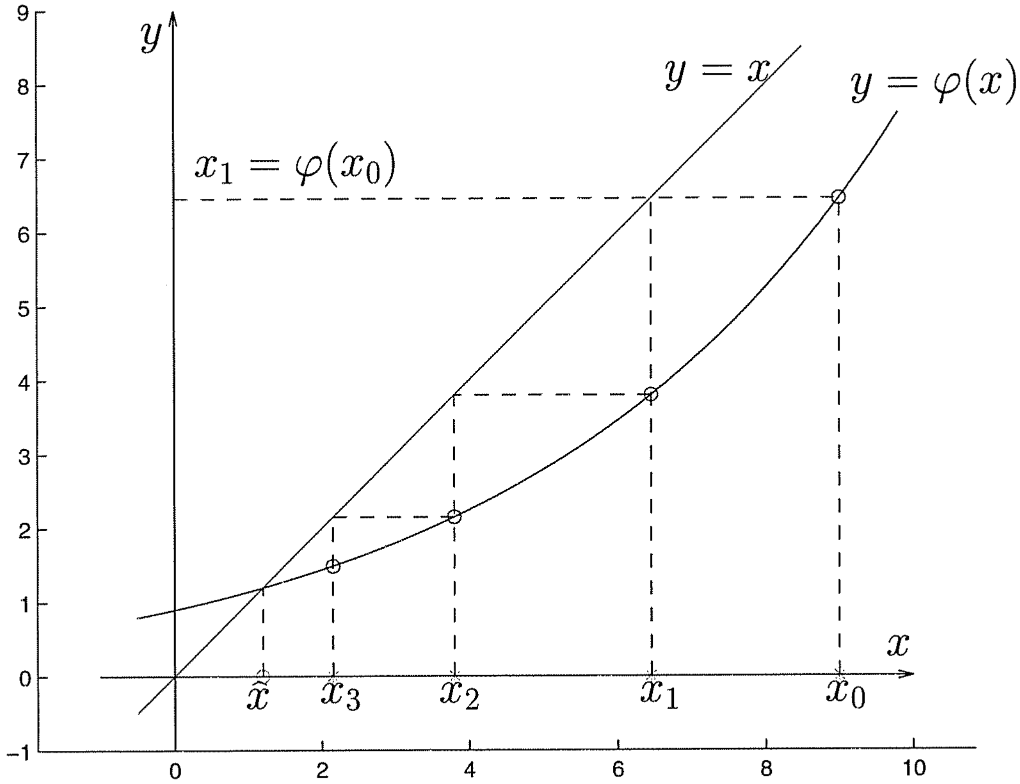
Všechny iterační metody lze pokládat za speciální případ této metody.

Princip:

- původní rovnici $\boxed{f(x) = 0}$ přepíšeme na tvar $\boxed{x = \varphi(x)}$
- existuje celá řada možností, jak to udělat!
- na konkrétní volbě funkce φ závisí
  <u>konvergence metody</u>
  <u>rychlost konvergence</u>

Algoritnus:

1) Zadáme $x_0 \in \langle a, b \rangle$, $\varepsilon > 0$
2) $x_{k+1} = \varphi(x_k)$
3) Je-li $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$, pak $x = x_{k+1}$, KONEC
   jinak jdi na 2)



y
$y = x$
$y = \varphi(x)$
$x_1 = \varphi(x_0)$
x
$\tilde{x}$
x_3
x_2
x_1
x_0
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
0
2
4
6
8
10

Příklad:

Metodou prosté iterace najděte na intervalu $\langle 1, 4\rangle$ řešení rovnice

$$x^2 + \ln x - \frac{10}{x} = 0.$$

Za počáteční iteraci volíme střed zadaného intervalu, tj. $x_0 = 2,5$.

Řešení:

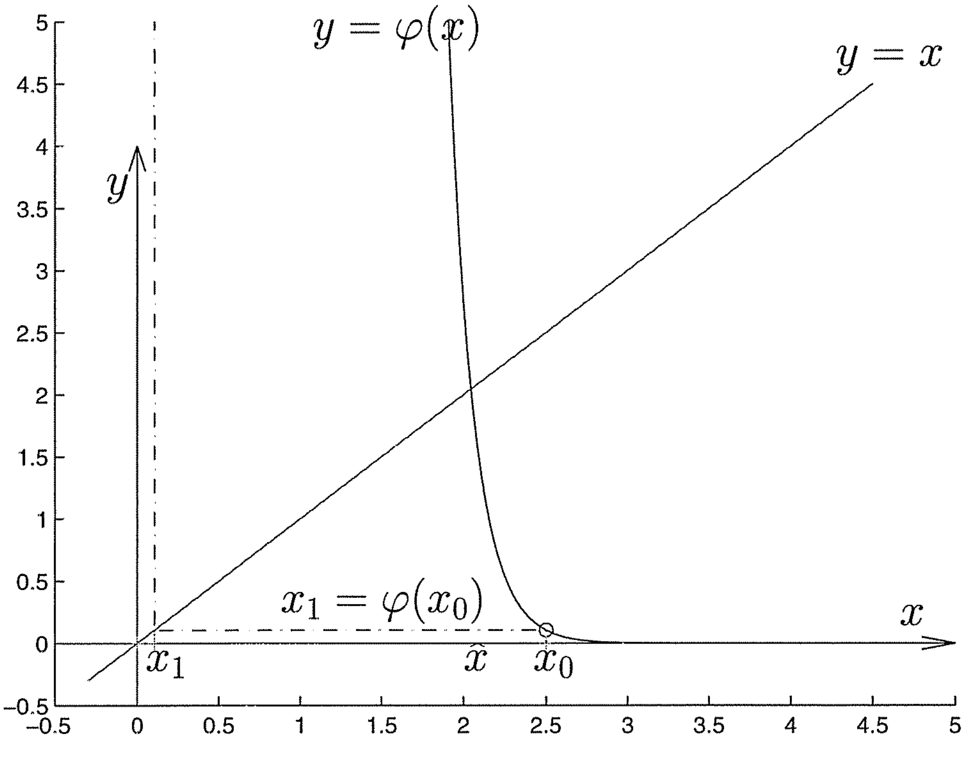
Ukážeme si 4 způsoby přepisu rovnice $f(x) = 0$ na tvar $x = \varphi(x)$.

1. způsob:

$$\ln x = \frac{10}{x} - x^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = e^{\left(\frac{10}{x} - x^2\right)}} \quad \text{tj.} \quad \varphi(x) = e^{\left(\frac{10}{x} - x^2\right)}$$

k	x_k
0	$2,5$
1	0.1054
2	$1.5845 \cdot 10^{41}$

již první iterace x_1 je mimo zadaný interval, navíc druhá iterace x_2 je velmi velké číslo a proto metoda prosté iterace nekonverguje.

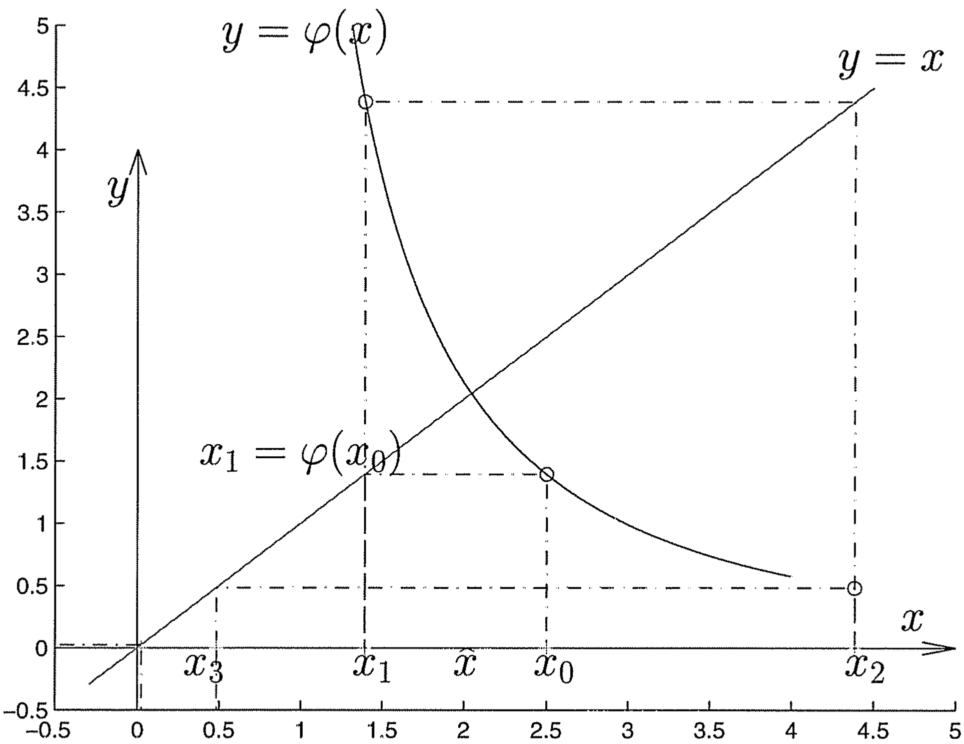


2. způsob:

$$x^2 + \ln x = \frac{10}{x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{10}{x^2 + \ln x}} \quad \text{tj.} \quad \varphi(x) = \frac{10}{x^2 + \ln x}$$

k	x_k
0	2,5
1	1.3954
2	4.3852
3	0.4829
4	−20.2122

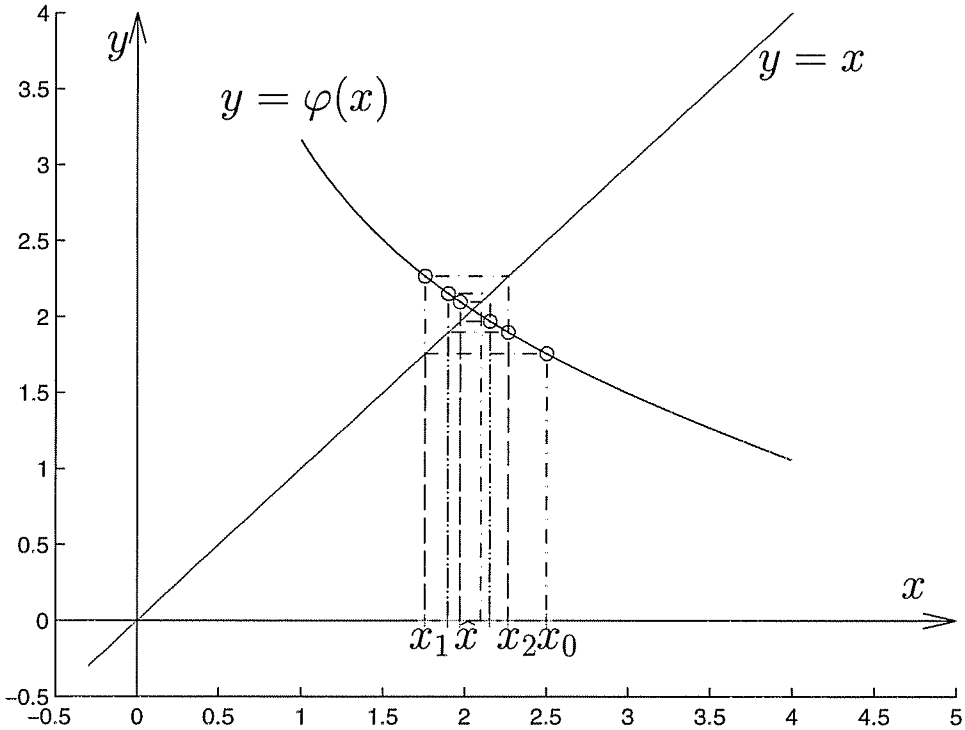
podobně jako v předchozím případě, zde je 2. iterace x_2 mimo zadaný interval a metoda prosté iterace opět nekonverguje.



3. způsob:

$$x^2 = \frac{10}{x} - \ln x \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \sqrt{\frac{10}{x} - \ln x}} \quad \text{tj.} \quad \varphi(x) = \sqrt{\frac{10}{x} - \ln x}$$

k	x_k
0	2,5
1	1.7560
2	2.2653
3	1.8965
4	2.1524
5	1.9696
6	2.0974
7	2.0067
8	2.0704
9	2.0254
10	2.0571
11	2.0347
12	2.0505
13	2.0393
14	2.0472
15	2.0416
16	2.0455
17	2.0428
18	2.0447
19	2.0434

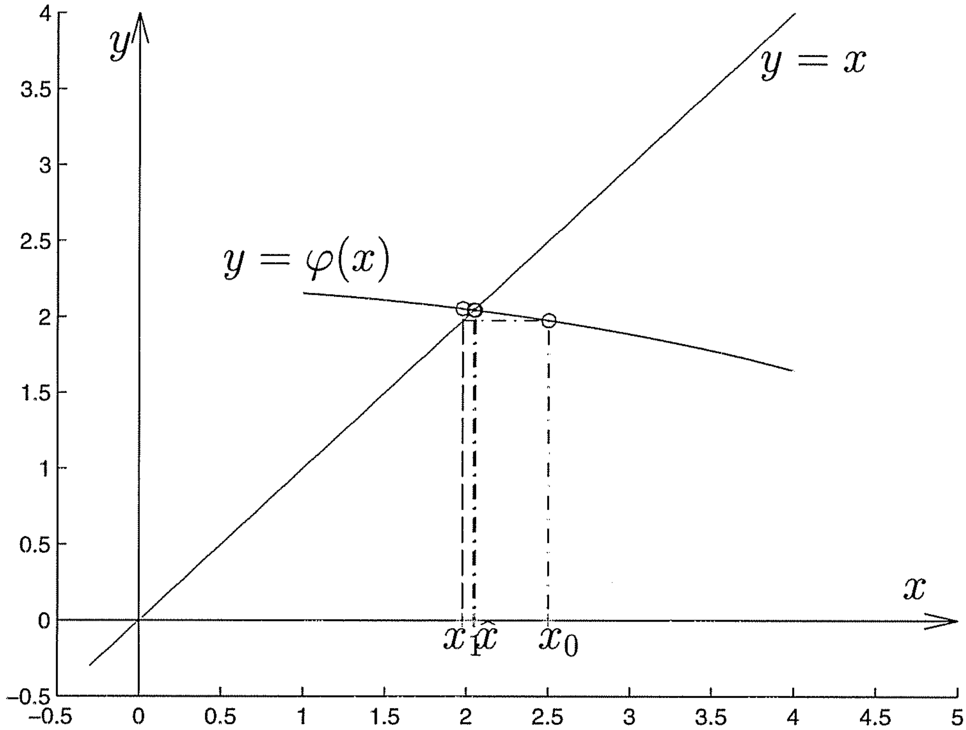


V tomto případě metoda prosté iterace konvergovala k výsledku $\hat{x}$. Rychlost konvergence ovšem nebyla velká.

4. způsob:

$$x^3 + x \ln x - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \sqrt[3]{10 - x \ln x}} \quad \text{tj.} \quad \varphi(x) = \sqrt[3]{10 - x \ln x}$$

k	x_k
0	2,5
1	1.9755
2	2.0532
3	2.0427
4	2.0441
5	2.0439



V tomto posledním případě metoda prosté iterace konvergovala k výsledku $\hat{x}$ velmi rychle. To dokazuje ten fakt, že kdybychom použili pro zastavení podmínku, aby absolutní hodnota rozdílu dvou po sobě jdoucích iterací byla menší než 10^{-10} potřebovali bychom k tomu pouze 10 iterací.

$\square$

Poznámka: Největší problém metody prosté iterace je nalezení předpisu pro funkci $\varphi = \varphi(x)$ tak, aby metoda konvergovala.

Věta: (Postačující podmínky konvergence metody prosté iterace)

Předpokládejme, že je funkce φ na intervalu $I = \langle a, b\rangle$ spojitá a platí:

(a) $\forall x \in I : \varphi(x) \in I$ (**funkce φ zobrazuje I do sebe**),

(b) $\exists q \in \langle 0, 1) : \ |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q|x - y| \quad \forall x, y \in I$

(**funkce φ je kontrakce**).

Potom

1) v intervalu I existuje právě jeden kořen x rovnice $x = \varphi(x)$,

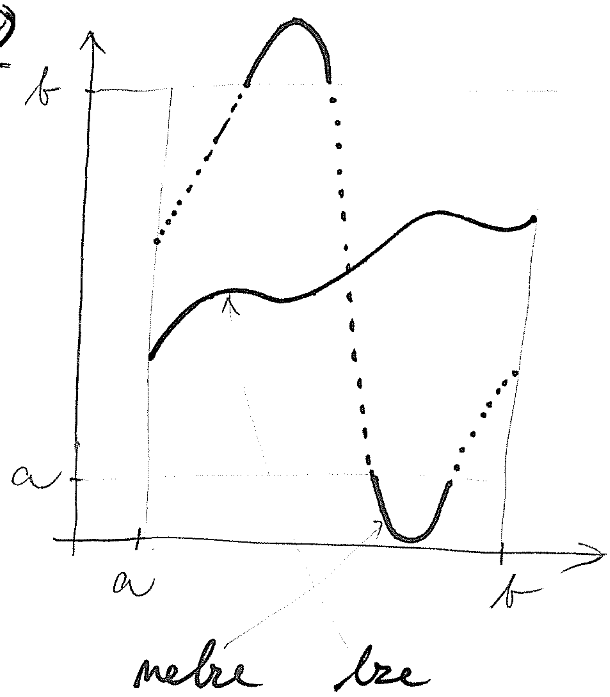
2) posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ určená formulí $x_k = \varphi(x_{k-1})$ konverguje pro každé $x_0 \in I$ a $\lim_{k\to\infty} x_k = x$.

Poznámka: Podívejte se na souvislost předpokladů předchozí věty a volby funkce φ v jednotlivých případech předchozího příkladu.

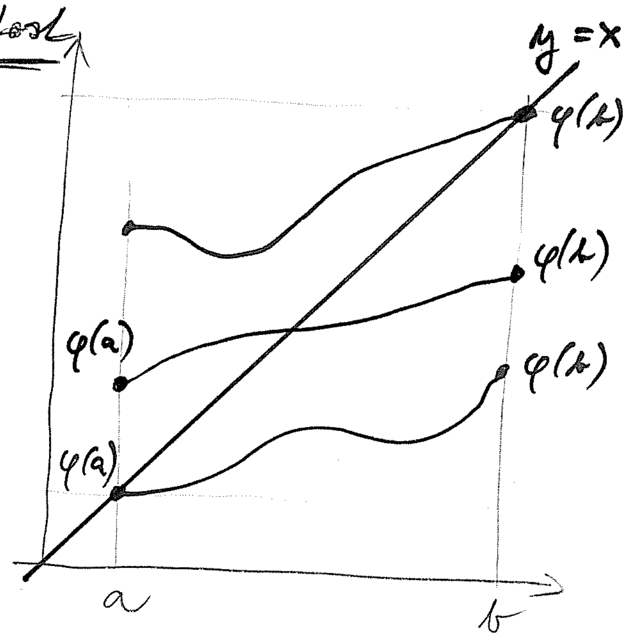
Důkaz:

(1) $\boxed{\text{existence}}$ je důsledkem spojitosti φ a podmínky (a)

(a)



+spojitost



$\Rightarrow$ $\varphi(x) \geq a$, $\varphi(x) \leq b$ $\forall x \in \langle a, b \rangle$

$\Rightarrow$ musí platit

$\varphi(a) \geq a$, $\varphi(b) \leq b$

$\boxed{\text{jednoznačnost}}$ plyne z vlastnosti (b)

Dk sporem:

Předpokládejme, že existují 2 různé hodnoty $\alpha_1 \neq \alpha_2$ takové, že

$$\alpha_1 = \varphi(\alpha_1)$$
$$\alpha_2 = \varphi(\alpha_2)$$

Potom platí:

$$|\alpha_2 - \alpha_1| = |\varphi(\alpha_2) - \varphi(\alpha_1)| \overset{(b)}{\leq} q\,|\alpha_2 - \alpha_1| \overset{\lightning}{<} |\alpha_2 - \alpha_1|$$

(2) platí:

$$x_k = \varphi(x_{k-1})$$

$$\alpha = \varphi(\alpha)$$

po odečtení:

$$x_k - \alpha = \varphi(x_{k-1}) - \varphi(\alpha)$$

$$\Rightarrow |x_k - \alpha| = |\varphi(x_{k-1}) - \varphi(\alpha)| \overset{(b)}{\leq} q\,|x_{k-1} - \alpha|$$

$$\Rightarrow \boxed{|x_k - \alpha| \leq q^k \underbrace{|x_0 - \alpha|}_{\text{konst}} \qquad \forall x_0 \in \langle a, b\rangle}$$

$$q^k \to 0 \text{ pro } k \to \infty \quad (|q| < 1)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} |x_k - \alpha| = 0 \qquad \forall x_0 \in \langle a, b\rangle}$$

Poznámka: Pro diferencovatelnou funkci φ lze podmínku (b) nahradit podmínkou

(b') $\exists q \in \langle 0,1) : \ |\varphi'(x)| \leq q \quad \forall x \in I$

Poznámka: Rychlost konvergence metody prosté iterace charakterizuje $|\varphi'(x_k)|$, protože můžeme psát

$$\varphi'(x_k) \approx \frac{\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)}{x_{k+1} - x_k} = \frac{x_{k+2} - x_{k+1}}{x_{k+1} - x_k}.$$

Poznámka:

Jak bylo řečeno hodnota rozdílu dvou po sobě jdoucích iterací neodpovídá obecně chybě přibližného řešení. Geometricky si to lze představit takto:

Odhad chyby metody prosté iterace

- Mějme konvergentní iterační proces:

$$x_k = \varphi(x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots$$

řešení α potom splňuje:

$$\alpha = \varphi(\alpha) \text{ a } \lim_{k\to\infty} x_k = \alpha$$

- Odečtením rovností dostaneme:

$$x_k - \alpha = \varphi(x_{k-1}) - \varphi(\alpha) \tag{A}$$

- Dále platí:

$$|x_{k-1} - \alpha| = |x_{k-1} - x_k + x_k - \alpha| \leq |x_{k-1} - x_k| + |x_k - \alpha| \tag{B}$$

- Potom:

$$|x_k - \alpha| \overset{\text{(A)}}{=} |\varphi(x_{k-1}) - \varphi(\alpha)| \overset{\text{(b)}}{\leq} q|x_{k-1} - \alpha| \overset{\text{(B)}}{\leq} q|x_{k-1} - x_k| + q|x_k - \alpha|$$

$$\underbrace{(1-q)}_{>0}|x_k - \alpha| \leq q|x_{k-1} - x_k|$$

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{q}{1-q}|x_{k-1} - x_k|$$

- Použijeme-li zastavovací podmínku $|x_{k-1} - x_k| < \varepsilon$, potom platí <u>odhad chyby:</u>

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{q}{1-q}\,\varepsilon$$

Příklad:

Pomocí metody prosté iterace řešte na intervalu $\langle 0,4\rangle$ rovnici

$$x-\sqrt{x+4}=0.$$

---

přesné řešení:

$$x=\sqrt{x+4} \quad /^2$$

$$x^2=x+4$$

$$x^2-x-4=0$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{x_1\approx 2,5615}, \quad x_2\approx -1,5615\notin\langle 0,4\rangle$$

- Rovnici přepíšeme na tvar: $x=\underbrace{\sqrt{x+4}}_{\varphi(x)}$
- Ověříme splnění předpokladů věty o postačujících podmínkách konvergence metody prosté iterace:

(a) $\forall x\in\langle 0,4\rangle:$ $\quad 0\le\sqrt{x+4}\le 4$

$$0\le x+4\le 16$$

$$-4\le x\le 12$$

(b′) $\forall x\in\langle 0,4\rangle:$ $\quad |\varphi'(x)|<1$

$$\left|\frac{1}{2\sqrt{x+4}}\right|<1$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x+4}}<1$$

$$1<2\sqrt{x+4}$$

$$1<4x+16$$

$$-15<4x$$

- Vlastní výpočet:

  volíme $x_0 = 2$ a pro zastavovací podmínku $\varepsilon = 0.001$.

k	x_k
0	2
1	2.4494
2	2.5395
3	2.5572
4	2.5607
5	2.5613

$$\Rightarrow \qquad \tilde{x} = x_5 = 2.5613.$$

$\square$

Poznámka:

Odhadněme velikost chyby přibližného řešení předchozího příkladu.
Platí:

$$\varphi' = \frac{1}{2\sqrt{x+4}} \quad \ldots \quad \text{kladná klesající funkce} \quad (\varphi'' < 0)$$

$$\Downarrow$$

$$\max_{0 \le x \le 4} |\varphi'(x)| = |\varphi'(0)| = \frac{1}{4} = q \quad \ldots \quad \text{podmínka (b')}$$

Zvolili jsme $\varepsilon = 0,001$ a proto platí odhad chyby:

$$|x_5 - \alpha| \le \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} \, . \, 0,001 = 0,000333$$

Rychlost konvergence

Definice: Říkáme, že posloupnost x_k konverguje k číslu α rychlostí r, jestliže pro $k \to \infty$

$$|x_{k+1} - \alpha| = c|x_k - \alpha|^r + O(|x_k - \alpha|^{r+1}).$$

Mluvíme o asymptotické rychlosti konvergence ($k \to \infty$).

Poznámka:
$f(x) = O(g(x))$ pro $x \to a \quad \Leftrightarrow \quad \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$ je omezená pro $x \to a$.

Rychlost konvergence metody prosté iterace

Je-li funkce φ dostatečně hladká, můžeme napsat její Taylorův rozvoj v bodě α a potom pro $x = x_{k-1}$ platí:

$$\varphi(x_{k-1}) = \varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha)(x_{k-1}-\alpha) + \frac{\varphi''(\alpha)}{2}(x_{k-1}-\alpha)^2 + \frac{\varphi'''(\xi)}{6}(x_{k-1}-\alpha)^3$$

$$x_k - \alpha = \varphi'(\alpha)(x_{k-1} - \alpha) + \frac{\varphi''(\alpha)}{2}(x_{k-1} - \alpha)^2 + \frac{\varphi'''(\xi)}{6}(x_{k-1} - \alpha)^3$$

- je-li $\varphi'(\alpha) \neq 0$, potom

$$x_k - \alpha = \varphi'(\alpha)(x_{k-1} - \alpha)^1 + O((x_{k-1} - \alpha)^2)$$

$\Rightarrow$ rychlost konvergence je řádu 1

- je-li $\varphi'(\alpha) = 0$ a $\varphi''(\alpha) \neq 0$, potom

$$x_k - \alpha = \frac{\varphi''(\alpha)}{2}(x_{k-1} - \alpha)^2 + O((x_{k-1} - \alpha)^3)$$

$\Rightarrow$ rychlost konvergence je řádu 2

Newtonova metoda (zástupce zpřesňujících metod)

Předpoklady:

Nechť v intervalu $I = \langle a, b \rangle$ leží jediný jednoduchý kořen $\hat{x}$ rovnice $f(x) = 0$. Jelikož mluvíme o zpřesňující metodě, předpokládáme, že máme zadánu nultou iteraci $x_0 \in I$, která je relativně blízko hledanému řešení. Vyjádříme Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0. Přitom předpokládáme, že existuje derivace funkce f.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)^2$$

Rovnici $f(x) = 0$ nahradíme lineární rovnicí

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

Ta má kořen

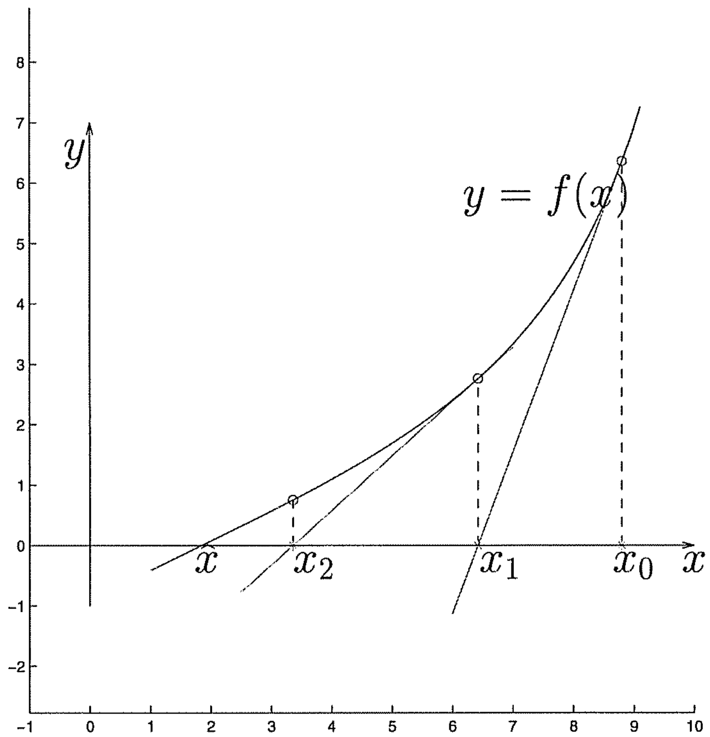
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Celý postup opakujeme a dostáváme iterační formuli

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Geometrický význam Newtonovy metody

Křivku $y = f(x)$ nahradíme tečnou ke grafu v bodě x_k a hodnotu x_{k+1} získáme jako průsečík tečny s osou x. Proto se také Newtonova metoda nazývá **metoda tečen** nebo **metoda linearizace**.



Poznámka:

Jako zastavovací podmínku lze volit $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ nebo $|f(x_k)| < \delta$.

Poznámka: Algoritmus Newtonovy metody je speciálním případem metody prosté iterace. Za funkci φ jsme volili funkci

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Rychlost konvergence Newtonovy metody

- závisí na $\varphi'(\alpha)$ $(\varphi''(\alpha))$ ... viz dříve

Platí:

$$\varphi' = 1 - \frac{f'.f' - f.f''}{(f')^2} = 1 - 1 + \frac{f.f''}{(f')^2} = \frac{f.f''}{(f')^2}$$

$$\varphi'(\alpha) = 0, \quad \text{protože } f(\alpha) = 0$$

Platí:

$$\varphi'' = \frac{(f'.f'' + f.f''').(f')^2 - f.f''.2.f'.f''}{(f')^4}$$

$$\varphi''(\alpha) = \frac{(f')^3.f''}{(f')^4} = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}, \quad \text{protože } f(\alpha) = 0$$

Platí tedy $\varphi'(\alpha) = 0$ a obecně $\varphi''(\alpha) \neq 0$

$\Rightarrow$ rychlost konvergence je řádu 2.

Konvergence Newtonovy metody (jinak)

Taylorův rozvoj v bodě x_0 (existují $f'(x)$ a $f''(x)$ v I)

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi_0)(x - x_0)^2$$

Dosadíme za x přesné řešení α (tj. $f(\alpha) = 0$)

$$\underbrace{f(\alpha)}_{=0} = f(x_0) + f'(x_0)(\alpha - x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi_0)(\alpha - x_0)^2$$

Vydělíme $f'(x_0)$:

$$0 = \underbrace{\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - x_0}_{= -x_1} + \alpha + \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_0)}{f'(x_0)} (\alpha - x_0)^2$$

opakováním

$$(*) \quad \boxed{\underbrace{x_{k+1} - \alpha}_{\text{chyba } k+1 \text{ iterace}} = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)} \underbrace{(\alpha - x_k)^{\mathbf{2}}}_{\text{kvadrát chyby } k\text{-té iterace}}}$$

rychlost konvergence $= \mathbf{2}$

Platí-li

$$\boxed{\frac{1}{2}\left|\frac{f''(\xi)}{f'(\eta)}\right| \le C \quad \forall \xi, \eta \in I}$$

Potom z (*) plyne

$$\boxed{|\varepsilon_{k+1}| \leq C\,|\varepsilon_k|^2}, \text{ tj. } \quad |C\varepsilon_{k+1}| \leq |C\varepsilon_k|^2$$

$$|c\,\varepsilon_1| \leq |c\,\varepsilon_0|^2$$

$$|c\,\varepsilon_2| \leq |c\,\varepsilon_1|^2 \leq \left(|c\,\varepsilon_0|^2\right)^2$$

$$|c\,\varepsilon_3| \leq |c\,\varepsilon_2|^2 \leq \left(\left(|c\cdot\varepsilon_0|^2\right)^2\right)^2$$

$$\vdots$$

$$|c\,\varepsilon_k| \leq |c\,\varepsilon_0|^{2^k}$$

$$\boxed{|\varepsilon_k| \leq \frac{1}{c}\,|c\,\varepsilon_0|^{2^k}}$$

odhad chyby

kde $\boxed{\frac{1}{2}\left|\frac{f''(\xi)}{f'(\eta)}\right| < C}$

Postačující podmínka konvergence:

plati $|\varepsilon_1| \leq C|\varepsilon_0|^2 = \underbrace{c|\varepsilon_0|}\cdot|\varepsilon_0|$

pokud bude < 1 dostaneme kontrakci

$$|C\,\varepsilon_0| = \boxed{|c(\alpha - x_0)| < 1}$$

$$\Downarrow$$

$$|c(\underbrace{\alpha - x_1}_{\varepsilon_1})| \leq |c(\underbrace{\alpha - x_0}_{\varepsilon_0})| < 1 \ldots$$

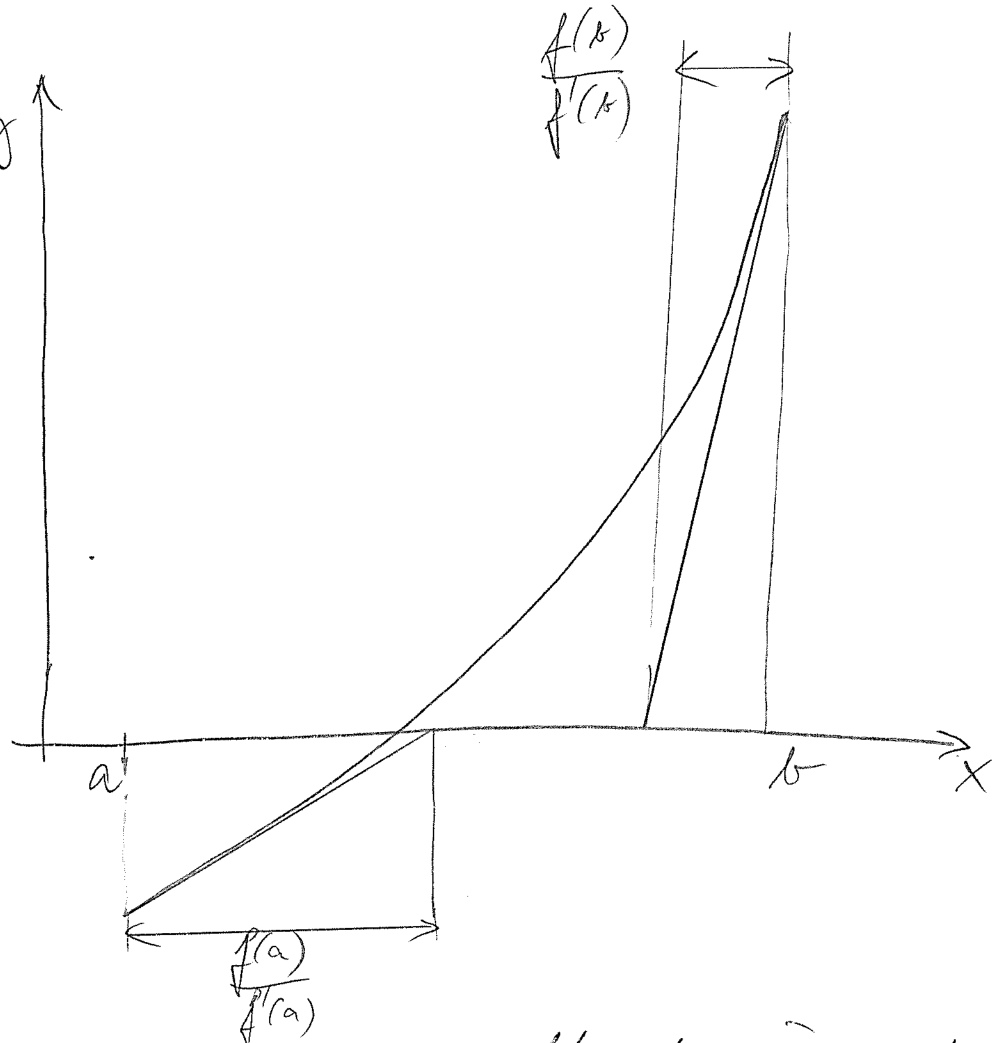
Určit C může být obecně problém

Odvoditelné kritérium Newtonovy metody

je-li $\boxed{f'(x) \neq 0}$, $\boxed{f'' \text{ nemění znaménko v } I = \langle a, b \rangle}$,

platí $\boxed{f(a) \cdot f(b) < 0}$ a $\boxed{\left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right| < b-a}$, $\boxed{\left| \frac{f(b)}{f'(b)} \right| < b-a}$

potom Newtonova metoda konverguje pro $\forall x_0 \in I$



Praktické pravidlo pro odhad přesnosti:

je-li $|\alpha - x_k| < 10^{-d}$

potom $|\alpha - x_{k+1}| < 10^{-2d}$

(pokud jsou splněny předpoklady pro odvození metody)

Poznámka:

Dosud jsme řešili nelineární rovnici pouze v $\mathbb{R}$.
Algoritmus Newtonovy metody můžeme použít
i pro řešení dané rovnice v oboru komplexních čísel.

Příklad:

Newtonovou metodou řešte v komplexním oboru rovnici

$$z^4 + z = 0, \qquad z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

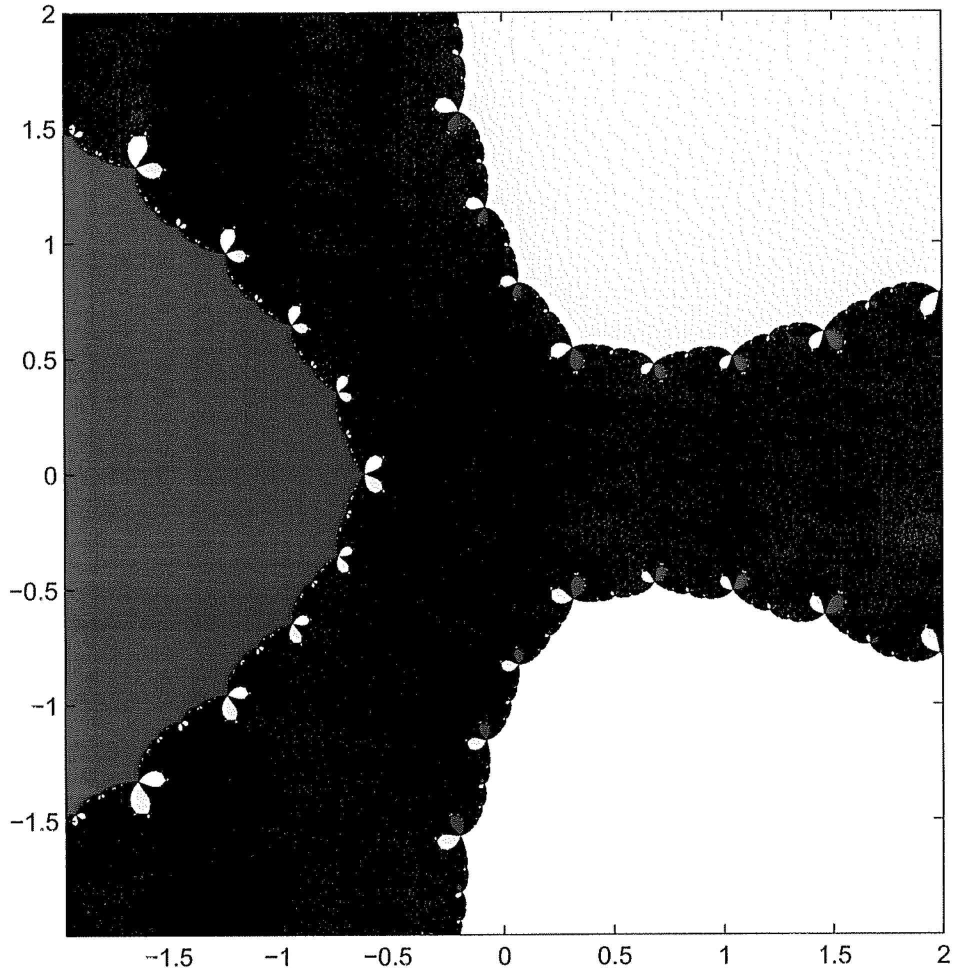
Iterační formule bude mít tvar

$$z_{k+1} = z_k - \frac{z_k^4 + z_k}{4z_k^3 + 1}$$

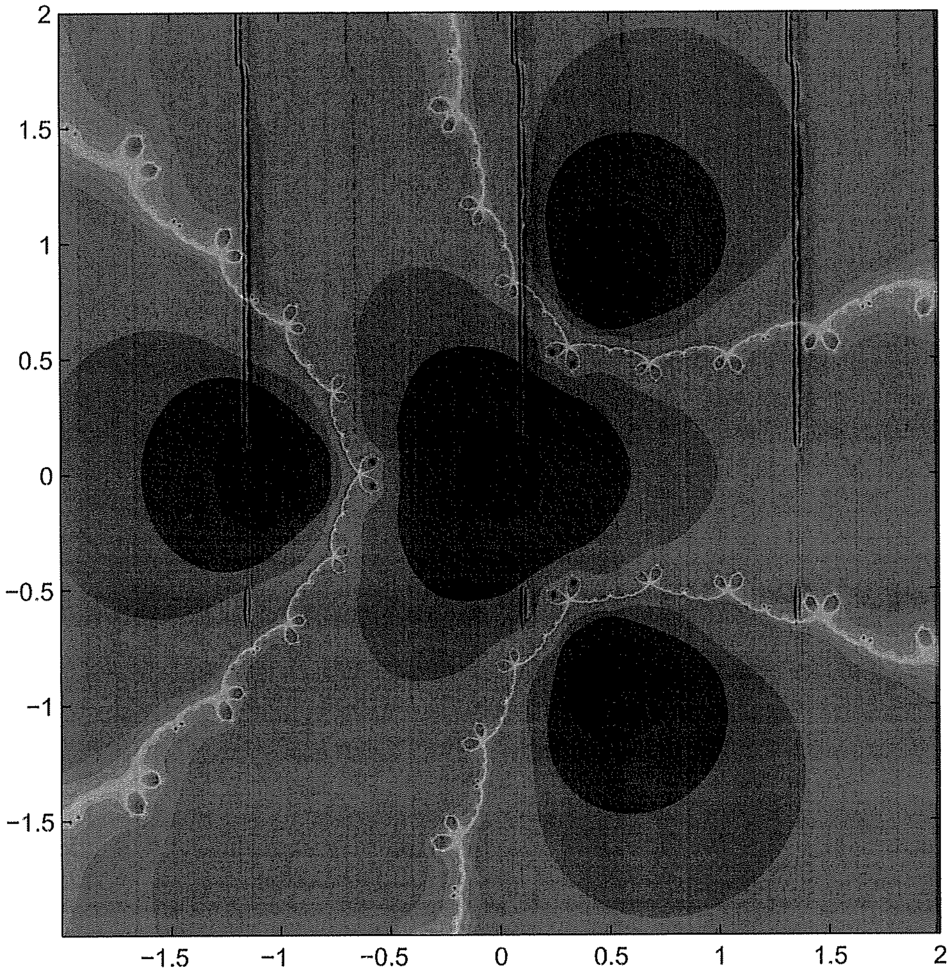
Je zřejmé, že daná rovnice bude mít 4 řešení:

$$0, \quad -1, \quad \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Řešíme-li danou rovnici Newtonovou metodou pro konkrétní počáteční aproximaci ze čtverce $\langle -1.5; 1.5\rangle \times \langle -1.5; 1.5\rangle$, dostaneme jedno ze čtyř uvedených řešení. Obarvíme-li bod představující počáteční aproximaci různou barvou, podle toho k jakému řešení dospějeme, získáme fraktálovou strukturu.



2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2

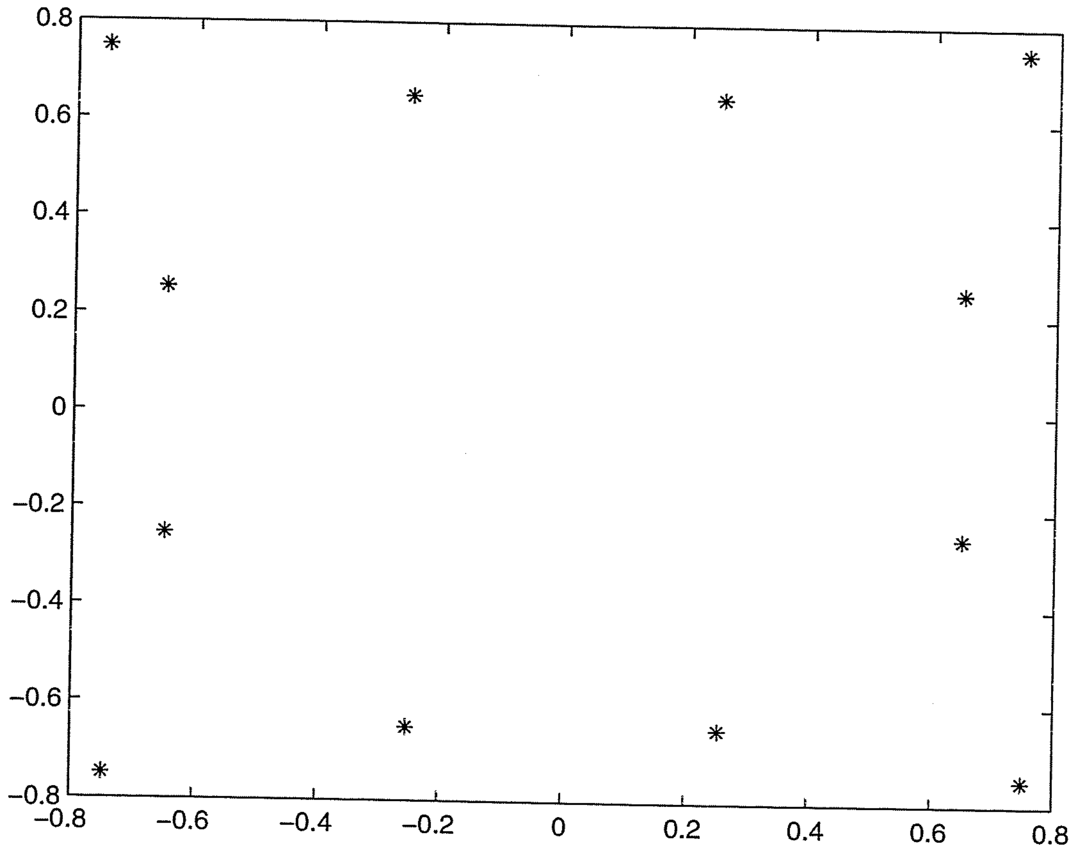

2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2

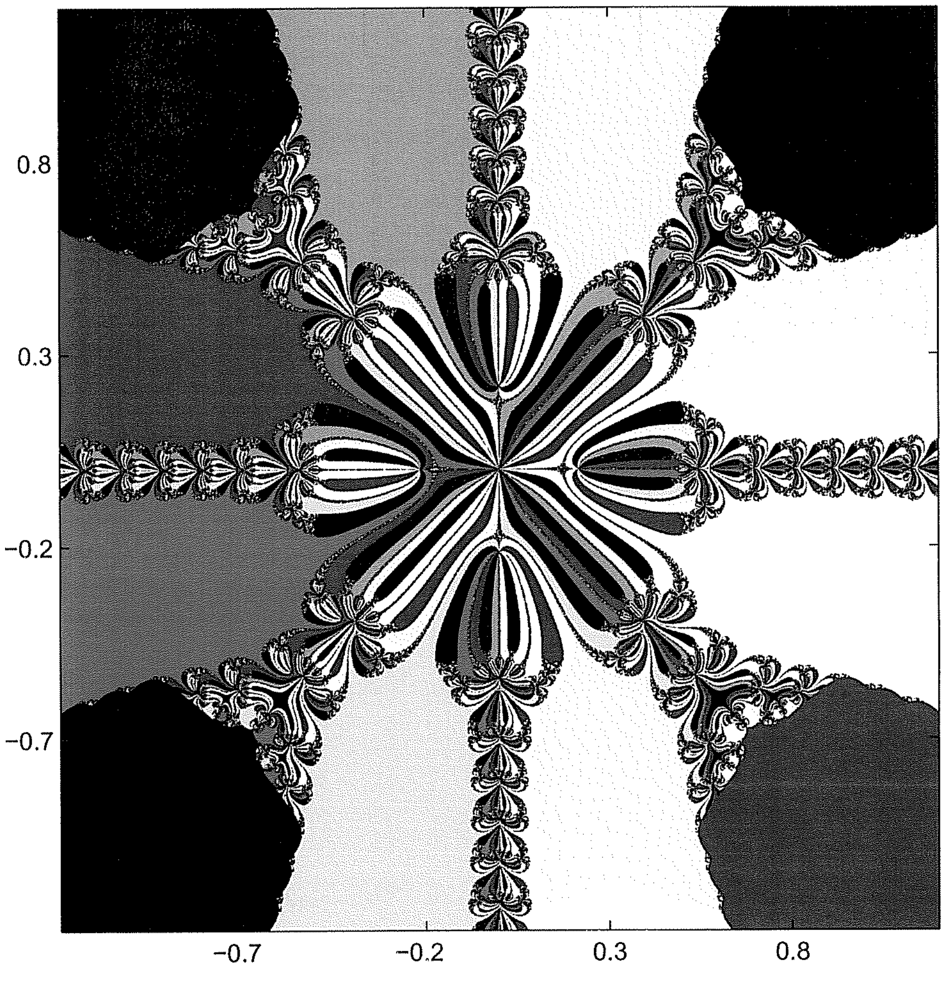
Příklad

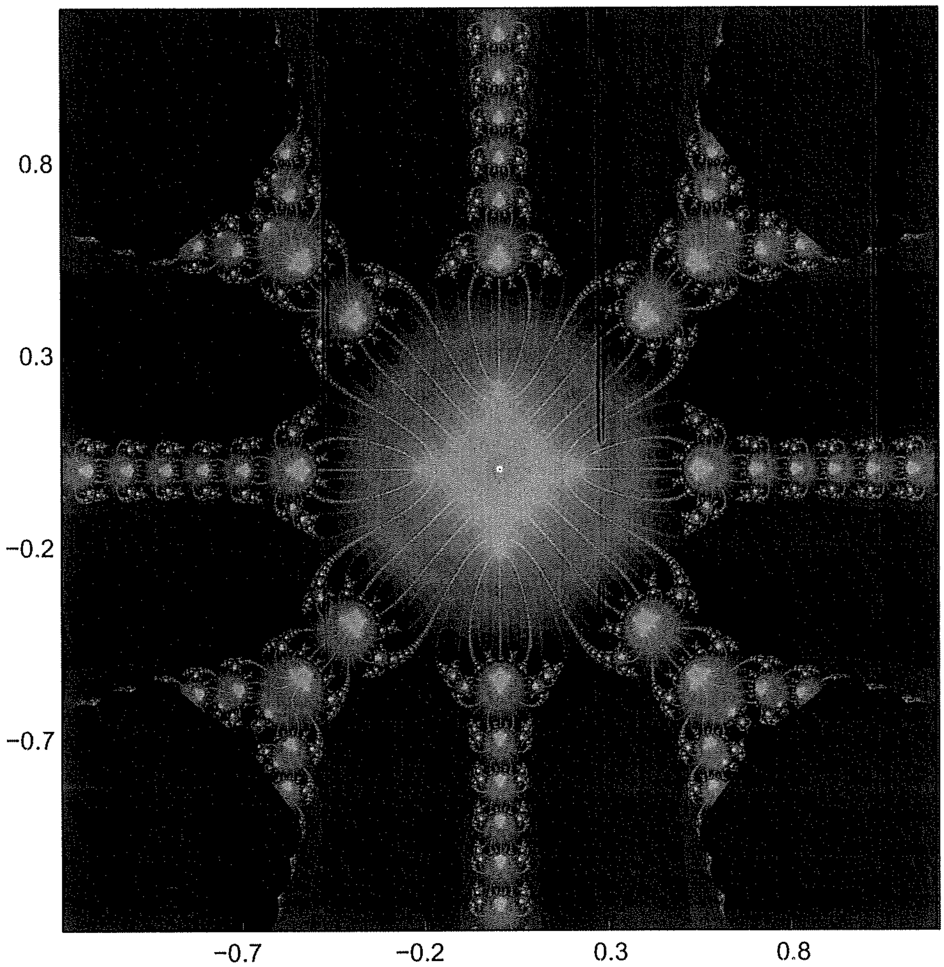
$$z^{12} + 744/611z^8 - 86/16057z^4 + 25/357 = 0$$

Kořeny:

$$-0.75 + 0.75i$$
$$-0.75 - 0.75i$$
$$0.75 + 0.75i$$
$$0.75 - 0.75i$$
$$-0.65 + 0.25i$$
$$-0.65 - 0.25i$$
$$-0.25 + 0.65i$$
$$-0.25 - 0.65i$$
$$0.25 + 0.65i$$
$$0.25 - 0.65i$$
$$0.65 + 0.25i$$
$$0.65 - 0.25i$$

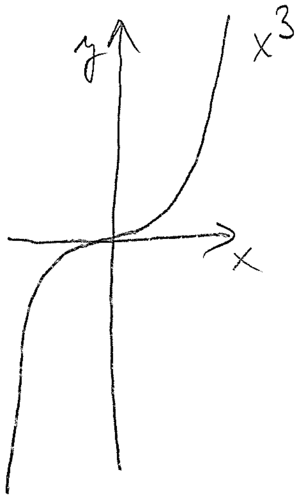



0.8
0.3
−0.2
−0.7
−0.7
−0.2
0.3
0.8


0.8
0.3
−0.2
−0.7
−0.7
−0.2
0.3
0.8

Poznámka: Při odvozování Newtonovy metody jsme předpokládali, že $f'(\alpha)\neq 0$, tj. α je jednoduchý!

Př: Řešte $\boxed{x^3 = 0}$



$\alpha = 0$ ... trojnásobný

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3}{3\cancel{x_k^2}}$$

$$\boxed{x_{k+1} = \frac{2}{3}x_k}$$ $\Rightarrow$ rychlost konvergence je 1 !!!

Definice: Kořen α rovnice $f(x)=0$ má násobnost s, jestliže $\boxed{0 \neq g(\alpha) < \infty}$, kde $\boxed{g(x) = \frac{f(x)}{(x-\alpha)^s}}$

Modifikovaná iterační formule:

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - s\,\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$ ... je opět kvadratický iterační proces

pro př: $$x_{k+1} = x_k - 3\cdot\frac{x_k^3}{3x_k^2} = x_k - x_k = 0$$

$-$ Musíme znát násobnost s

Jiný přístup pro hledání násobných kořenů

Je-li α s-násobný kořen $f(x) = 0$,
potom je α $(s-1)$-násobným kořenem $f'(x) = 0$
a tedy jednoduchým kořenem $\boxed{\dfrac{f(x)}{f'(x)} = 0}$

AITKENŮV PROCES

Konverguje-li iterační metoda lineárně, lze pomocí Aitkenova procesu urychlit konvergenci.

Platí:

$$\boxed{\alpha - x_{k+1} = c_{k+1}(\alpha - x_k), \quad |c_k| < 1}$$

kde $|c_k| \to c$ ... asymptotická konstanta chyby

Jsme-li blízko limity, jsou čísla c_k přibližně stejná a lze psát

$$\boxed{\alpha - x_{k+1} \approx \bar{c}(\alpha - x_k)} \quad \boxed{|\bar{c}| = c}$$

Pro další iteraci

$$\boxed{\alpha - x_{k+2} \approx \bar{c}(\alpha - x_{k+1})}$$

Po vyloučení $\bar{c}$:

$$\boxed{\frac{\alpha - x_{k+1}}{\alpha - x_k} \approx \frac{\alpha - x_{k+2}}{\alpha - x_{k+1}}}$$

$$(\alpha - x_{k+2})(\alpha - x_k) \approx (\alpha - x_{k+1})^2$$

$$\cancel{\alpha^2} - \alpha(x_k + x_{k+2}) + x_k x_{k+2} \approx \cancel{\alpha^2} - 2\alpha x_{k+1} + x_{k+1}^2$$

$$x_k x_{k+2} - x_{k+1}^2 \approx \alpha(x_k - 2x_{k+1} + x_{k+2})$$

$$\boxed{\alpha \approx \frac{x_k x_{k+2} - x_{k+1}^2}{x_k - 2x_{k+1} + x_{k+2}}}$$

<u>Prakticky</u>:

$x_0, x_1, x_2 \to \alpha =: x_3$

$x_3, x_4, x_5 \to \alpha =: x_6$

$\ldots\ldots$

Metoda proste iterace pro reseni nelinearni rovnice x=phi(x)
pro pocatecni aproximaci x0=3 a zastavovaci podminku |x(k)-x(k-1)|<1e-05

Funkce funkce_phi(x) je zadana v souboru fce1.m takto:

$\boxed{x = \sqrt{x}}$

```
function out=fce1(x);
out=sqrt(x);
```

krok	x(k)	dx(k)=x(k)-x(k-1)	dx(k)/dx(k-1)
0	3.000000		
1	1.732051	-1.267949	
2	1.316074	-0.415977	0.328071
3	1.147203	-0.168871	0.405963
4	1.071075	-0.076127	0.450800
5	1.034928	-0.036148	0.474833
6	1.017314	-0.017614	0.487272
7	1.008620	-0.008694	0.493600
8	1.004301	-0.004319	0.496791
9	1.002148	-0.002153	0.498393
10	1.001073	-0.001075	0.499196
11	1.000537	-0.000537	0.499598
12	1.000268	-0.000268	0.499799
13	1.000134	-0.000134	0.499899
14	1.000067	-0.000067	0.499950
15	1.000034	-0.000034	0.499975
16	1.000017	-0.000017	0.499987
17	1.000008	-0.000008	0.499994

\>>

Metoda proste iterace pro reseni nelinearni rovnice x=phi(x)
s urychlenim pomoci Aitkenova procesu
pro pocatecni aproximaci x0=3 a zastavovaci podminku |x(k)-x(k-1)|<1e-05

Funkce funkce_phi(x) je zadana v souboru fce1.m takto:

$\boxed{x = \sqrt{x}}$

```
function out=fce1(x);
out=sqrt(x);
```

krok	x(k)	dx(k)=x(k)-x(k-1)	dx(k)/dx(k-1)
0	3.000000		
1	1.732051	-1.267949	
2	1.316074	-0.415977	0.328071
Zpresneni pomoci Aitkenovy formule			
3	1.112973	-0.203101	0.488251
4	1.054975	-0.057997	0.285559
5	1.027120	-0.027855	0.480285
Zpresneni pomoci Aitkenovy formule			
6	1.001378	-0.025742	0.924133
7	1.000689	-0.000689	0.026771
8	1.000344	-0.000344	0.499742
Zpresneni pomoci Aitkenovy formule			
9	1.000000	-0.000344	0.998968
10	1.000000	-0.000000	0.000344

>>

Metoda proste iterace pro reseni nelinearni rovnice x=phi(x)
pro pocatecni aproximaci x0=3 a zastavovaci podminku |x(k)-x(k-1)|<1e-05

Funkce funkce_phi(x) je zadana v souboru fce2.m takto:

```
function out=fce2(x);
out=x^2/(2*x-1);
```

krok	x(k)	dx(k)=x(k)-x(k-1)	dx(k)/dx(k-1)
0	3.000000		
1	1.800000	-1.200000	
2	1.246154	-0.553846	0.461538
3	1.040603	-0.205551	0.371134
4	1.001525	-0.039078	0.190113
5	1.000002	-0.001522	0.038959
6	1.000000	-0.000002	0.001522

\>>

Řešíme opět rovnici $\boxed{x^2 - x = 0}$

Tentokrát pomocí Newtonovy metody:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - x_k}{2x_k - 1}$$

$$x_{k+1} = \frac{2x_k^2 - \cancel{x_k} - x_k^2 + \cancel{x_k}}{2x_k - 1} = \boxed{\frac{x_k^2}{2x_k - 1}}$$

spec. případ prosté iterace

! Rychlost konvergence je 2.
Nelze použít Aitkenův proces!

Metoda proste iterace pro reseni nelinearni rovnice x=phi(x)
s urychlenim pomoci Aitkenova procesu
pro pocatecni aproximaci x0=3 a zastavovaci podminku |x(k)-x(k-1)|<1e-05

Funkce funkce_phi(x) je zadana v souboru fce2.m takto:

```
function out=fce2(x);
out=x^2/(2*x-1);
```

krok	x(k)	dx(k)=x(k)-x(k-1)	dx(k)/dx(k-1)
0	3.000000		
1	1.800000	-1.200000	
2	1.246154	-0.553846	0.461538
Zpresneni pomoci Aitkenovy formule			
3	0.771429	-0.474725	0.857143
4	1.096241	0.324812	-0.684211
5	1.007767	-0.088473	-0.272383
Zpresneni pomoci Aitkenovy formule			
6	1.026707	0.018940	-0.214073
7	1.000677	-0.026030	-1.374350
8	1.000000	-0.000677	0.025995
Zpresneni pomoci Aitkenovy formule			
9	0.999982	-0.000018	0.026688
10	1.000000	0.000018	-0.974664
11	1.000000	-0.000000	-0.000018

>>

Nevýhody Newtonovy metody

- zadaná funkce f musí být diferencovatelná
- derivace se přímo vyskytuje v iterační formuli
- v každé iteraci musíme kromě funkční hodnoty počítat také hodnotu derivace

Pro odbourání poslední vlastnosti můžeme za předpokladu, že se derivace f' na okolí kořene příliž nemění, Newtonovu metodu modifikovat tak, že hodnotu derivace vypočteme pouze jednou v bodě x_0 a položíme $f'(x_k) \approx f(x_0)$. Dostaneme iterační formuli

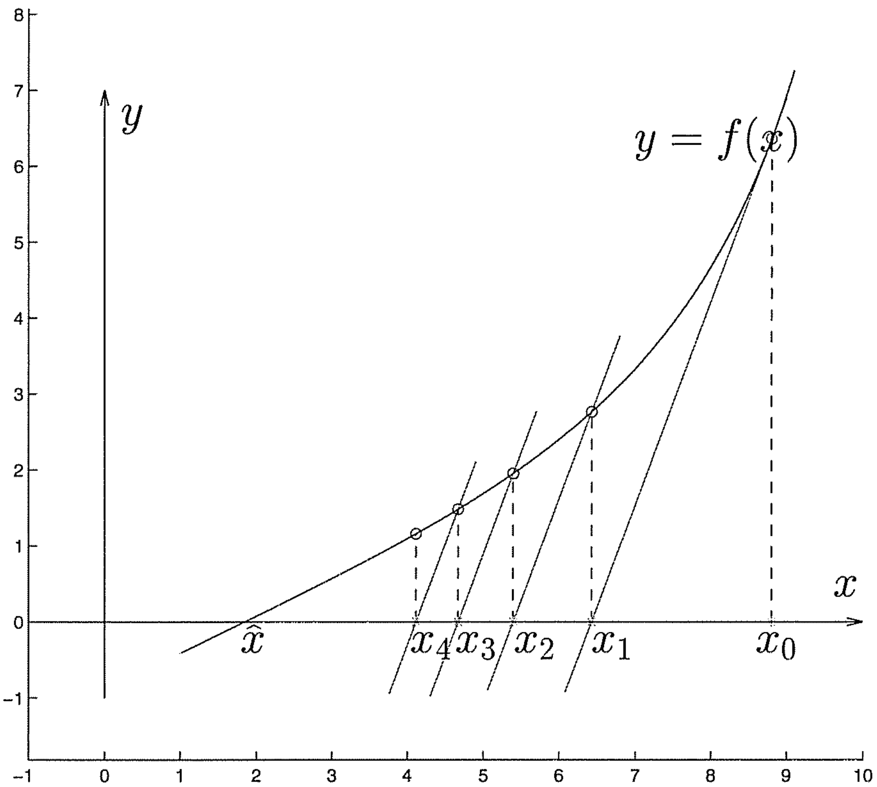
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}$$

Chceme-li modifikovat Newtonovu metodu pro funkce, které nejsou diferencovatelné, nahradíme v iterační formuli derivaci $f'(x_k)$ diferenčním podílem

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Geometrický význam modifikované Newtonovy metody

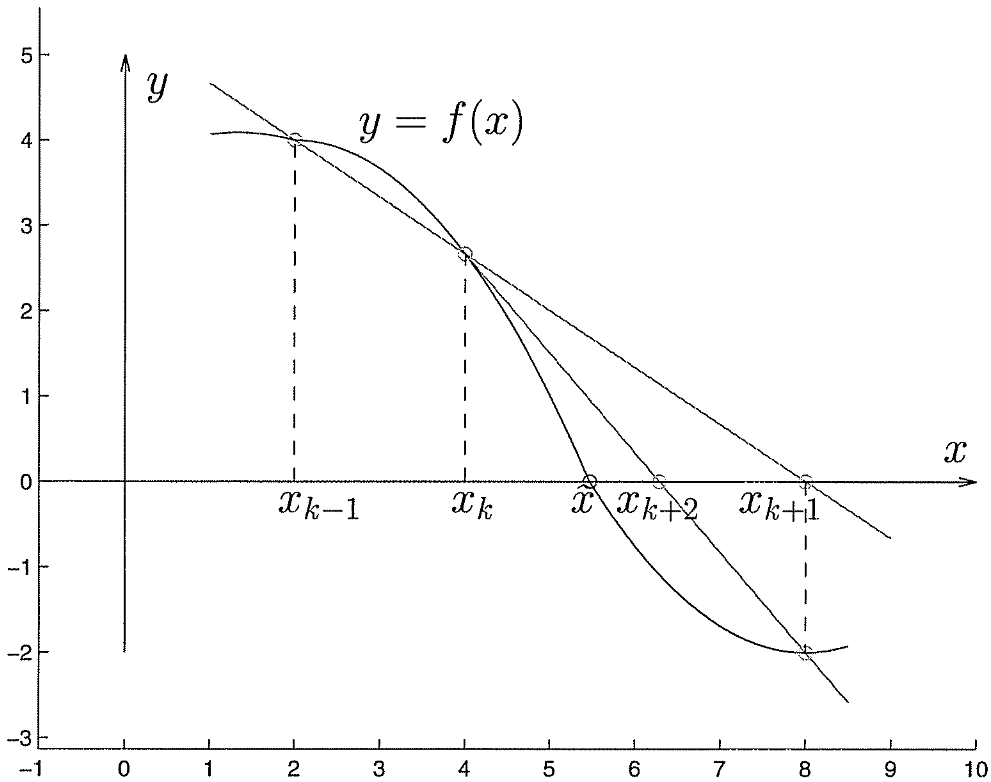
Tečny ke grafu v bodech $[x_k, f(x_k)]$ nahrazujeme přímkami rovnoběžnými s tečnou ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $[x_0, f(x_0)]$.



Poznámka: V této modifikaci počítáme pouze jednu hodnotu derivace $f'(x_0)$, a proto je tento postup vhodný je-li derivace $f'(x)$ složitá. Nemění-li $f'(x)$ a $f''(x)$ znaménko, je možné dokázat konvergenci této metody.

Geometrický význam metody sečen

Mějme dvě dobré aproximace x_{k-1} a x_k kořene x rovnice $f(x) = 0$. Křivku $y = f(x)$ nahradíme přímkou (sečnou), která prochází body $[x_{k-1}, f(x_{k-1})]$ a $[x_k, f(x_k)]$.
Další iteraci x_{k+1} získáme jako průsečík sečny s osou x.



Poznámka: Pro zahájení výpočtu potřebujeme znát <u>dvě</u> počáteční aproximace, ale na rozdíl od Newtonovy metody počítáme v každém kroku pouze jednu novou funkční hodnotu, což je úspora času.

Poznámka: Metoda sečen má obdobný algoritmus jako metoda regula falsi, nepožadujeme splnění podmínky $f(x_{k-1}).f(x_k) < 0$.

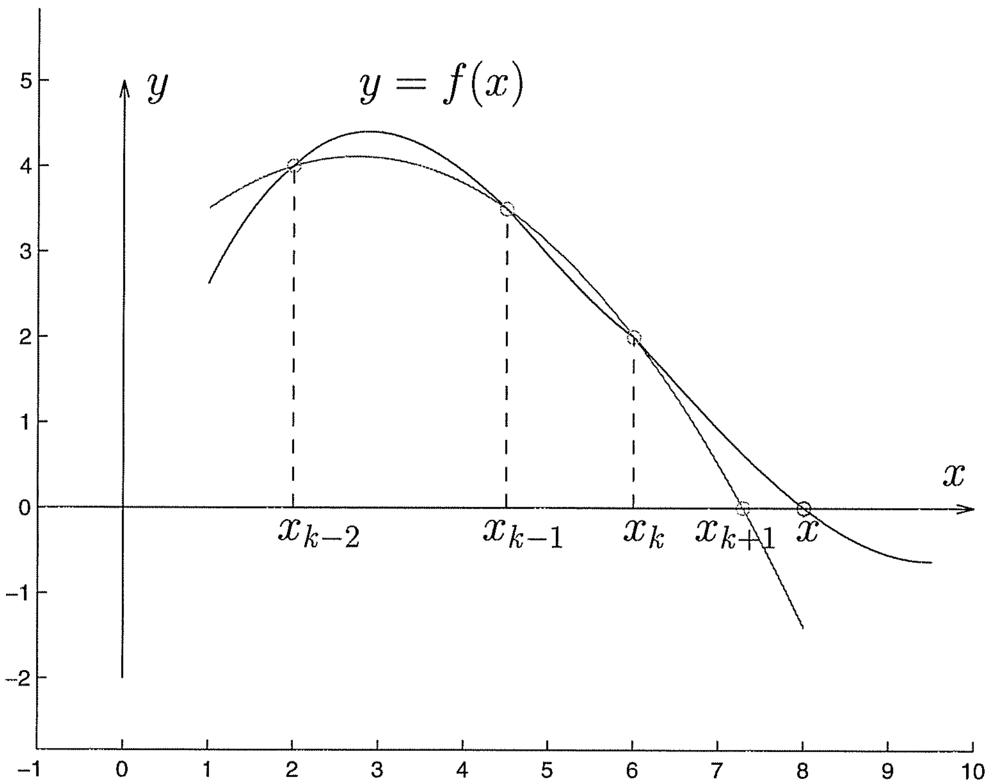
Poznámka: Metoda sečen je tzv. dvoukroková interpolační metoda, analogicky lze odvodit tříkrokovou interpolační metodu, kterou nazýváme **Mullerova metoda**.

Geometrický význam Mullerovy metody

Mějme tři dobré aproximace x_{k-2}, x_{k-1} a x_k kořene x rovnice

$$f(x) = 0.$$

Křivku $y = f(x)$ nahradíme parabolou (kvadratickou funkcí), která prochází body $[x_{k-2}, f(x_{k-2})]$ $[x_{k-1}, f(x_{k-1})]$ a $[x_k, f(x_k)]$. Další iteraci x_{k+1} získáme jako průsečík paraboly s osou x. (Ten, který je blíže k x_k.)



Prostředky MATLABu pro řešení nelineárních rovnic

`fzero` pro obecnou nelineární rovnici
`roots` pro kořeny polynomu