Numerické metody pro řešení počátečních úloh pro ODR – vícekrokové metody

Myšlenka: V jednokrokových metodách se y_{n+1} počítá pouze s využitím y_n (a hodnot x_n, h_n). Je rozumné počítat y_{n+1} s využitím více předchozích hodnot $y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots, y_{n-k+1}$, dosáhneme tím větší přesnosti.

Pro jednoduchost se omezíme na metody s konstantním krokem h ($h_n = h, \quad \forall\, n$).

Poznámka: Je třeba si uvědomit, že si lze vymyslet nepřeberné množství metod.

- Jedna z možností je použít metody *numerického derivování* (špatně podmíněné).
- Další z možností je použít metody *numerické integrace*

Rovnici $y' = f(x, y)$ zintegrujeme od x_n do x_{n+1}:

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \underbrace{f(x, y(x))}_{=F(x)} \,\mathrm{d}x \tag{1}$$

Je zřejmé, že funkci $F(x) = f(x, y(x))$ neznáme. Známe-li ale hodnoty y v bodech $x_0, x_1, \ldots, x_n$, můžeme vypočítat numerické hodnoty:

$$\begin{aligned} F_0 &= F(x_0) = f(x_0, y(x_0)) \\ F_1 &= F(x_1) = f(x_1, y(x_1)) \\ &\vdots \\ F_n &= F(x_n) = f(x_n, y(x_n)) \end{aligned}$$

Pomocí těchto hodnot lze *interpolovat* funkci $F(x)$ funkcí $P(x)$ a integrál v (1) nahradit

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} P(x) \,\mathrm{d}x.$$

Interpolace, extrapolace funkce $F(x)$ (2 postupy):

1) $F(x)$ můžeme extrapolovat na intervalu $\langle x_n, x_{n+1}\rangle$ pomocí hodnot $F_0, F_1, \ldots, F_n \quad \Rightarrow \quad$ explicitně dostaneme $y(x_{n+1}) = \ldots$.

2) $F(x)$ můžeme interpolovat pomocí hodnot $F_0, F_1, \ldots, F_n$ a $F_{n+1} = F(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) \quad \Rightarrow \quad$ ve výpočtu integrálu vystoupí $y_{n+1} = y(x_{n+1})$ a dostaneme tak *implicitní* rovnici s neznámou na obou stranách, tuto rovnici řešíme postupnými aproximacemi.

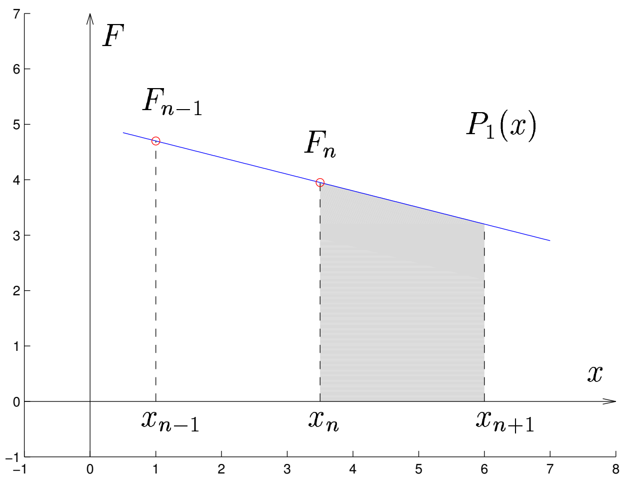
Adams-Bashfortovy metody

Poznámka: Metody získáné postupem **1)**.

Postup: Vezmeme posledních k hodnot $F_n, F_{n-1}, \dots, F_{n-k+1}$ a sestrojíme $P_{k-1}(x)$ interpolační polynom $(k-1)$ stupně. Tímto polynomem potom aproximujeme funkci $f(x, y(x))$ na intervalu $\langle x_n, x_{n+1}\rangle$, tj. počítáme:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_{k-1}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad: Odvoďte vzorec Adams-Bashfortovy metody pro $k = 2$.



$P_1(x)$ můžeme vyjádřit například pomocí Langrangeova interpolačního polynomu:

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= F_{n-1}l_{n-1}(x) + F_n l_n(x),\\
l_{n-1}(x) &= \frac{x - x_n}{\underbrace{x_{n-1} - x_n}_{-h}} = -\frac{1}{h}(x - x_n)\\
l_n(x) &= \frac{x - x_{n-1}}{\underbrace{x_n - x_{n-1}}_{h}} = \frac{1}{h}(x - x_{n-1})
\end{aligned}$$

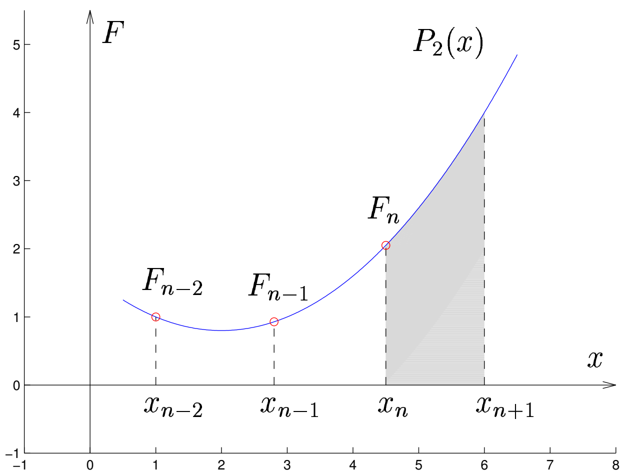
$$\begin{aligned}
P_1(x) &= F_{n-1}\left[-\frac{1}{h}(x - x_n)\right] + F_n\left[\frac{1}{h}(x - x_{n-1})\right] =\\
&= \frac{1}{h}\Big[x(F_n - F_{n-1}) + x_nF_{n-1} - x_{n-1}F_n\Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{x_n}^{x_{n+1}} P_1(x)\,\mathrm{d}x = \;& \frac{1}{h}\Big[(F_n - F_{n-1})\underbrace{\left(\frac{x_{n+1}^2}{2} - \frac{x_n^2}{2}\right)}_{\frac{1}{2}\left((x_n+h)^2 - x_n^2\right)} + (F_{n-1}x_n - F_nx_{n-1})(\underbrace{x_{n+1} - x_n}_{h})\Big] =\\
&= \frac{1}{h}\left[(F_n - F_{n-1})(x_nh + \frac{h^2}{2})\right] + F_{n-1}x_n - F_nx_{n-1} =\\
&= F_nx_n - F_{n-1}x_n + \frac{h}{2}F_n - \frac{h}{2}F_{n-1} + F_{n-1}x_n - F_nx_{n-1} =\\
&= F_n(\underbrace{x_n - x_{n-1}}_{h}) + \frac{h}{2}F_n - \frac{h}{2}F_{n-1} = \underline{h\left(\frac{3}{2}F_n - \frac{1}{2}F_{n-1}\right)}.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(3F_n - F_{n-1}\right)}$$

Poznámka: Samozřejmě potřebujeme znát prvních k hodnot F_i.
(Ty můžeme vypočítat nějakou jednokrokovou metodou).

Poznámka: Podobně bychom mohli odvodit vzorec Adams-Bashfortovy metody pro $k = 3$.



Opět bychom museli najít interpolační polynom $P_2(x)$ (2. stupně) a poté zintegrovat přes $\langle x_n, x_{n+1} \rangle$. Výsledkem je (dcv.):

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12} \left(23F_n - 16F_{n-1} + 5F_{n-2}\right)}$$

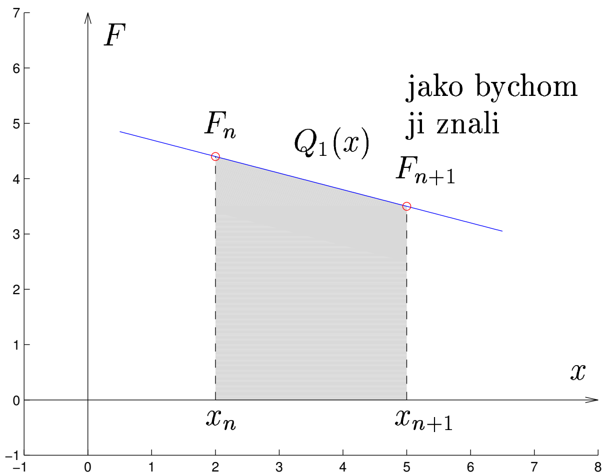
ADAMS-MOULTONOVY METODY

Poznámka: Metody získáné postupem **2)**.

Postup: Vezmeme posledních k hodnot a přidáme ještě neznámou F_{n+1}, tj. $F_{n+1}, F_n, F_{n-1}, \dots, F_{n-k+1}$. Sestrojíme $Q_k(x)$ interpolační polynom k-tého stupně. Tímto polynomem aproximujeme funkci $f(x, y(x))$ na intervalu $\langle x_n, x_{n+1} \rangle$, tj. počítáme:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} Q_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad: Odvoďte vzorec Adams-Moultonovy metody pro $k = 1$.



$Q_1(x)$ můžeme vyjádřit opět např. pomocí Lagrangeova interpolačního polynomu:

$$Q_1(x) = F_{n+1} l_{n+1}(x) + F_n l_n(x)$$

$$l_{n+1}(x) = \frac{x - x_n}{x_{n+1} - x_n} = \frac{1}{h}(x - x_n)$$

$$l_n(x) = \frac{x - x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} = -\frac{1}{h}(x - x_{n+1})$$

$$\begin{aligned}
Q_1(x) &= F_{n+1}\left[\frac{1}{h}(x - x_n)\right] + F_n\left[-\frac{1}{h}(x - x_{n+1})\right] = \\
&= \frac{1}{h}\left[x(F_{n+1} - F_n) + F_n x_{n+1} - F_{n+1} x_n\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{x_n}^{x_{n+1}} Q_k(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{h}\Big[\underbrace{\left(\frac{x_{n+1}^2}{2} - \frac{x_n^2}{2}\right)}_{\frac{1}{2}\underbrace{(x_{n+1}-x_n)}_{h}(x_{n+1}+x_n)}(F_{n+1} - F_n) + \underbrace{(x_{n+1} - x_n)}_{h}(F_n x_{n+1} - F_{n+1} x_n)\Big] = \\
&= \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n)(F_{n+1} - F_n) + F_n x_{n+1} - F_{n+1} x_n = \\
&= \frac{1}{2}x_{n+1}F_{n+1} - \frac{1}{2}x_{n+1}F_n + \frac{1}{2}x_n F_{n+1} - \frac{1}{2}x_n F_n + x_{n+1}F_n - F_{n+1}x_n = \\
&= F_{n+1}\left(\frac{x_{n+1}}{2} + \frac{x_n}{2} - x_n\right) + F_n\left(x_{n+1} - \frac{x_{n+1}}{2} - \frac{x_n}{2}\right) = \\
&= \underline{\frac{h}{2}\,(F_{n+1} + F_n)}
\end{aligned}$$

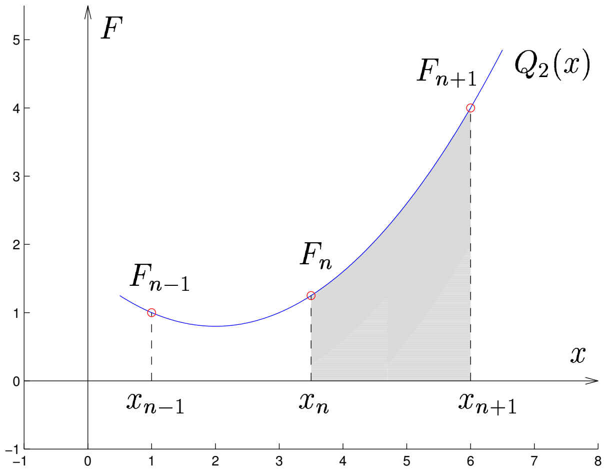
$$\Rightarrow \qquad \boxed{y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\,(F_{n+1} + F_n)\,,} \qquad \text{kde } F_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}).$$

Pozor!

$$\underline{y_{n+1}} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(x_{n+1}, \underline{y_{n+1}}) + F_n\right).$$

Tuto rovnici řešíme iterační metodou např. *metodou prosté iterace* a tak dostaneme y_{n+1}.

Poznámka: Podobně můžeme odvodit vzorec např. pro $k = 2$



Opět bychom museli najít interpolační polynom $Q_2(x)$ (2. stupně). Poté integrovat přes $\langle x_n, x_{n+1}\rangle$ a dostat (dcv.)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}\Big(5\underbrace{F_{n+1}}_{F_{n+1}=f(x_{n+1},y_{n+1})} + 8F_n - F_{n-1}\Big)$$

$$\underline{y_{n+1}} = y_n + \frac{h}{12}\Big(5f(x_{n+1},\underline{y_{n+1}}) + 8F_n - F_{n-1}\Big)$$

Opět vyřešíme iterační metodou $\quad\rightarrow\quad y_{n+1}$.

ALGORITMUS PREDIKTOR-KOREKTOR

Poznámka: Jde o obecné schéma výpočtu.

Princip: Předpokládejme, že máme dostatečně přesně vypočítány hodnoty $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ nějakou explicitní metodou.

Nyní chceme počítat y_k.

1) nejprve nějakou explicitní metodou určíme nultou iteraci $y_k^{[0]}$ jako vstupní hodnotu pro další výpočet (PREDIKTOR).

2) vypočteme hodnotu pravé strany $F_k^{[s]} = f(x_k, y_k^{[s]})$.

3) vypočteme lepší aproximaci $y_k^{[s+1]}$ pomocí nějaké implicitní metody s využitím $F_k^{[s]} =: f_k$ (KOREKTOR).

Pomocí kroků **2)** a **3)** určíme N iterací $y_k^{[1]}, y_k^{[2]}, \dots, y_k^{[N]}$ (N – dáno).

Na závěr přiřadíme $y_k = y_k^{[N]}$.

Stejný postup opakujeme pro $y_{k+1}, y_{k+2}, \dots$.

Poznámka: Dané schéma lze použít na různé metody. Je žádoucí použít explicitní a explicitní metodu stejného řádu (pro zachování přesnosti). Volba konkrétních metod je na nás.

Poznámka: Označíme-li operaci:

a) P … prediktor
b) E … vyčíslení (*evaluation*)
c) C … korektor

Můžeme toto schéma zapsat ve tvaru:

$P(EC)^N$ případně $P(EC)^N E$, vyčíslujeme-li ještě $F_k = f(x_k, y_k^{[N]})$ (což je lepší). Dostaneme pak různé varianty tohoto schématu:

$$
\begin{array}{lcl}
PEC & , & PECE \\
P(EC)^2 & , & P(EC)^2E \\
P(EC)^3 & , & P(EC)^3E \\
\vdots & , & \vdots
\end{array}
$$

Příklad: Řešte algoritmem prediktor-korektor založeném na Adamsových metodách druhého řádu na intervalu $\langle 0; 0,6\rangle$ počáteční úlohu:

$$\begin{aligned} &y' = y + e^x, \qquad \text{tj.} \quad f(x, y(x)) = y + e^x \\ &y(0) = -1 \end{aligned}$$

Přesné řešení: $y = e^x(x-1)$.

Použijeme algoritmus typu PEC.

Vzorec prediktoru má tvar:

$$y_{n+1}^{[0]} = y_n + \frac{h}{2}(3F_n - F_{n-1})$$

Korektor:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(F_{n+1}^{[0]} + F_n)$$

Volte krok $h = 0,2$.

n	x_n	$\overbrace{y(x_n)}^{\text{přesné}}$	$y_n^{[0]}$	$F_n^{[0]}$	y_n	e_n
0	0	-1		•• 0 ↩	-1	0
1	0,2	$-0{,}9771$		•• 0,2425 ↩	• $-0{,}9789$	0,0018
2	0,4	$-0{,}8950$	^{P} $-0{,}9061$ ↪	^{E} 0,5857 ↪	^{C} $-0{,}8960$	0,0010
3	0,6	$-0{,}7288$	^{P} $-0{,}7445$ ↪	^{E} 1,0776 ↪	^{C} $-0{,}7296$	0,0008

•

Pro určení hodnoty y_1 použijeme např. jednokrokovou modifikovanou Eulerovu metodu (2. řádu):

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_0, y_0) = y_0 + e^{x_0} = \\ &= -1 + 1 = 0 \\ k_2 &= f(x_0 + h/2, y_0 + h/2 \cdot k_1) = \\ &= -1 + e^{0,1} \doteq 0{,}1051 \\ y_1 &= y_0 + h \cdot k_2 \doteq \\ &\doteq -1 + 0{,}2 \cdot 0{,}1051 = -0{,}9789 \end{aligned}$$

••

Určíme hodnoty F_0 a F_1.