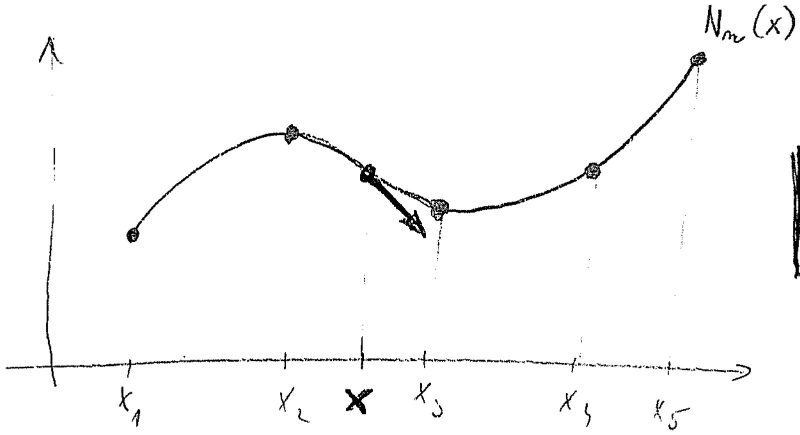
NUMERICKÉ DERIVOVÁNÍ

MYŠLENKA: Chceme najít derivaci fce f zadané tabulkou. Nejprve sestrojíme interpolační polynom a potom ~~tuto~~ derivaci fce f ztotožníme s derivací tohoto interpolačního polynomu.

Pozn: stupeň polynomu nemůže být nižší než řád počítané derivace.

Ilustrace:



$$\boxed{f'(x) \approx N_n'(x)}$$

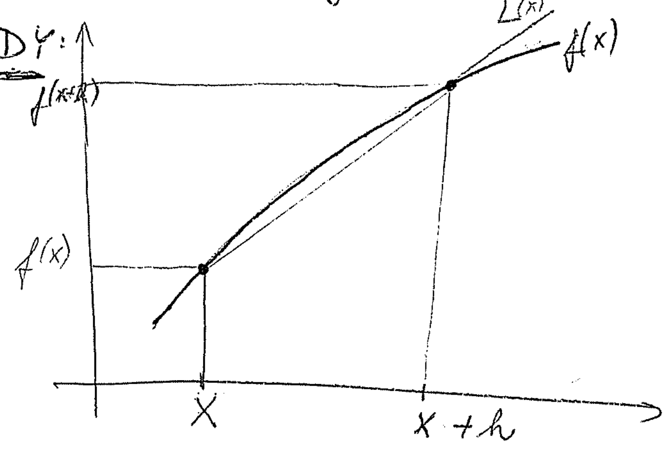
$$\boxed{f^{(k)}(x) \approx N_n^{(k)}(x)}$$

Předpoklady:

Předpokládejme pro jednoduchost, že hledáme derivaci v uzlových bodech x_i a navíc uzly x_i jsou ekvidistantní s krokem h.

PŘÍKLADY:

1)



Nechť máme 2 body: x, $x+h$

Interpolační polynom (lineární) má tvar:

$\boxed{I_1(x) = ax + b}$ $\underline{a, b?}$

musí platit:

$f(x) = ax + b$

$f(x+h) = a(x+h) + b$

$f(x+h) - f(x) = ah \Rightarrow \boxed{a = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$

$b = f(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot x$

$$\boxed{I_1'(x) = a = \boxed{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}} \approx f'(x)} \overset{ozn}{=} D_P f(x_0, h)$$

popř.

$$\boxed{I_1'(x+h) = \boxed{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}} \approx f'(x+h)} = D_L f(x_0 + h, h)$$

NM 8

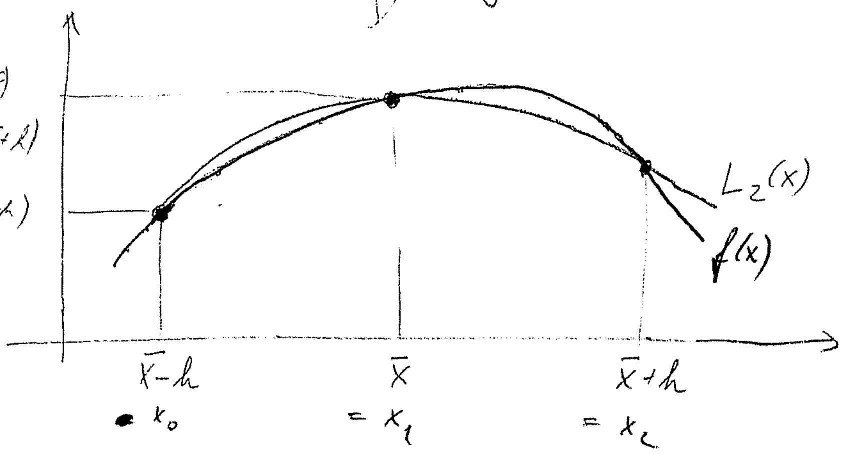
DCU

2/

$f(x_1)$ $f(\bar{x})$

$f(x_2)$ $f(\bar{x}+h)$

$f(x_0)$ $f(\bar{x}-h)$



Máme 3 body: $(\bar{x}-h, \bar{x}, \bar{x}+h)$ = x_0, x_1, x_2

Interpolační polynom $(I_2(x) = ax^2+bx+c)$

Lagrangeův:

$$L_2(x) = f(x_0)\,l_0(x) + f(x_1)\,l_1(x) + f(x_2)\,l_2(x),$$

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2h^2} = \frac{x^2 - x(x_1+x_2) + x_1x_2}{2h^2}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{-h^2} = \frac{x^2 - x(x_0+x_2) + x_0x_2}{-h^2}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2h^2} = \frac{x^2 - x(x_0+x_1) + x_0x_1}{2h^2}$$

$$L_2'(x) = f(x_0)\,l_0'(x) + f(x_1)\,l_1'(x) + f(x_2)\,l_2'(x)$$

$$l_0'(x) = \frac{2x-(x_1+x_2)}{2h^2}$$

$$l_1'(x) = \frac{2x-(x_0+x_2)}{-h^2}$$

$$l_2'(x) = \frac{2x-(x_0+x_1)}{2h^2}$$

---

jaká je hodnota derivace Lagr. int. polynomu v bodě x_1?, (tj. $\bar{x}$)

$$l_0'(x_1) = \frac{2x_1 - x_1 - x_2}{2h^2} = \frac{x_1-x_2}{2h^2} = \frac{-h}{2h^2} = \underline{-\frac{1}{2h}}$$

$$l_1'(x_1) = \frac{2x_1 - x_0 - x_2}{-h^2} = \frac{2\bar{x}-(\bar{x}-h)-(\bar{x}+h)}{-h^2} = \underline{0}$$

$$l_2'(x_1) = \frac{2x_1-(x_0+x_1)}{2h^2} = \frac{2\bar{x}-(\bar{x}-h)-(\bar{x})}{2h^2} = \underline{\frac{1}{2h}}$$

$$L_2'(\bar{x}) = f(\bar{x}-h)\cdot\left(-\frac{1}{2h}\right) + f(\bar{x})\cdot 0 + f(\bar{x}+h)\cdot\frac{1}{2h} =$$

$$\boxed{L_2'(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x}-h)}{2h} \approx f'(\bar{x})}$$

Pokračování 2/

Protože máme $L_2(x)$ polynom 2 stupně, můžeme aproximovat i 2 derivaci. Dívám se na 2 derivaci fce f v bodě x_1, tj. $\bar{x}$

$$L_2''(x) = f(x_0)\,l_0''(x) + f(x_1)\,l_1''(x) + f(x_2)\,l_2''(x)$$

$$l_0''(x) = \frac{2}{2h^2} = \frac{1}{h^2}$$

$$l_1''(x) = \frac{2}{-h^2}$$

$$l_2''(x) = \frac{2}{2h^2} = \frac{1}{h^2}$$

$$L_2''(\bar{x}) = \cancel{\ldots} = f(\bar{x}-h)\cdot\frac{1}{h^2} + f(\bar{x})\cdot\left(-\frac{2}{h^2}\right) + f(\bar{x}+h)\cdot\frac{1}{h^2} =$$

$$L_2''(\bar{x}) = \boxed{\frac{f(\bar{x}+h) - 2f(\bar{x}) + f(\bar{x}-h)}{h^2} \approx f''(\bar{x})}$$

Závěr: V těchto příkladech jsme odvodili všechny vzorce.
odvodili jsme

Vzorce

1. derivace: 2 bodové

$$\boxed{f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{1}{2} h f''(\xi)}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{1}{2} h f''(\xi)}$$

chyba aproximace řádu h

3 bodové

$$\boxed{f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{1}{6} h^2 f'''(\xi)}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h} + \frac{1}{3} h^2 f'''(\xi)}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{3f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{2h} + \frac{1}{3} h^2 f'''(\xi)}$$

chyba aproximace řádu h^2

2 derivace: 3 bodový

$$\boxed{f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - h^2 \frac{f^{(4)}(\xi)}{12}}$$

4 bodový

$$\boxed{f''(x) = \frac{12f(x) - 30f(x+h) + 24f(x+2h) - 6f(x+3h)}{6h^2} + O(h^2)}$$

5 bodový

$$\boxed{f''(x) = \frac{-f(x-2h) + 16f(x-h) - 30f(x) + 16f(x+h) - f(x+2h)}{12h^2} + O(h^4)}$$

atd....

Existuje řada vztahů ...

PŘÍKLAD: Vypočítejte přibližnou hodnotu 1. derivace funkce $f = f(x)$ v bodě x_0.

$$\boxed{f = e^x(1-x)\,,\quad x_0 = 1\,,\quad h = 0{,}1}$$

Nejprve zjistíme přesnou analytickou hodnotu derivace:

$$f'(x) = e^x(1-x) + e^x\cdot(-1) = -x\,e^x\,,\quad \text{tj: } \boxed{f'(1)} = -1\cdot e^1 = -e \approx \boxed{-2{,}7182818}$$

Podle vzorců:

1/ $$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{e^{1{,}1}(1-1{,}1) - \cancel{e^{1}(1-1)}}{0{,}1} = \frac{-0{,}1\,e^{1{,}1}}{0{,}1} = -e^{1{,}1} \doteq \underline{-3{,}0041}$$
$e = 0{,}2858$

2/ $$\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h} = \frac{\cancel{e^{1}(1-1)} - e^{0{,}9}(1-0{,}9)}{0{,}1} = \frac{-0{,}1\cdot e^{0{,}9}}{0{,}1} = -e^{0{,}9} \doteq \underline{-2{,}4596}$$
$e = 0{,}2586$

3/ $$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = \frac{e^{1{,}1}(1-1{,}1) - e^{0{,}9}(1-0{,}9)}{0{,}2} = \frac{-0{,}1e^{1{,}1} - 0{,}1\,e^{0{,}9}}{0{,}2} = -\frac{e^{1{,}1}+e^{0{,}9}}{2} \doteq \underline{-2{,}7310}$$
$e = 0{,}0136$

Všimněme si chyb u jednotlivých vzorců.
Potvrzuje se ten fakt, že 3/ je řádu h^2, tj. nejpřesnější $e \approx 0{,}01$
1, 2 jsou řádu h, tj. méně přesné $e \approx 0{,}1$

Poznámky:

- Stupeň polynomu nemůže být nižší než řád počítané derivace.
- Pro jednoduchost hledáme hodnotu derivace v uzlovém bodě a navíc uvažujeme ekvidistantní uzly s krokem h.

Pozn: jak volit h?

Máme tento vztah: $\boxed{f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{1}{2} h f''(\xi)}$

označuje chybu metody, ozn. r_1

$\boxed{|r_1| \le C_1 \cdot h}$ $\left(= \frac{M_2}{2} h,\ \text{kde } |f''(\xi)| < M_2\right)$

dále uvážíme ještě chyby měření, nebo zaokrouhlovací chyby, ozn r_2

$f(x), f(x+h)$ ... přesné hodnoty

$f^*(x), f^*(x+h)$ .. vstupní hodnoty:

Považujme odhad:

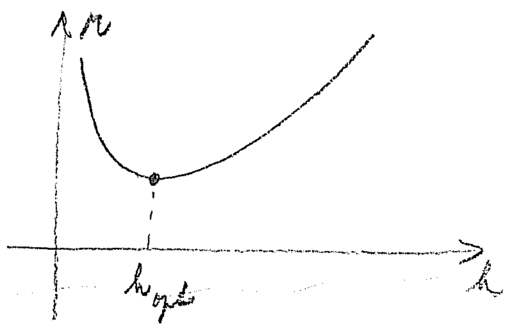
$|f(x+h) - f^*(x+h)| < \varepsilon$ a $|f(x) - f^*(x)| < \varepsilon$

$$r_2 = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{f^*(x+h)-f^*(x)}{h}$$

$\boxed{|r_2| \le C_2 \cdot \frac{1}{h}}$ $\left(= 2\varepsilon \cdot \frac{1}{h}\right)$

Celková chyba: r:

$$|r| \le |r_1| + |r_2| \le C_1 h + C_2 \cdot \frac{1}{h}$$



Pozn: Jedná se tedy o špatně podmíněnou úlohu.
(Se zmenšováním se h roste chyba)

PŘÍKLAD: Stanovte derivaci funkce $f = f(x)$ v bodě x_0:
$f(x) = \sin\frac{1}{x}$; $x_0 = 1$; volte různé hodnoty kroku h
($h = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}$)

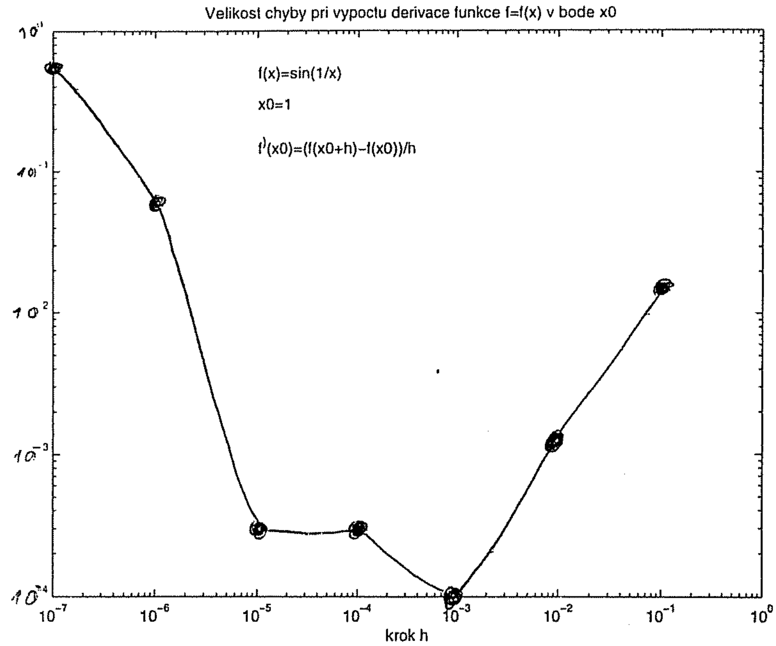
analytické přesné řešení:

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$, $f'(1) = -\cos 1 = -0{,}5403$

Počítat budeme podle vztahu:

$$\boxed{f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$

		chyba
$h = 10^{-1}$: $\dfrac{\sin\frac{1}{1{,}1} - \sin 1}{0{,}1}$	$= -0{,}5252$	$1{,}5 \cdot 10^{-2}$
$h = 10^{-2}$: $\dfrac{\sin\frac{1}{1{,}01} - \sin 1}{0{,}01}$	$= -0{,}5390$	$1{,}3 \cdot 10^{-3}$
$h = 10^{-3}$: $\dfrac{\sin\frac{1}{1{,}001} - \sin 1}{0{,}001}$	$= -0{,}5402$	10^{-4}
$h = 10^{-4}$: $\dfrac{\sin\frac{1}{1{,}0001} - \sin 1}{0{,}0001}$	$= -0{,}54$	$3 \cdot 10^{-4}$
$h = 10^{-5}$	$= -0{,}54$	$3 \cdot 10^{-4}$
$h = 10^{-6}$	$= -0{,}6$	$6 \cdot 10^{-2}$
$h = 10^{-7}$	$= 0$	$0{,}54$



Pozn.: Z předcházejícího se zdá, že je nemožné dosáhnout předem stanovené přesnosti. Východiskem může být tzv.

RICHARDSONOVA EXTRAPOLACE

- OBECNÝ PRINCIP !!!

Myšlenka: Využijeme 2 přibližných výsledků k získání třetího, který bude lepší.

PŘÍKLAD: Vezmeme si vzorec pro výpočet derivace v tomto tvaru:

$$(1)\quad f'(x_0,h) = f'(x_0) = \boxed{\frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - \frac{1}{6}h^2 f'''(\xi_1)}$$

Podobný vztah musí platit i v případě, kdy za krok vezmeme $2h$

$$(2)\quad f'(x_0,2h) = f'(x_0) = \boxed{\frac{f(x_0+2h) - f(x_0-2h)}{2(2h)} - \frac{1}{6}(2h)^2 f'''(\xi_2)}$$

Vhodnou kombinací (1) a (2) dosáhneme eliminace chyby řádu h^2:

$$f'(x_0) \approx \frac{f'(x_0,2h) - 4 f'(x_0,h)}{-3} = \boxed{\frac{4}{3} f'(x_0,h) - \frac{1}{3} f'(x_0,2h)} = f'(x_0,h) + \frac{1}{3}\left[f'(x_0,h) - f'(x_0,\ldots\right.$$

Platí, že tato aproximace je s chybou řádu $O(h^4)$.

NM (8)

Pozn.: Algoritmus Richardsonovy extrapolace lze samozřejmě opakovat. Tato metoda je potom velmi efektivní.

PŘÍKLAD: Pro dostatečně hladkou fci f platí tento vztah:

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} + a_1 h^2 + a_2 h^4 + a_3 h^6 + \dots}$$

Příkladem této fce je $\boxed{f(x) = \ln x}$.

Chceme stanovit derivaci f' v bodě $x_0 = 3$.

Budeme volit 4 různé kroky $h = 0{,}8;\ 0{,}4;\ 0{,}2;\ 0{,}1$

Výsledky zapíšeme do tabulky:

h	$f'(x_0, h)$	po 1. korekci (viz předch. str.)	po 2. korekci (viz ●)
0,8	0,341589		
0,4	0,335329	$0{,}335329 + \frac{1}{3}[0{,}335329 - 0{,}341589] = 0{,}333242$	
0,2	0,333828	$0{,}333828 + \frac{1}{3}[0{,}333828 - 0{,}335329] = 0{,}333327$	$0{,}333327 + \frac{1}{15}[0{,}333327 - 0{,}333242] = \underline{0{,}333332}$
0,1	0,333456	$0{,}333456 + \frac{1}{3}[0{,}333456 - 0{,}333828] = 0{,}333332$	$0{,}333332 + \frac{1}{15}[0{,}333332 - 0{,}333327] = \underline{\underline{0{,}333332}}$
	eliminujeme chyby řádu h^2	nyní lze eliminovat chyby řádu h^4	víc se rovnají; obecně lze jistě pokračovat a eliminovat chyby h^6 (řádu)

● za $f'_h = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} + a_2 h^4 + \dots$

$f'_{2h} = \frac{f(x+2h)-f(x-2h)}{4h} + a_2 \cdot 2^4 h^4$

$$f' \approx \frac{f'_{2h} - 2^4 f'_h}{1-2^4} = f'_h + \frac{1}{2^4-1}\left[f'_h - f'_{2h}\right]$$

(Přesné řešení bylo: $f'(x) = \frac{1}{x}$, tj. $f'(3) = \frac{1}{3}$)