Diskrétní L_2-aproximace

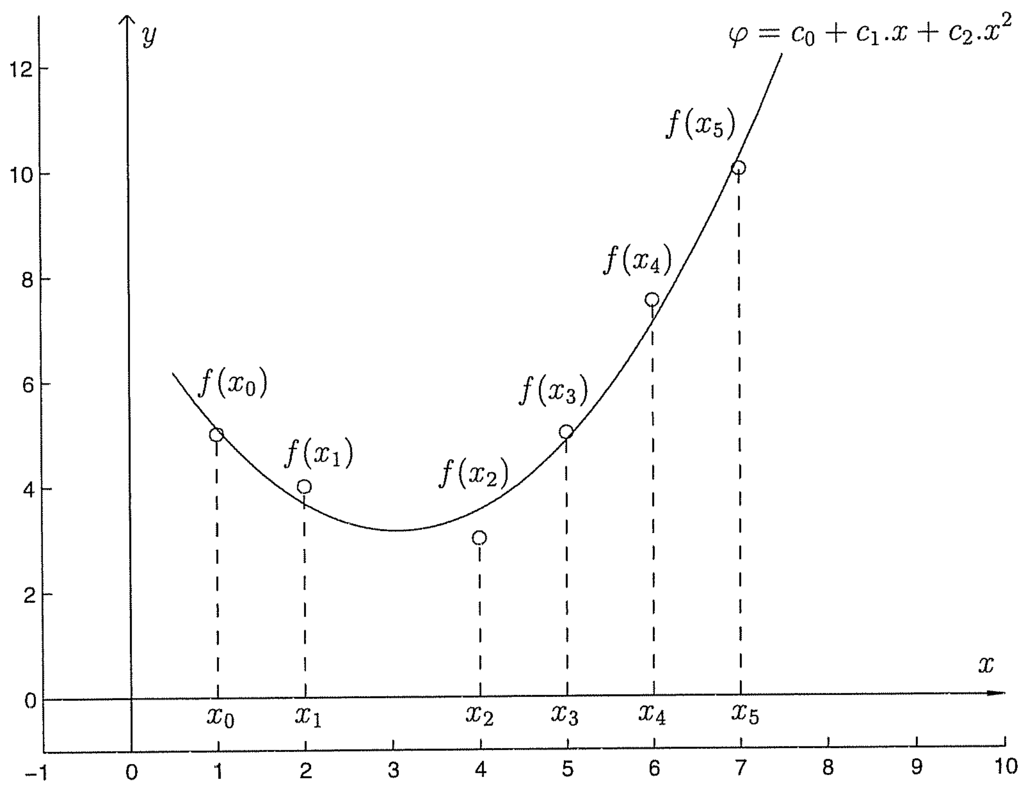
Myšlenka:

Chceme aproximovat funkci, která je dána tabulkou $\{(x_i, f(x_i))\}$. V případě, kdy jsou $f(x_i)$ zatíženy chybou (např. výsledky měření), není vhodné provádět interpolaci. Aproximaci φ hledáme ve tvaru

$$\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x),$$

kde φ_i jsou zadané funkce a c_i hledané parametry. Chceme minimalizovat „souhrnou odchylku“ funkce φ od zadaných dat.

Ilustrační obrázek:



Příklad

Je dána funkce f tabulkou

x_i	$0,5$	$0,8$	$0,9$	$1,1$	$1,2$
$f(x_i)$	$2,25$	$0,72$	$0,33$	$-0,27$	$-0,48$

Tuto funkci chceme aproximovat lineární funkcí metodou nejmenších čtverců.

Lineární funkce $\varphi = c_0 . \underbrace{1}_{\varphi_0(x)} + c_1 . \underbrace{x}_{\varphi_1(x)}$

Minimalizujeme funkci

$$r(c_0, c_1) = \sum_{i=1}^{5} |f(x_i) - \varphi(x_i)|^2 = \sum_{i=1}^{5} |f(x_i) - c_0 - c_1 x_i|^2$$

Podmínky minima

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \dfrac{\partial r}{\partial c_1} = -2\displaystyle\sum_{i=1}^{5}(f(x_i) - c_0 - c_1 x_i)x_i = 0 \\ (2) & \dfrac{\partial r}{\partial c_0} = -2\displaystyle\sum_{i=1}^{5}(f(x_i) - c_0 - c_1 x_i) = 0 \end{array}\right\} \text{ 2 rovnice pro neznámé } c_0, c_1.$$

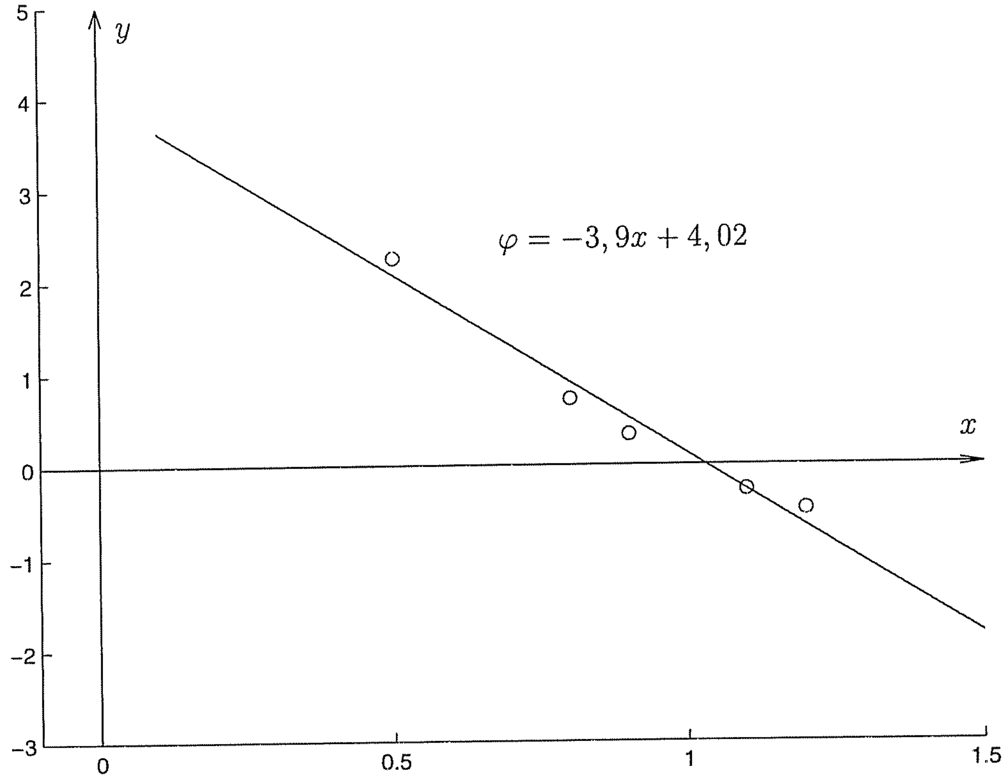
Konkrétně

$$\begin{array}{ll} (1) & (2,25 - c_0 - 0,5c_1)0,5 + (0,72 - c_0 - 0,8c_1)0,8+ \\ & +(0,33 - c_0 - 0,9c_1)0,9 + (-0,27 - c_0 - 1,1c_1)1,1+ \\ & +(-0,48 - c_0 - 1,2c_1)1,1 = 0 \\ (2) & (2,25 - c_0 - 0,5c_1) + (0,72 - c_0 - 0,8c_1)+ \\ & +(0,33 - c_0 - 0,9c_1) + (-0,27 - c_0 - 1,1c_1)+ \\ & +(-0,48 - c_0 - 1,2c_1) = 0 \end{array}$$

Po sečtení

$$\left.\begin{array}{lrcrcr} (1) & -4,35c_1 & - & 4,5c_0 & = & -1,125 \\ (2) & -4,5c_1 & - & 5c_0 & = & -2,55 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} c_1 = -3,9 \\ c_0 = 4,02 \end{array}$$

$$\underline{\varphi = -3,9x + 4,02}$$



Jiný přístup:

Má platit

$$c_1 x_i + c_0 = f(x_i),$$

tj.

$$\begin{bmatrix} 0,5 & 1 \\ 0,8 & 1 \\ 0,9 & 1 \\ 1,1 & 1 \\ 1,2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,25 \\ 0,72 \\ 0,33 \\ -0,27 \\ -0,48 \end{bmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad Q.c = f$$

Musíme řešit přeurčenou soustavu.

Stačí vyřešit

$$Q^T Q c = Q^T f$$

(Jedná se o stejnou soustavu jako v prvním přístupu.)

Poznámka

V případě, že některé hodnoty chceme eliminovat, například důsledkem špatného měření, nebo když jsou hodnoty pro větší x_i zatíženy větší chybou, je vhodné použít váhy, tj.minimalizujeme

$$r(c_i) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - \varphi(x_i)|^2 \, w_i$$

Poznámka

Otázkou ještě zůstává volba tvaru $\varphi(x)$.
První možností je volit

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = x^2, \quad \ldots, \quad \varphi_n(x) = x^n$$

Opět je třeba určit ještě stupeň polynomu (a to např. ze znalosti chování funkce f nebo pomocí statistických metod).

Ukazuje se, že takto volené $\varphi_i(x)$ nejsou nejlepší pro výpočty.
$\rightarrow$ Soustava normálních rovnic je pro větší n špatně podmíněná.

Za bázové funkce φ_i je vhodné volit ortogonální polynomy, pro které platí

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij} = \begin{matrix} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{matrix}$$

Symbol (f, g) představuje skalární součin funkcí, tj. $\int_a^b f g \, dx$

Příklady ortogonálních polynomů:

Čebyševovy, Legendrovy, Laguerrovy, Gramovy, $\ldots$ viz literatura

$\rightarrow$ Soustava normálních rovnic má pro ortogonální polynomy diagonální matici. (rozmyslet!)

Př: Určete L_2 aproximaci $\varphi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ pro fci f danou tabulkou

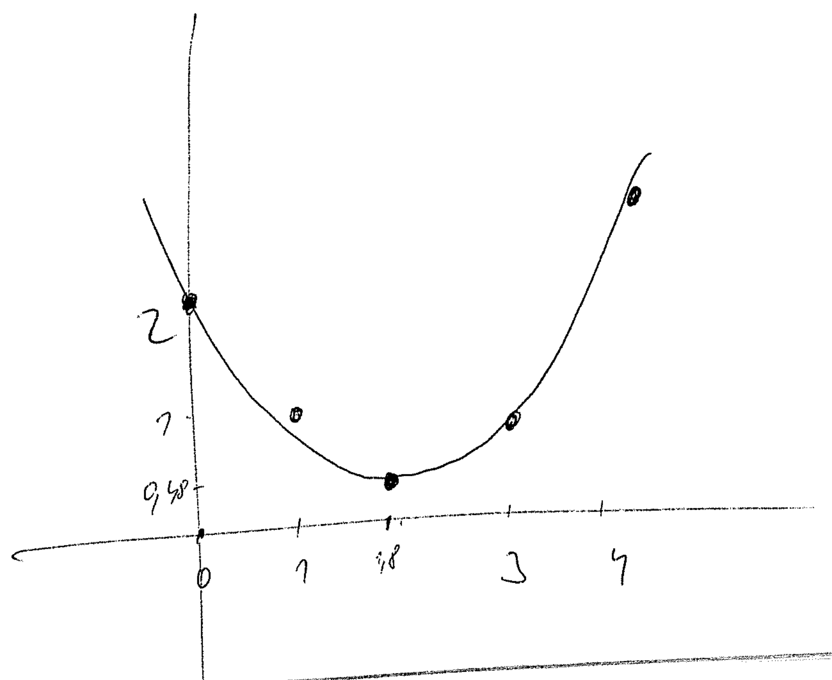
x_i	0	1	3	4
$f(x_i)$	2	1	1	3

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{c} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{f}$$

$$Q^T Q = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 26 \\ 8 & 26 & 92 \\ 26 & 92 & 338 \end{bmatrix} \qquad Q^T f = \begin{bmatrix} 7 \\ 16 \\ 58 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 2,1 \\ -1,8 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

$\varphi' = x - 1,8$
$\varphi'(\tilde{x}) = 0 \quad \tilde{x} = 1,8$



Př: L_2 aprox fcí $y = ax^2 + bx + c$

x	0	1	3	4
$f(x)$	0	-1	2	3

$$y = \frac{1}{3} x^2 - 0,4\bar{3} x - 0,3$$

Spojitá L$_2$-aproximace

Příklad

Stanovte spojitou L_2-aproximaci funkce $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$ lineární funkcí $\varphi(x) = c_1 x + c_0$.

Minimalizujeme funkci

$$r(c_0, c_1) = \int_0^1 |f(x) - \varphi(x)|^2 \, dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - c_0 - c_1 x)^2 \, dx$$

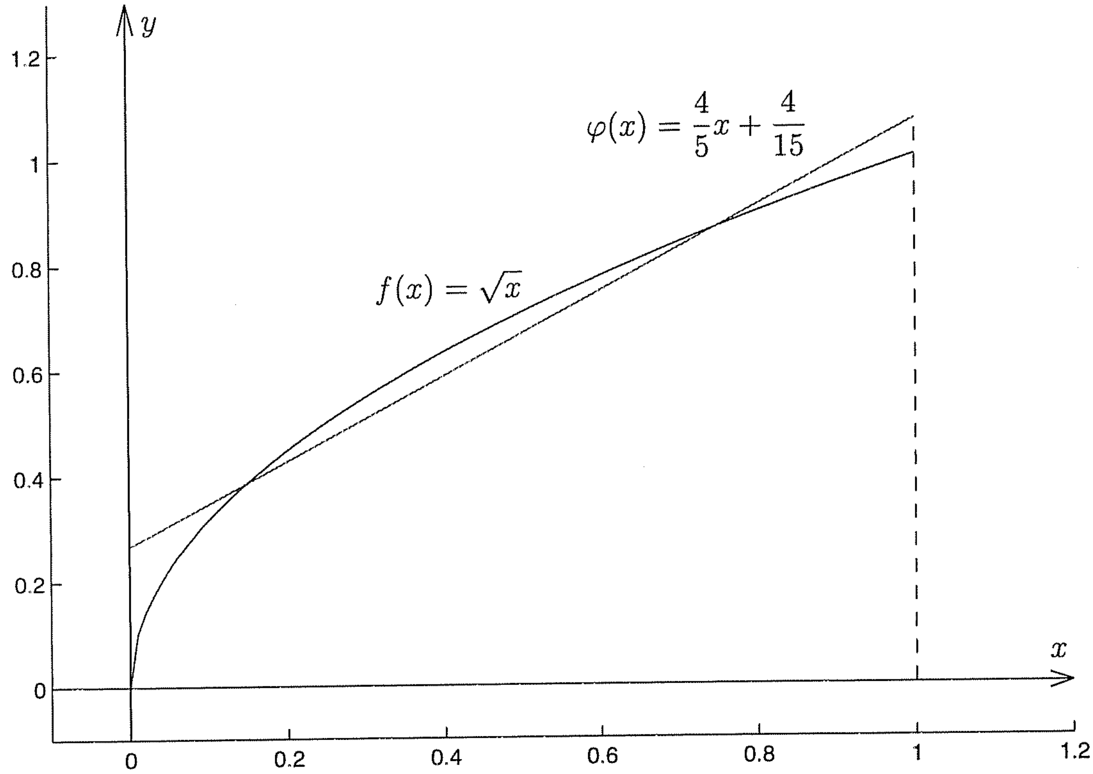
Podmínky minima

$$\left.\begin{aligned} &(1) \quad \frac{\partial r}{\partial c_1} = -2 \int_0^1 (\sqrt{x} - c_0 - c_1 x) x \, dx = 0 \\ &(2) \quad \frac{\partial r}{\partial c_0} = -2 \int_0^1 (\sqrt{x} - c_0 - c_1 x) \, dx = 0 \end{aligned}\right\} \text{ 2 rovnice pro neznámé } c_0, c_1.$$

$$\begin{aligned} &(1) \quad -2\left[\frac{2}{5} x^{\cancel{\frac{2}{5}}\,\frac{5}{2}} - c_0 \frac{x^2}{2} - c_1 \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 0 \\ &(2) \quad -2\left[\frac{2}{3} x^{\cancel{\frac{2}{3}}\,\frac{3}{2}} - c_0 x - c_1 \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &(1) \quad \frac{2}{5} - \frac{1}{2} c_0 - \frac{1}{3} c_1 = 0 \\ &(2) \quad \frac{2}{3} - c_0 - \frac{1}{2} c_1 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{1}{2} c_0 + \frac{1}{3} c_1 &= \frac{2}{5} \\ c_0 + \frac{1}{2} c_1 &= \frac{2}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= \frac{4}{5} \\ c_0 &= \frac{4}{15} \end{aligned}$$

$$\varphi(x) = \frac{4}{5} x + \frac{4}{15}$$



Poznámka

Obecně lze opět zavést váhovou funkci $w = w(x)$ a minimalizovat

$$r(c_i) = \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|^2 w(x)\, dx$$

Ortogonální systémy funkcí

Gram-Schmidtův ortogonalizační proces

Jsou dány lineárně nezávislé funkce $g_1, g_2, \dots, g_n$ (prvky jistého prostoru).

Hledáme funkce (prvky téhož prostoru), které jsou navzájem po dvou ortogonální.

$$\boxed{f_1 = g_1}$$

f_2 hledáme ve tvaru $\boxed{f_2 = g_2 + \kappa_{21} f_1}$ a použijeme $(f_1, f_2) = 0$

$$\underbrace{(f_2, f_1)}_{=0} = (g_2, f_1) + \kappa_{21}(f_1, f_1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\kappa_{21} = -\frac{(g_2, f_1)}{(f_1, f_1)}}$$

f_3 hledáme ve tvaru $\boxed{f_3 = g_3 + \kappa_{31} f_1 + \kappa_{32} f_2}$ a použijeme $(f_3, f_1) = 0$ a $(f_3, f_2) = 0$

$$\underbrace{(f_3, f_1)}_{=0} = (g_3, f_1) + \kappa_{31}(f_1, f_1) + \kappa_{32} \underbrace{(f_2, f_1)}_{=0}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\kappa_{31} = -\frac{(g_3, f_1)}{(f_1, f_1)}}$$

$$\underbrace{(f_3, f_2)}_{=0} = (g_3, f_2) + \kappa_{31} \underbrace{(f_1, f_2)}_{=0} + \kappa_{32}(f_2, f_2)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\kappa_{32} = -\frac{(g_3, f_2)}{(f_2, f_2)}}$$

Obecně f_k hledáme ve tvaru $\boxed{f_k = g_k + \kappa_{k1} f_1 + \kappa_{k2} f_2 + \dots + \kappa_{k,k-1} f_{k-1}}$

$$\text{a} \quad \boxed{\kappa_{kj} = -\frac{(g_k, f_j)}{(f_j, f_j)}}$$

$$j = 1, 2, \dots, k-1$$

Příklad

Najděte ortogonální bázi lineárního obalu mnohočlenů
$g_1(x) = 1,\ g_2(x) = x,\ g_3(x) = x^2$ pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$.

$$\boxed{f_1(x) = g_1(x) = 1}$$

$f_2 = \underbrace{g_2(x)}_{x} + \kappa_{21} \underbrace{f_1(x)}_{=1} = x + \kappa_{21}$ a musí platit $(f_1, f_2) = 0$

$$\int_{-1}^{1} (x + \kappa_{21}).1\, dx = 0$$

$$\underbrace{\int_{-1}^{1} x\, dx}_{=0} + \int_{-1}^{1} \kappa_{21}\, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \kappa_{21} = 0$$

$$\boxed{f_2(x) = x}$$

$f_3 = \underbrace{g_3(x)}_{x^2} + \kappa_{31} \underbrace{f_1(x)}_{=1} + \kappa_{32} \underbrace{f_2(x)}_{=x} = x^2 + \kappa_{31} + \kappa_{32}.x$ a $(f_1, f_3) = 0$
a $(f_2, f_3) = 0$, tj.

$$\int_{-1}^{1} (x^2 + \kappa_{31} + \kappa_{32} x).1\, dx = 0$$

$$\underbrace{\int_{-1}^{1} x^2\, dx}_{=\frac{2}{3}} + \kappa_{31} \underbrace{\int_{-1}^{1} dx}_{=2} + \kappa_{32} \underbrace{\int_{-1}^{1} x\, dx}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \kappa_{31} = \frac{-\frac{2}{3}}{2} = -\frac{1}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} (x^2 + \kappa_{31} + \kappa_{32} x).x\, dx = 0$$

$$\underbrace{\int_{-1}^{1} x^3\, dx}_{0} + \kappa_{31} \underbrace{\int_{-1}^{1} x\, dx}_{=0} + \kappa_{32} \underbrace{\int_{-1}^{1} x^2\, dx}_{=\frac{2}{3}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \kappa_{32} = 0$$

$$\boxed{f_3(x) = x^2 - \frac{1}{3}}$$

Fourierova analýza

Do této chvíle jsme se zabývali aproximacemi funkce pouze pomocí polynomů. V úvodu jsme uvedli, že za bázové funkce můžeme volit libovolné funkce. Například pro aproximaci periodických funkcí není vhodné použít polynomy (a to jak ve smyslu interpolace tak ve smyslu L_2-aproximace). Pro aproximaci periodických funkcí je vhodné použít nějaký systém periodických bázových funkcí, např. systém tzv. **trigonometrických polynomů**:

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= 1 \\ \varphi_{2k-1}(x) &= \cos\frac{2\pi kx}{T} \qquad k = 1, 2, \ldots \\ \varphi_{2k}(x) &= \sin\frac{2\pi kx}{T} \qquad k = 1, 2, \ldots,\end{aligned}$$

kde T představuje periodu zadané funkce (vzdálenost prvního a posledního uzlu v diskrétním případě, resp. délku zadaného intervalu ve spojitém případě). Pro jednoduchost uvažujeme ekvidistantní uzly (v diskrétním případě). Počet uvažovaných bázových funkcí volíme buď menší než je počet zadaných bodů (ve smyslu L_2-aproximace), nebo roven počtu zadaných bodů (ve smyslu interpolace).

Jednoduchým cvičením je ukázat, že systém trigonometrických polynomů je ortogonální (jak v diskrétním tak ve spojitém případě). Ověřte!

Úlohu najít koeficienty c_i u bázových funkcí φ_i z vyjádření

$$\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x).$$

nazýváme v tomto případě **Fourierovou analýzou**.

Formálně pouze přeznačíme koeficienty c_i, tj. u bázové funkce $\varphi_0(x) = 1$ použijeme koeficient A_0, u bázových funkcí $\varphi_{2k-1}(x) = \cos(2\pi kx)/T$ použijeme koeficienty A_k a u bázových funkcí $\varphi_{2k}(x) = \sin(2\pi kx)/T$ použijeme koeficienty B_k.

Následující jednoduchý příklad naznačí princip Fourierovy analýzy.

Příklad

Aproximujte 2π-periodickou funkci zadanou tabulkou za použití maximálního počtu bázových funkcí (tj. ve smyslu interpolace).

x_i	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$f(x_i)$	12	-4	0	4

Řešení

Ze zadání je zřejmé, že perioda zadané funkce je 2π. Aproximující trigonometrický polynom budeme tedy volit ve tvaru

$$\varphi(x) = A_0 + A_1\cos x + B_1\sin x + A_2\cos 2x.$$

Zapíšeme interpolační podmínky

$$\varphi(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, 2, 3,$$

tj.

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos x_0 & \sin x_0 & \cos 2x_0 \\ 1 & \cos x_1 & \sin x_1 & \cos 2x_1 \\ 1 & \cos x_2 & \sin x_2 & \cos 2x_2 \\ 1 & \cos x_3 & \sin x_3 & \cos 2x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{bmatrix},$$

tj.

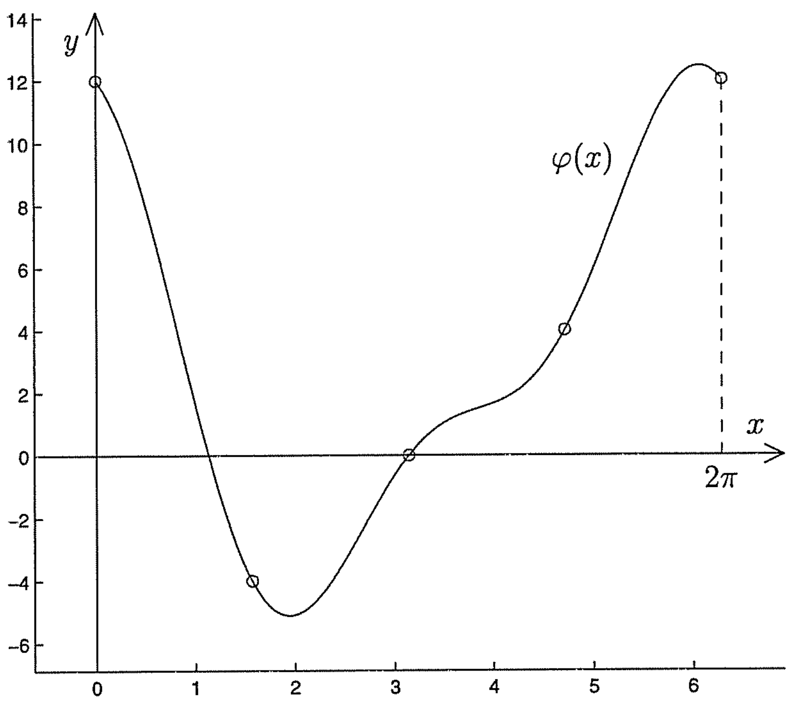
$$\begin{bmatrix} 1 & \cos 0 & \sin 0 & \cos 0 \\ 1 & \cos \pi/2 & \sin \pi/2 & \cos \pi \\ 1 & \cos \pi & \sin \pi & \cos 2\pi \\ 1 & \cos 3\pi/2 & \sin 3\pi/2 & \cos 3\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

tj.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Vyřešením soustavy získáme hledané koeficienty $A_0 = 3$, $A_1 = 6$, $B_1 = -4$, $A_2 = 3$ a tím i aproximující trigonometrický polynom

$$\underline{\varphi(x) = 3 + 6\cos x - 4\sin x + 3\cos 2x.}$$



□

Úlohu a řešení Fourierovy analýzy lze formulovat elegantně použitím komplexní proměnné. Uvažujme pro jednoduchost lichý počet bázových funkcí ($N = 2L + 1$) a periodu dané funkce 2π. Potom má aproximující funkce tvar

$$\varphi(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{L} (A_k \cos kx + B_k \sin kx). \tag{$*$}$$

Pro funkce $\sin x$ a $\cos x$ platí vztahy

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\,, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = -\frac{1}{2}\, i\,(e^{ix} - e^{-ix})$$

a tedy

$$\varphi(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{L} \left(\frac{1}{2} A_k \,(e^{ikx} + e^{-ikx}) - \frac{1}{2}\, i\, B_k \,(e^{ikx} - e^{-ikx}) \right) =$$

$$= A_0 + \sum_{k=1}^{L} \left(\frac{1}{2} (A_k - i\, B_k)\, e^{ikx} + \frac{1}{2} (A_k + i\, B_k)\, e^{-ikx} \right).$$

Označíme-li

$$C_0 = A_0\,, \quad C_k = \frac{1}{2} (A_k - i\, B_k)\,, \quad C_{-k} = \frac{1}{2} (A_k + i\, B_k)$$

dostaneme

$$\underline{\varphi(x) = \sum_{k=-L}^{L} C_k\, e^{ikx}.}$$

Pro koeficienty dostaneme vynásobením ($*$) jednotlivými bázovými funkcemi, využitím jejich ortogonality a interpolačních podmínek předpisy:

$$A_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)$$

$$A_k = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\, \cos kx_j$$

$$B_k = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\, \sin kx_j$$

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\, e^{-ikx_j}$$

Poznámka

Vezmeme-li aproximující polynom o menším počtu bázových funkcí než je počet zadaných bodů, jedná se o aproximaci ve smyslu metody nejmenších čtverců, tj. diskrétní L_2-aproximaci. Potom obecně nemohou být splněny interpolační podmínky přesně (pouze ve speciálních případech).

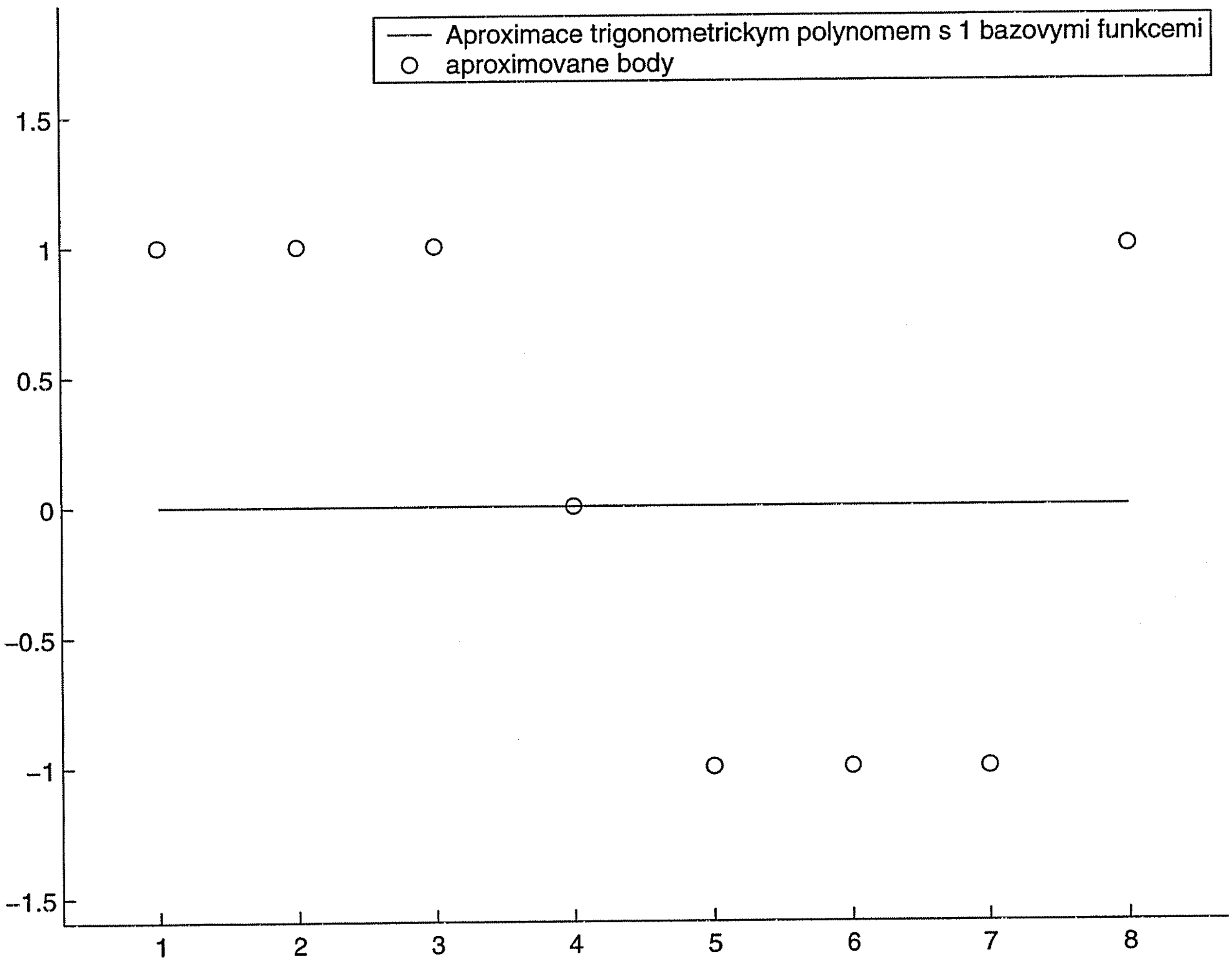
Poznámka

Výpočet koeficientů C_k představuje sčítání konečné řady. Uvažujeme-li počet aproximujících bázových funkcí N jako mocninu čísla 2 (tj. $N = 2^M$), lze odvodit velmi rychlý a efektivní algoritmus pro výpočet koeficientů C_k. Tento algoritmus se potom nazývá **rychlá Fourierova analýza**. Podrobněji viz literatura.

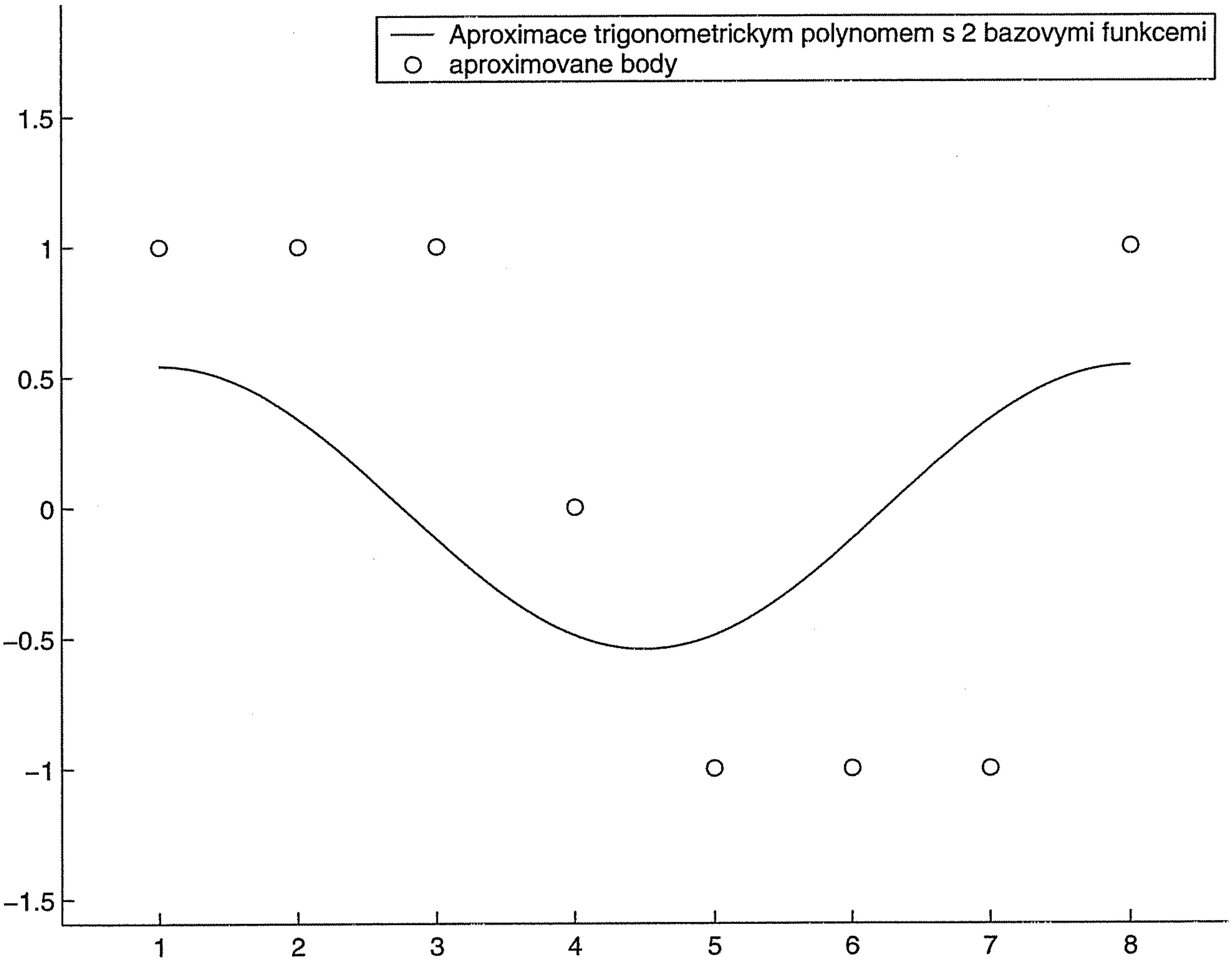
Fourierova analyza pro funkci zadanou tabulkou

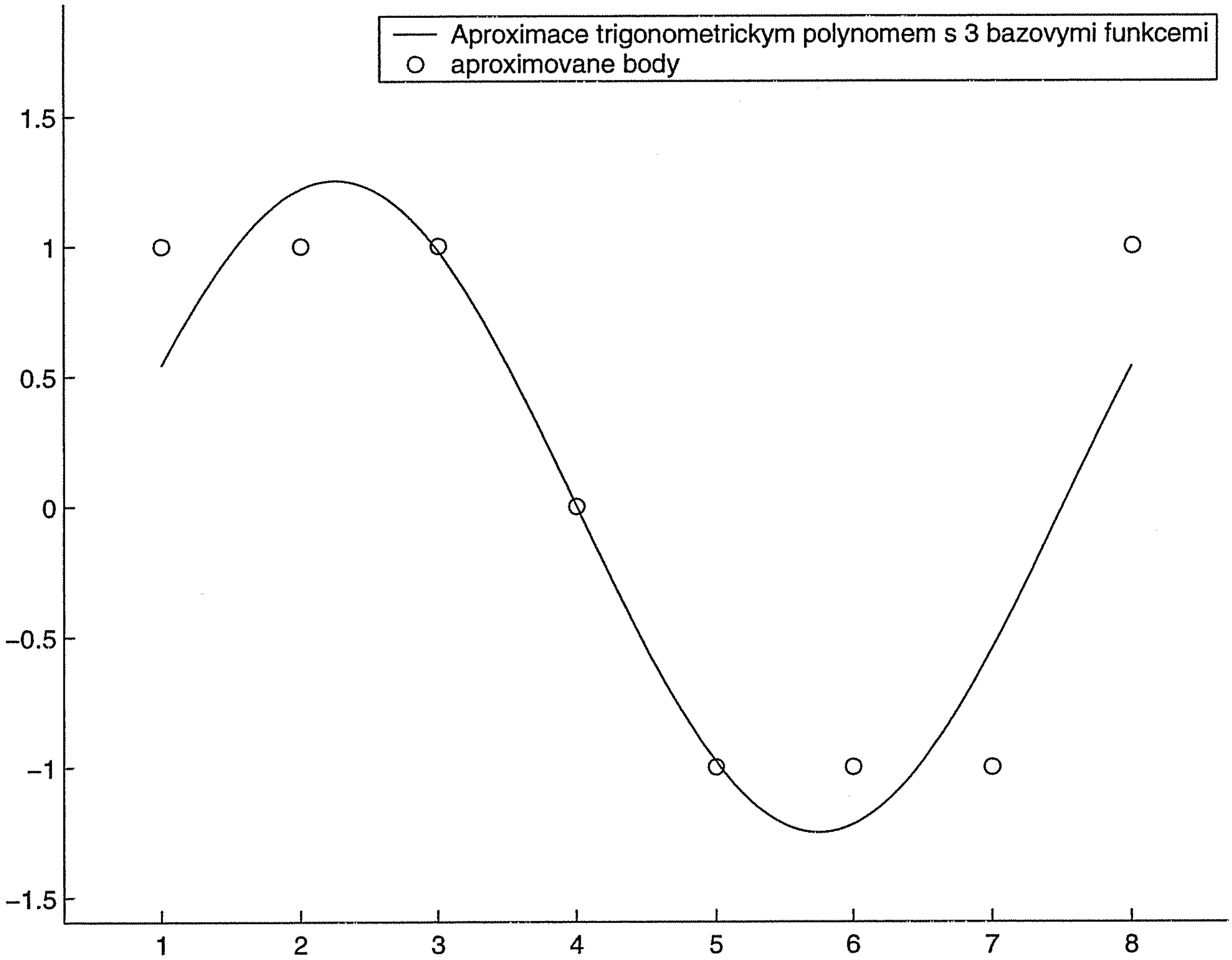
x(k)	f(k)
1.0000	1.0000
2.0000	1.0000
3.0000	1.0000
4.0000	0.0000
5.0000	-1.0000
6.0000	-1.0000
7.0000	-1.0000
8.0000	1.0000

Stiskni klavesu

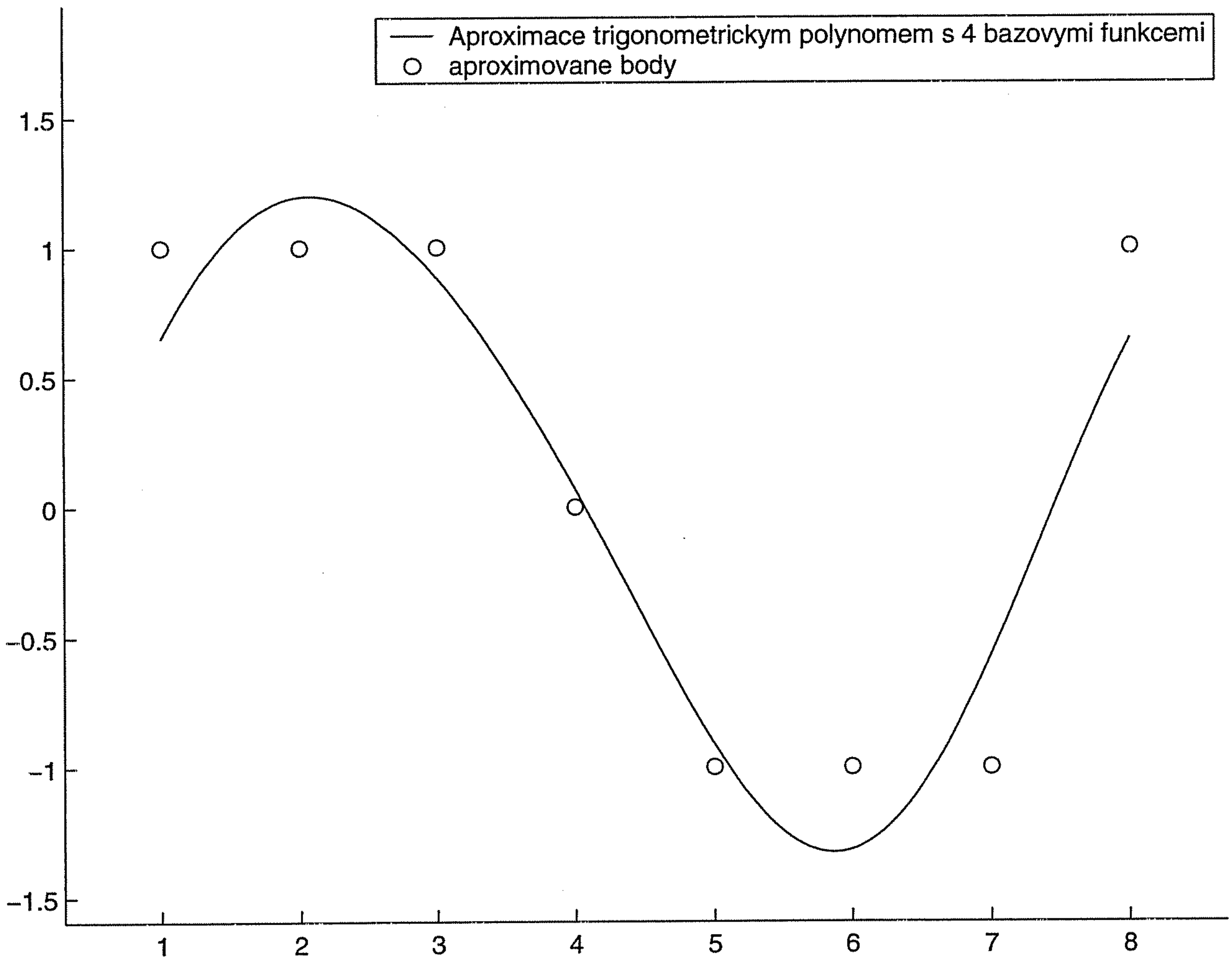


Aproximace trigonometrickym polynomem s 1 bazovymi funkcemi
aproximovane body
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
1
2
3
4
5
6
7
8

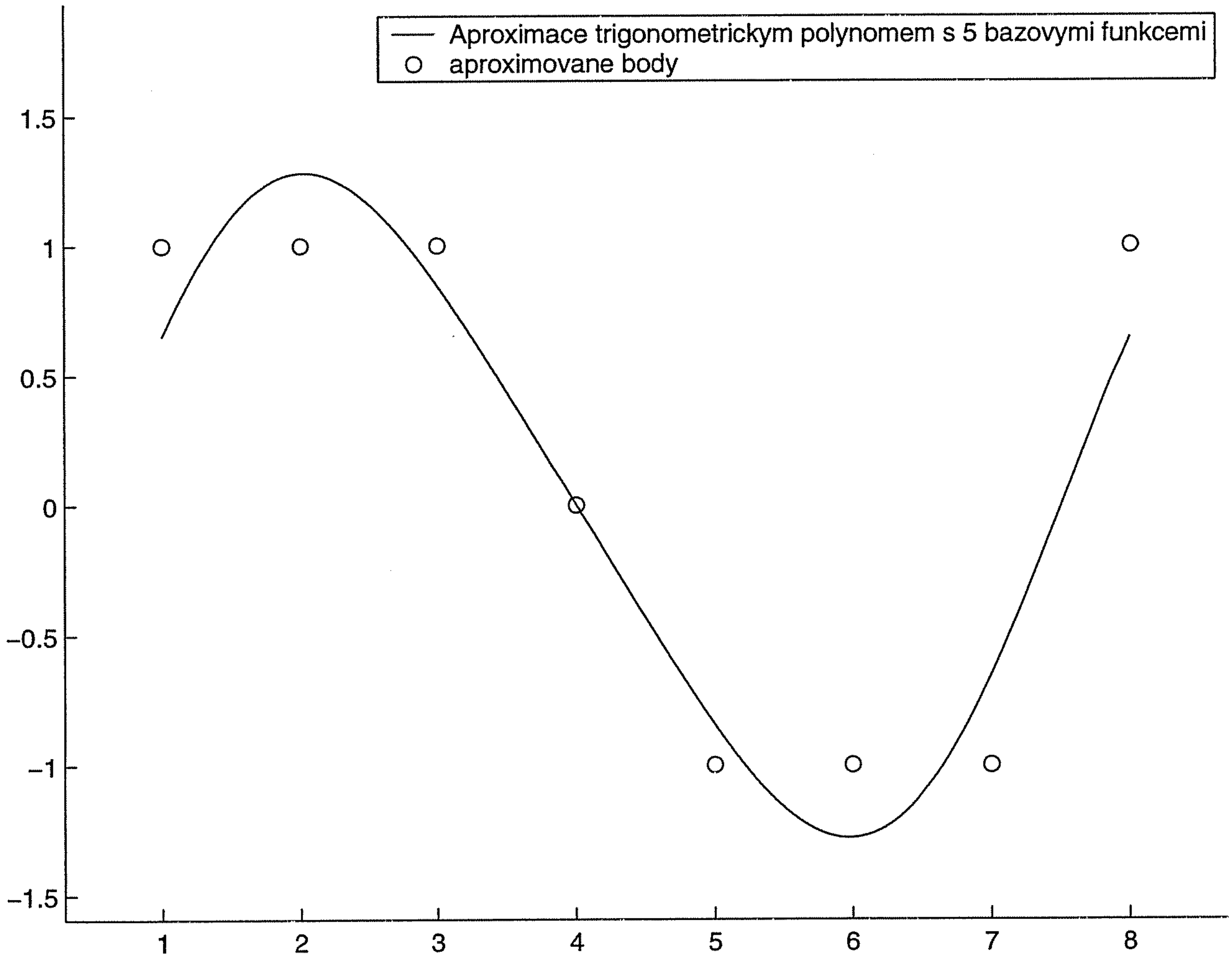

Aproximace trigonometrickym polynomem s 2 bazovymi funkcemi
aproximovane body
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
1
2
3
4
5
6
7
8

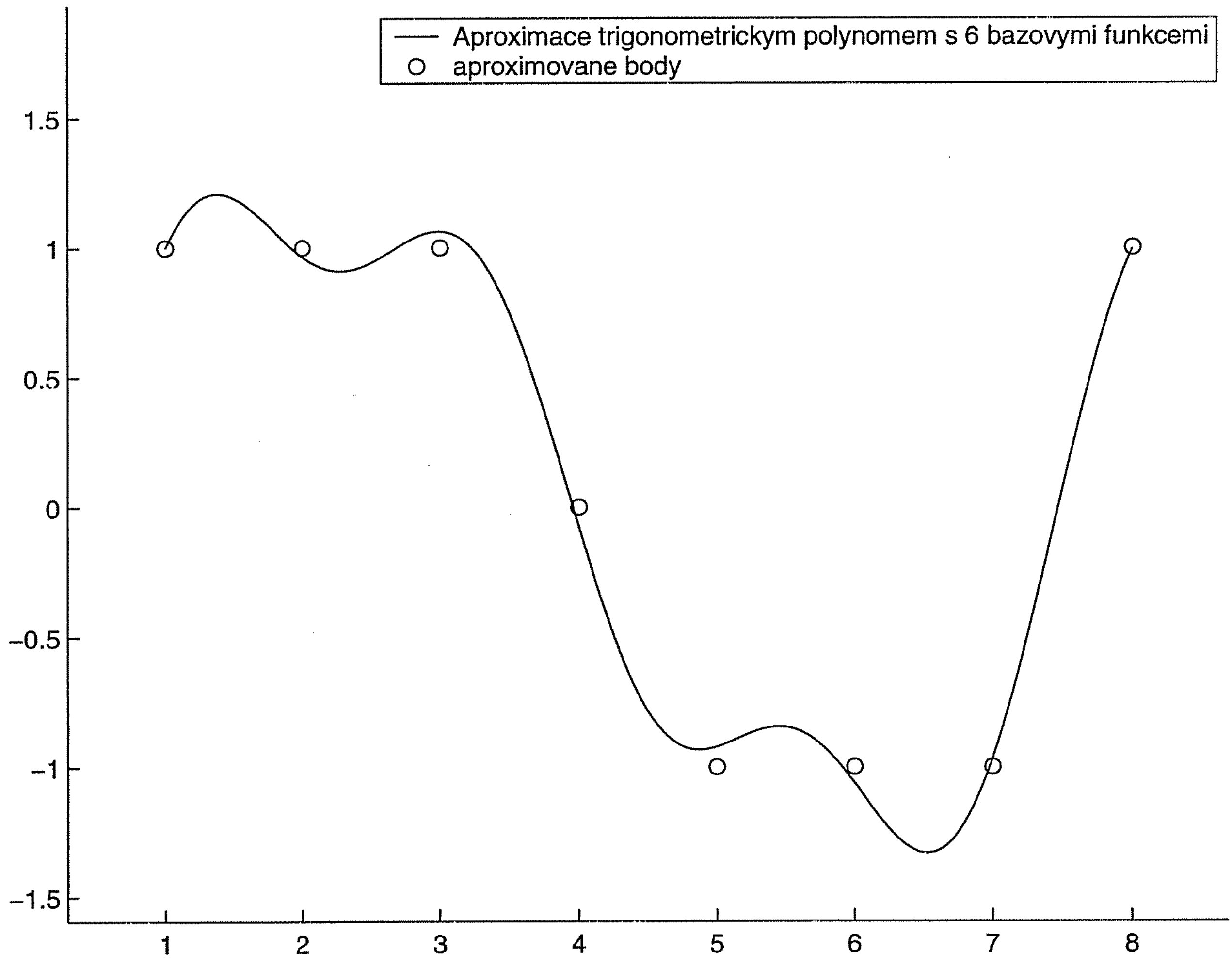


Aproximace trigonometrickym polynomem s 3 bazovymi funkcemi
aproximovane body
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
1
2
3
4
5
6
7
8

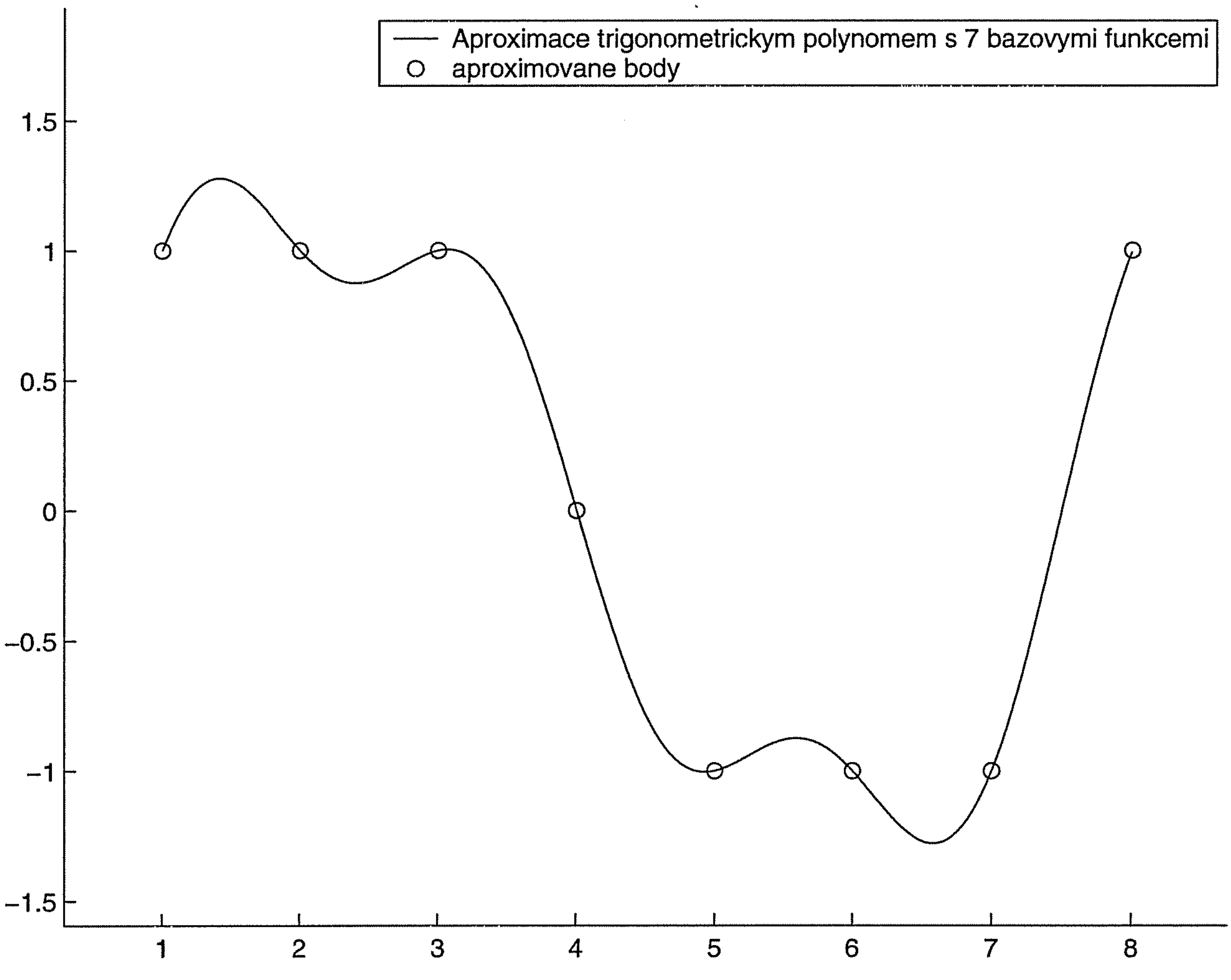


Aproximace trigonometrickym polynomem s 4 bazovymi funkcemi
aproximovane body
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
1
2
3
4
5
6
7
8


Aproximace trigonometrickym polynomem s 5 bazovymi funkcemi
aproximovane body
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
1
2
3
4
5
6
7
8



Aproximace trigonometrickym polynomem s 6 bazovymi funkcemi
aproximovane body
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
1
2
3
4
5
6
7
8


Aproximace trigonometrickym polynomem s 7 bazovymi funkcemi
aproximovane body
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
1
2
3
4
5
6
7
8

```
----------------------------------------------------------------
 Fourierova analyza pro funkci zadanou tabulkou

 |    x(k)     |     f(k)     |
 ==========================
 |    1.0000   |     1.0000   |
 |    2.0000   |     1.0000   |
 |    3.0000   |     1.0000   |
 |    4.0000   |     0.0000   |
 |    5.0000   |    -1.0000   |
 |    6.0000   |    -1.0000   |
 |    7.0000   |    -1.0000   |
 |    8.0000   |     1.0000   |

 Stiskni klavesu

 koeficient A(0) = 0.000000    u bazove funkce phi(0) = 1
 koeficient A(1) = 0.543134    u bazove funkce phi(1) = cos(2*pi*1*x/7.000000-1.
000000)
 koeficient B(1) = 1.127829    u bazove funkce phi(2) = sin(2*pi*1*x/7.000000-1.
000000)
 koeficient A(2) = 0.107574    u bazove funkce phi(3) = cos(2*pi*2*x/7.000000-1.
000000)
 koeficient B(2) = 0.085788    u bazove funkce phi(4) = sin(2*pi*2*x/7.000000-1.
000000)
 koeficient A(3) = 0.349292    u bazove funkce phi(5) = cos(2*pi*3*x/7.000000-1.
000000)
 koeficient B(3) = 0.079724    u bazove funkce phi(6) = sin(2*pi*3*x/7.000000-1.
000000)

 Aproximace je dana predpisem :

----------------------------------------------------------------------
                   L
  phi = A(0) + suma [ A(i)*phi(2i-1) + B(i)*phi(2i) ]
                  i=1
                                  pro pocet bazovych funkci N=2L+1
----------------------------------------------------------------------

----------------------------------------------------------------------
                  L-1
  phi = A(0) + suma [ A(i)*phi(2i-1) + B(i)*phi(2i) ] + A(L)*phi(2L-1)
                  i=1
                                  pro pocet bazovych funkci N=2L
----------------------------------------------------------------------


 Konec prikladu  -  Stiskni klavesu
```