Numerické metody pro řešení počátečních úloh pro ODR – jednokrokové metody

Formulace: Hledáme řešení $y = y(x)$ rovnice (1) s počáteční podmínkou (2)

$$y'(x) = f(x, y(x)) \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Smysl: Analyticky lze spočítat jen velmi malou skupinu počátečních úloh pro ODR. Proto je tak důležité numerické řešení.

Princip: Základem metod je *diskretizace proměnných.* Přibližné řešení se nekonstruuje jako spojitá funkce, ale nagenerujeme body $x_0, x_1, x_2, \ldots$ a určujeme čísla $y_0, y_1, y_2, \ldots$, která aproximují $y(x_0), y(x_1), y(x_2), \ldots$.

Poznámka: Body sítě $x_0, x_1, x_2, \ldots$ nemusí být ekvidistantní:

$$x_{i+1} = x_i + h_i.$$

Platí-li:	$h_i = h$	$\forall i$	mluvíme o metodě *s konstantním krokem* (ekvidistantní síť)
Neplatí-li:	$h_i = h$	$\forall i$	mluvíme o metodě *s proměnným krokem*

Poznámka: Aproximace y_n hodnoty přesného řešení $y(x_n)$ v bodě x_n se počítá z hodnot přibližného řešení v předchozích uzlech.

Počítáme-li y_{n+1} pouze pomocí hodnoty y_n mluvíme o *jednokrokové metodě.*

Počítáme-li y_{n+1} pomocí více předchozích hodnot $y_n, y_{n-1}, \ldots$ mluvíme o *vícekrokové metodě.*

Jednokrokové metody

Nejjednodušší metodou je *Eulerova metoda.*

Princip:

y_0 ... je dáno (počáteční podmínka)

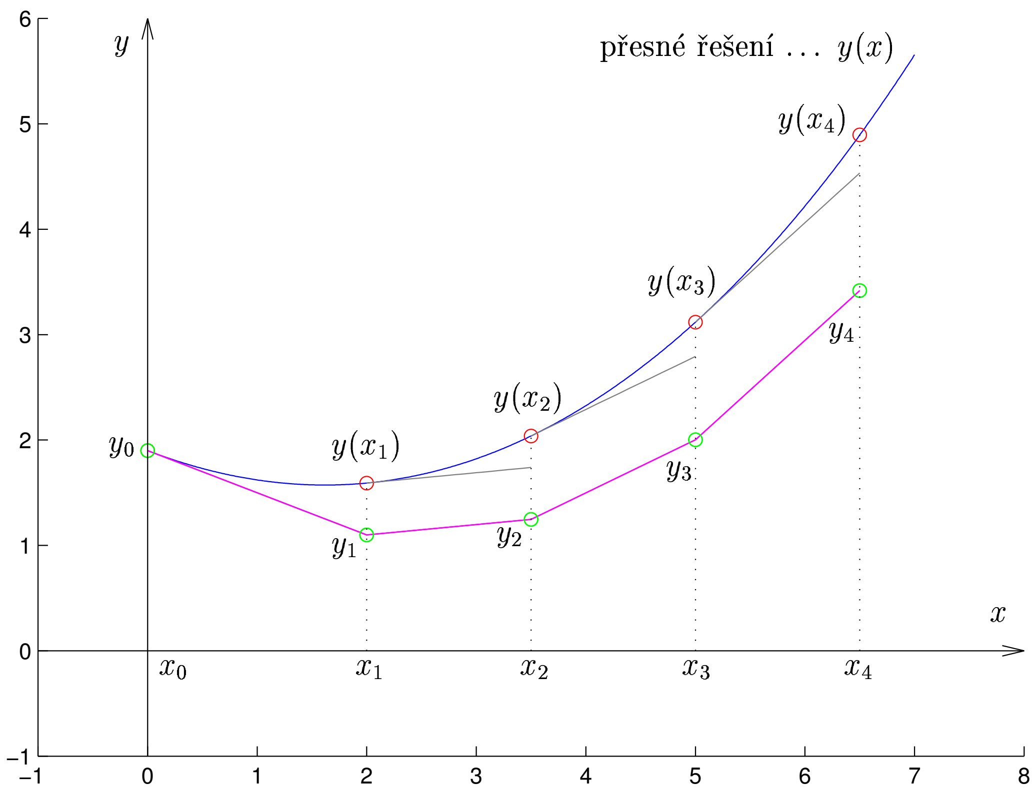
y_1 ... počítáme extrapolací z hodnoty y_0, přičemž se na intervalu $\langle x_0, x_1 \rangle$ řešení aproximuje přímkou, která prochází bodem $[x_0, y_0]$ a má směrnici $y' = f(x_0, y_0)$.
Ta má rovnici $y = y_0 + (x - x_0) f(x_0, y_0)$.
Tj. pro x_1 dostáváme:

$$y_1 = y_0 + \underbrace{(x_1 - x_0)}_{h_0} \cdot f(x_0, y_0).$$

Obecně dostaneme rekurentní vztah:

$$y_{n+1} = y_n + h_n \cdot f(x_n, y_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Geometricky:



Poznámky:

1. Eulerovu metodu můžeme chápat také tak, že hodnotu $y(x_{n+1}) = y(x_n + h_n)$ aproximujeme pomocí Taylorova polynomu 1 stupně pro funkci y v bodě x_n:

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + h_n y'(x_n) = y(x_n) + h_n f(x_n, y(x_n)).$$

2. Také ji lze chápat tak, že diferenciální rovnici $y' = f(x,y)$ nahradíme diferenční rovnicí

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h_n} = f(x_n, y_n) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Algoritmus: Je zřejmý (podrobnosti např. [BP] str. 133).

Příklad: Řešte úlohu

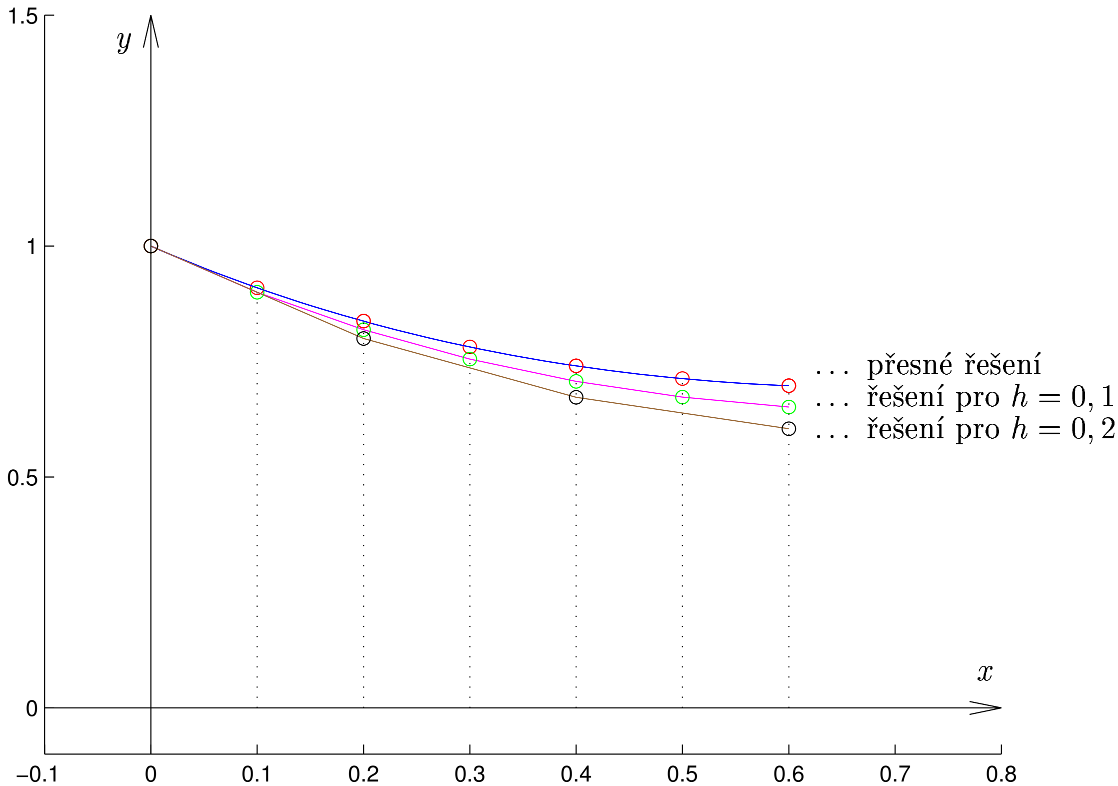
$$y' = x - y,$$
$$y(0) = 1$$

na intervalu $\langle 0; 0{,}6\rangle$ s konstantními kroky $h = 0,2$ a $h = 0,1$.
(Přesné řešení: $y(x) = 2e^{-x} + x - 1$).

Řešení: Použijeme rekurentní vztah:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n).$$

		$h = 0,2$		$h = 0,1$	
x_n	$\overbrace{y(x_n)}^{\text{přesné}}$	y_n	e_n	y_n	e_n
0	1,000	1,000	0,000	1,000	0,000
0,1	0,910			0,900	0,010
0,2	0,837	0,800	0,037	0,820	0,017
0,3	0,782			0,758	0,024
0,4	0,741	0,680	0,061	0,712	0,029
0,5	0,713			0,681	0,032
0,6	0,698	0,624	0,074	0,663	0,035



Poznámka: 1) Vidíme, že je chyba úměrná h,
2) Chyba s rostoucím x vzrůstá.

Obecná jednokroková metoda

Eulerova metoda je sice velmi jednoduchá, ale k dosažení určité přesnosti musíme používat velmi malé kroky h_i. Chceme-li jednokrokovou metodu vyššího řádu, musíme se zříci *linearity*, tj.

$$y_{n+1} = y_n + h_n \cdot \Phi(x_n, y_n, h_n, f) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Metody Taylorova typu:

Hodnotu $y(x_{n+1})$ budeme aproximovat pomocí Taylorova rozvoje vyššího řádu (1. řádu = *Eulerova metoda*), tj.

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h_n) = y(x_n) + h_n y'(x_n) + \frac{h_n^2}{2!} y''(x_n) + \ldots + \frac{h_n^p}{p!} y^{(p)}(x_n) \tag{3}$$

Derivace y v bodě x_n lze určit postupným derivováním funkce f.

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y(x)) \\ y'' &= f_x + f_y \cdot \underbrace{y'}_{=f(x,y(x))} \qquad \Big(= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{f_x} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{f_y} \cdot \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'} \Big) \end{aligned}$$

Obecně lze odvodit rekurenci:

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y(x)) \\ y^{(r+1)} &= f^{(r)}(x, y(x)) = f_x^{(r-1)}(x, y(x)) + f_y^{(r-1)}(x, y(x)) \cdot f(x, y(x)) \quad r = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{4}$$

Zbývá jen dosadit (4) za derivace v (3).

Příklad: Odvoďte metodu Taylorova typu 2.řádu pro řešení úlohy:

$y' = x - y,$ na intervalu $\langle 0; 0,6\rangle$ s konstantním krokem $h = 0,2$.

$y(0) = 1$ (Přesné řešení: $y(x) = 2e^{-x} + x - 1$).

Řešení:

$$f(x,y) = x - y$$
$$f'(x,y) = f_x + f_y \cdot f = 1 + (-1)\cdot f(x,y) = 1 - x + y.$$

Dostáváme rekurentní vztah:

$$y_{n+1} = y_n + h_n(x_n - y_n) + \frac{1}{2}h_n^2(1 - x_n + y_n)$$

x_n	$\overbrace{y(x_n)}^{\text{přesné}}$	y_n	$h(x_n - y_n)$	$\frac{h^2}{2}(1 - x_n + y_n)$	e_n
0	1,000	1,000	-0,200	0,040	0,000
0,2	0,837	0,840	-0,128	0,033	-0,003
0,4	0,741	0,745	-0,069	0,027	-0,004
0,6	0,698	0,703			-0,005

Poznámka: Vidíme, že metoda Taylorova typu 2. řádu pro $h = 0,2$ dává přesnější výsledky než Eulerova metoda s $h = 0,1$.

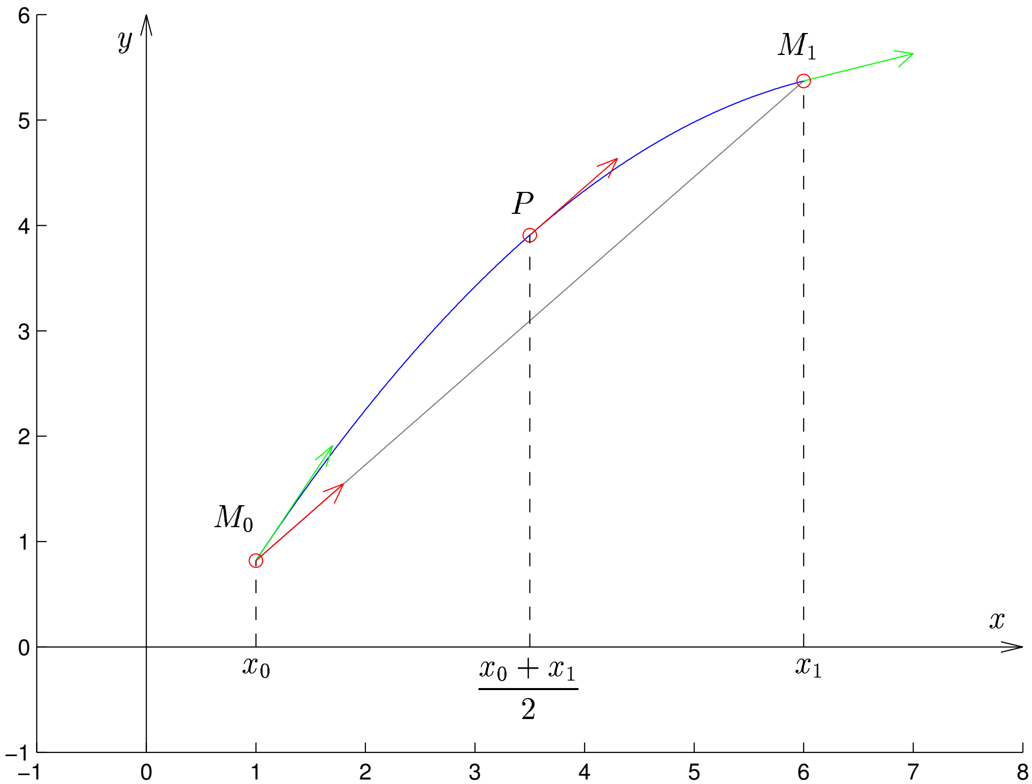
Metody Runge-Kuttova typu

- Univerzálnější metody než metody Taylorova typu.
- Vychází také z Taylorova polynomu, ale nepoužívá se ho přímo, aby nebylo nutné explicitně vyjadřovat derivace funkce $f = f(x, y(x))$ a počítat jejich hodnoty. Hledaná aproximace je kombinací několika hodnot funkce f vypočítaných v několika strategicky volených bodech (x, y) na intervalu $\langle x_n, x_{n+1} \rangle$.

Poznámka: Těchto metod je velké množství!

Ukážeme si odvození dvou metod tohoto typu s geometrickou interpretací.

Použijeme následující úvahy:



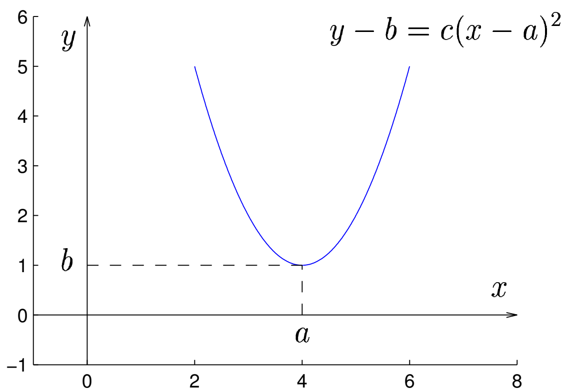
Věta:

Nechť oblouk $M_0\, M_1$ je částí paraboly. Potom platí:

1. Tečna v bodě P je rovnoběžná s tětivou $M_0\, M_1$.
2. Směrnice tětivy $M_0\, M_1$ je aritmetickým průměrem směrnic tečen v M_1 a M_2.

Důkaz: Rovnice paraboly (polynomu 2.stupně): $\qquad y - b = c(x-a)^2$

$$y = c(x-a)^2 + b$$
$$\Rightarrow$$
$$y' = 2c(x-a)$$



1. Směrnice tečny v bodě P:

$$y'(\frac{x_0+x_1}{2}) = 2c(\frac{x_0+x_1}{2} - a) = \underline{\underline{c(x_0+x_1-2a)}}$$

Směrnice tětivy M_0M_1 je:

$$\frac{y(x_1)-y(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{c(x_1-a)^2+b-c(x_0-a)^2-b}{x_1-x_0} =$$
$$= \frac{cx_1^2-2acx_1+a^2c+b-cx_0^2+2acx_0-a^2c-b}{x_1-x_0} =$$
$$= c\left(\frac{x_1^2-x_0^2-2a(x_1-x_0)}{x_1-x_0}\right) = \underline{\underline{c(x_1+x_0-2a)}}.$$

2. Směrnice tečny v bodě M_0 je:

$$y'(x_0) = 2c(x_0-a)$$

Směrnice tečny v bodě M_1 je:

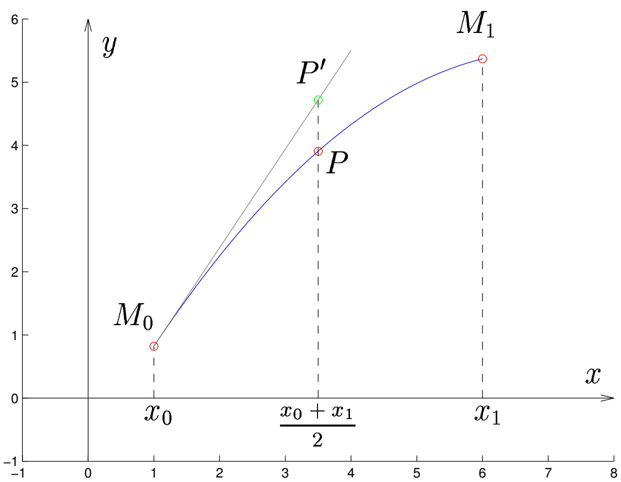
$$y'(x_1) = 2c(x_1-a)$$

Jejich aritmetický průměr:

$$\frac{y'(x_0)+y'(x_1)}{2} = \frac{2c(x_0-a)+2c(x_1-a)}{2} =$$
$$= c(x_0-a+x_1-a) = \underline{\underline{c(x_0+x_1-2a)}}.$$

Nyní použijeme vlastnost 1)

Známe souřadnice bodu M_0. Jestliže bychom znali y-souřadnici bodu P, pak stačí udělat tečnu a bodem M_0 vést rovnoběžku a dostaneme y-souřadnici bodu M_1. My ale y-souřadnici bodu P neznáme (obecně funkce $y = y(x)$ nemusí být parabola, to je jen naše aproximace), takže ji vyjádříme přibližně. Bod P nahradíme bodem P', který má stejnou x-ovou souřadnici a leží na tečně k M_0.



P' má souřadnice:

$$\left[x_0 + \frac{h_0}{2}, y_0 + \frac{h_0}{2} \cdot \underbrace{f(x_0, y_0)}_{y_0'(x_0)}\right]$$

Tečna v bodě P' má směrnici:

$y'(x_0 + \frac{h_0}{2})$, tj.

$y'(x_0 + \frac{h_0}{2})=$

$f(x_0 + \frac{h_0}{2}, y_0 + \frac{h_0}{2} \cdot \overbrace{f(x_0, y_0)}^{k_1})$.

Stejnou směrnici by však měla mít i tětiva $M_0 M_1 \Rightarrow$ souřadnice bodu M_1 jsou:

$$x_1 = x_0 + h_0$$

$$y_1 = y_0 + h_0 \cdot \overbrace{y'(x_0 + \frac{h_0}{2})}^{k_2}$$

Tyto vztahy lze přepsat do tvaru (obecně)

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

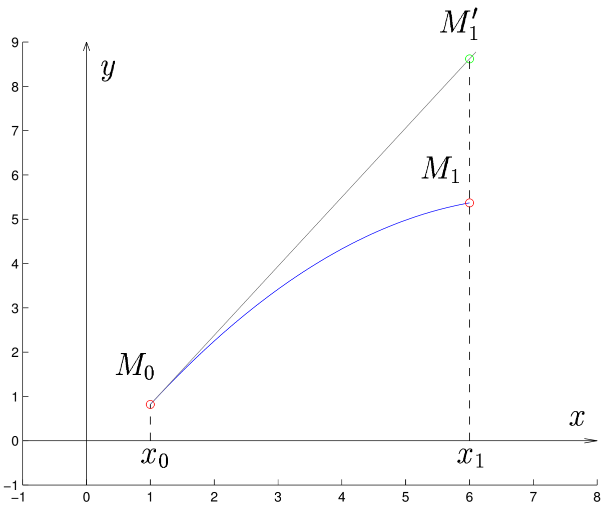
$$k_2 = f(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} \cdot k_1)$$

$$y_{n+1} = y_n + h_n \cdot k_2$$

Této metodě se říká *modifikovaná Eulerova metoda.*

Nyní použijeme vlastnost 2)

Známe souřadnice bodu M_0. Protože neznáme y-souřadnici bodu M_1, nahradíme ho bodem M_1', který má stejnou x-souřadnici a leží na tečně procházející bodem M_0.



M_1' má souřadnice:

$$\left[\underbrace{x_0 + h_0}_{=x_1},\; y_0 + h_0 \cdot \overbrace{\underbrace{f(x_0, y_0)}_{=y'(x_0)}}^{\overset{\text{ozn.}}{=} k_1}\right]$$

Směrnice tečny v M_1' je:

$$\overbrace{f(x_0 + h_0, y_0 + h_0 \cdot f(x_0, y_0))}^{\overset{\text{ozn.}}{=} k_2}$$

Bod M_1 dostaneme z podmínky, že směrnice tětivy M_0M_1 je aritmetickým průměrem směrnic tečen v M_0 a M_1', tj.

M_1' má souřadnice:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + h_0 \\ y_1 &= y_0 + h_0 \cdot \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \end{aligned}$$

Obecně:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + h_n, y_n + h_n \cdot k_1) \\ y_{n+1} &= y_n + h_n \cdot \frac{(k_1 + k_2)}{2} \end{aligned}$$

Této metodě se říká *Heunova metoda*

Poznámka: Obě tyto metody jsou 2.řádu (aproximovali jsme parabolou).

Poznámka: Nejvíce se používá tzv. *klasická Runge-Kuttova metoda*, která je 4. řádu, její vzorce jsou např. v [BP], str. 147.