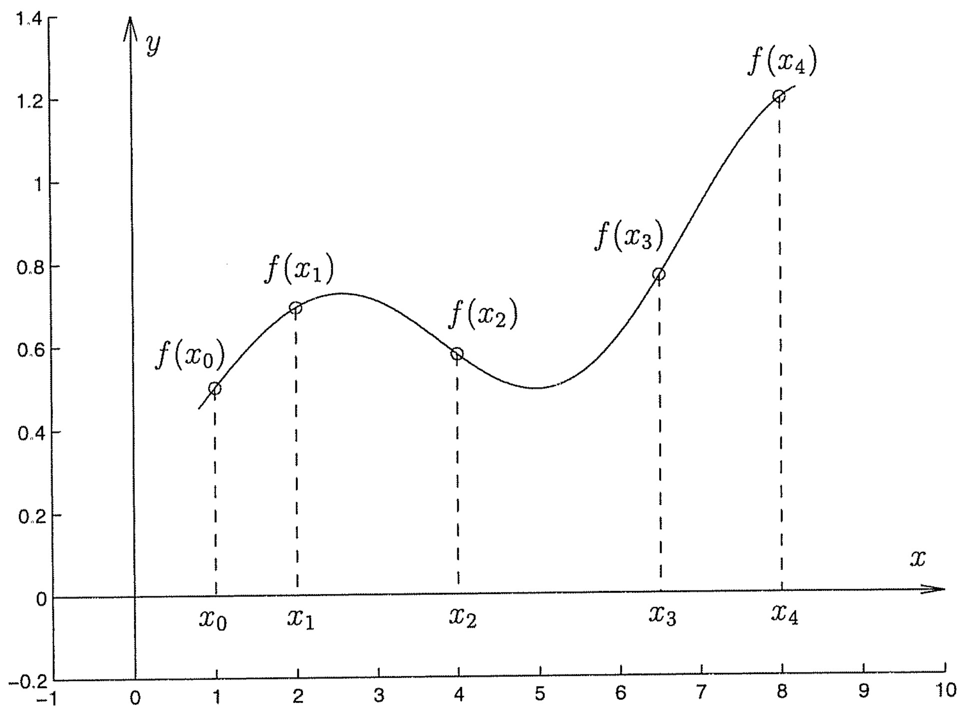
Aproximace interpolačním polynomem

Myšlenka:

Chceme aproximovat funkci, která je dána svými hodnotami v $n+1$ bodech x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ (uzly interpolace)



Lagrangeův interpolační polynom

Musí platit

$$L_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

Konstrukce

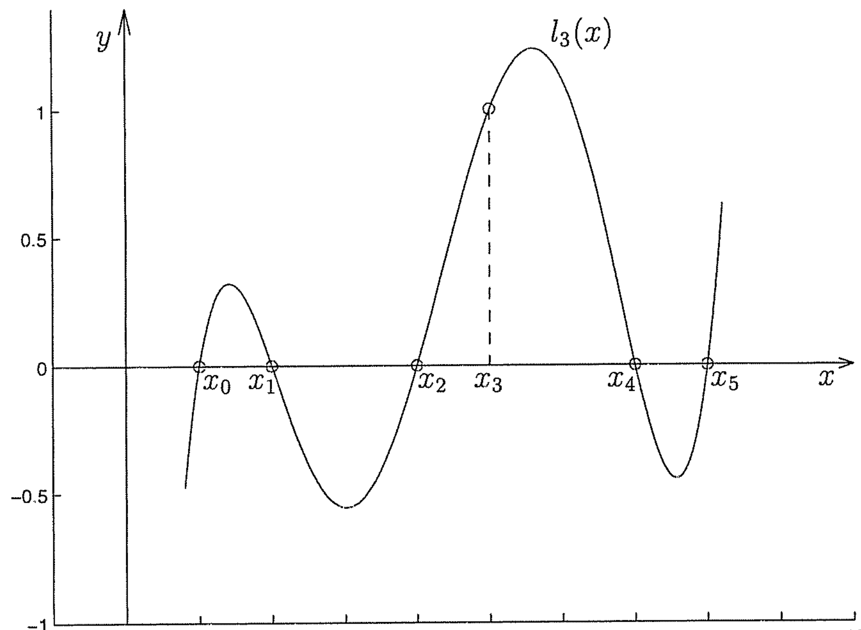
$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i).l_i(x),$$

kde $l_i(x)$ jsou polynomy n-tého stupně takové, že platí

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{matrix} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{matrix}$$

$l_i(x)$ má kořeny $x_0, x_1, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n$ a můžeme jej zapsat ve tvaru

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n)}$$



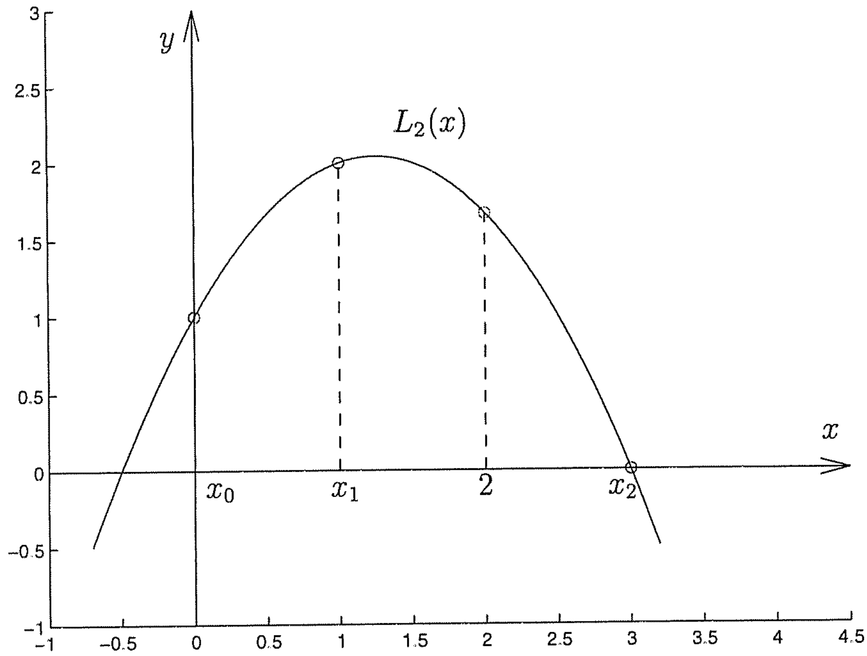
Příklad
Stanovte Lagrangeův interpolační polynom pro funkci f, která je dána tabulkou a určete přibližnou hodnotu $f(2)$.

i	0	1	2
x_i	0	1	3
$f(x_i)$	1	2	0

$$L_2(x) = f(x_0).l_0(x) + f(x_1).l_1(x) + f(x_2).l_2(x),$$

kde

$$l_0(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)} = \frac{1}{3}(x-1)(x-3)$$
$$l_1(x) = \frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)} = -\frac{1}{2}x(x-3)$$
$$l_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)} = \frac{1}{6}x(x-1)$$



$L_2(2) = ?$

$$l_0(2) = \frac{1}{3}(2-1)(2-3) = -\frac{1}{3}$$
$$l_1(2) = -\frac{1}{2}2(2-3) = 1$$
$$l_2(2) = \frac{1}{6}2(2-1) = \frac{1}{3}$$

$$L_2(2) = 1.(-\frac{1}{3}) + 2.1 + 0.\frac{1}{3} = \frac{5}{3} \approx f(2)$$

Newtonův interpolační polynom

Polynom volíme ve tvaru

$$N_n(x) =$$
$$= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

Požadujeme, aby platilo

$$N_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

Dosazujeme

$$N_n(x_0) = a_0 = f(x_0)$$

$$N_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1) \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$N_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0) - a_1 \overbrace{(x_2 - x_0)}^{x_2 - x_1 + x_1 - x_0}}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} =$$

$$= \frac{f(x_2) - f(x_0) - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0) - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} =$$

$$= \frac{f(x_2) - f(x_1) - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} =$$

$$a_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

Poznámka

Počítat koeficienty a_i přímo ze soustavy není praktické. Koeficienty budeme počítat pomocí poměrných diferencí.

Příklad

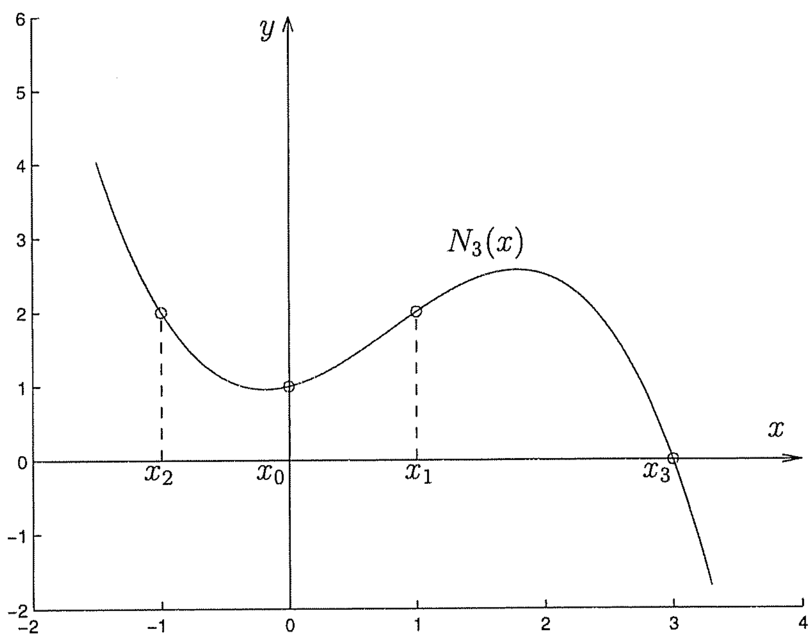
Stanovte Newtonův interpolační polynom pro funkci f, která je dána tabulkou.

i	0	1	2	3
x_i	0	1	-1	3
$f(x_i)$	1	2	2	0

Stupeň polynomu je $n = 3$ (jsou zadány 4 hodnoty).

i	x_i	$f(x_i)$	$\dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$ $\approx f'(x_i)$	$\dfrac{f'(x_i) - f'(x_{i-1})}{x_i - x_{i-2}}$ $\approx f''(x_i)$	$\dfrac{f''(x_i) - f''(x_{i-1})}{x_i - x_{i-3}}$ $\approx f'''(x_i)$
0	0	1			
1	1	2	$\dfrac{2-1}{1-0} = 1$		
2	-1	2	$\dfrac{2-2}{-1-1} = 0$	$\dfrac{0-1}{-1-0} = 1$	
3	3	0	$\dfrac{0-2}{3-(-1)} = -\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{-\frac{1}{2}-0}{3-1} = -\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{-\frac{1}{4}-1}{3-0} = -\dfrac{5}{12}$

$$
\begin{aligned}
N_3(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + +a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = \\
&= 1 + 1(x - 0) + 1(x - 0)(x - 1) - \frac{5}{12}(x - 0)(x - 1)(x + 1) = \ldots = \\
&= -\frac{5}{12}x^3 + x^2 + \frac{5}{12}x + 1
\end{aligned}
$$



Poznámka

Většinou potřebujeme kromě a_i vypočítat hodnotu polynomu v daném bodě α.

$$N_n(\alpha) = a_0 + a_1(\alpha - x_0) + a_2(\alpha - x_0)(\alpha - x_1) + \ldots + a_n(\alpha - x_0)(\alpha - x_1)\ldots(\alpha - x_{n-1})$$

Po úpravě:

$$N_n(\alpha) = a_0 + (\alpha - x_0)\Big[a_1 + (\alpha - x_1)\big[a_2 + (\alpha - x_2)[a_3 + \ldots]\big]\Big]$$

Poznámka

Chceme-li vypočítat pouze hodnotu polynomu $N_n(\alpha)$ v bodě α za co nejmenšího počtu operací a nepotřebujeme-li koeficienty a_i, použijeme tzv. **Nevilleův algoritmus**. Princip je podobný jako v algoritmu pro určení koeficientů Newtonova polynomu.

Nevilleův algoritmus:

1. $P_{i,0} = f(x_i); \qquad i = 0, 1, \ldots, n$
2. $P_{i,k} = P_{i,k-1} + (\alpha - x_i)\dfrac{P_{i,k-1} - P_{i-1,k-1}}{x_i - x_{i-k}};$
3. $N_n(\alpha) = P_{nn}$

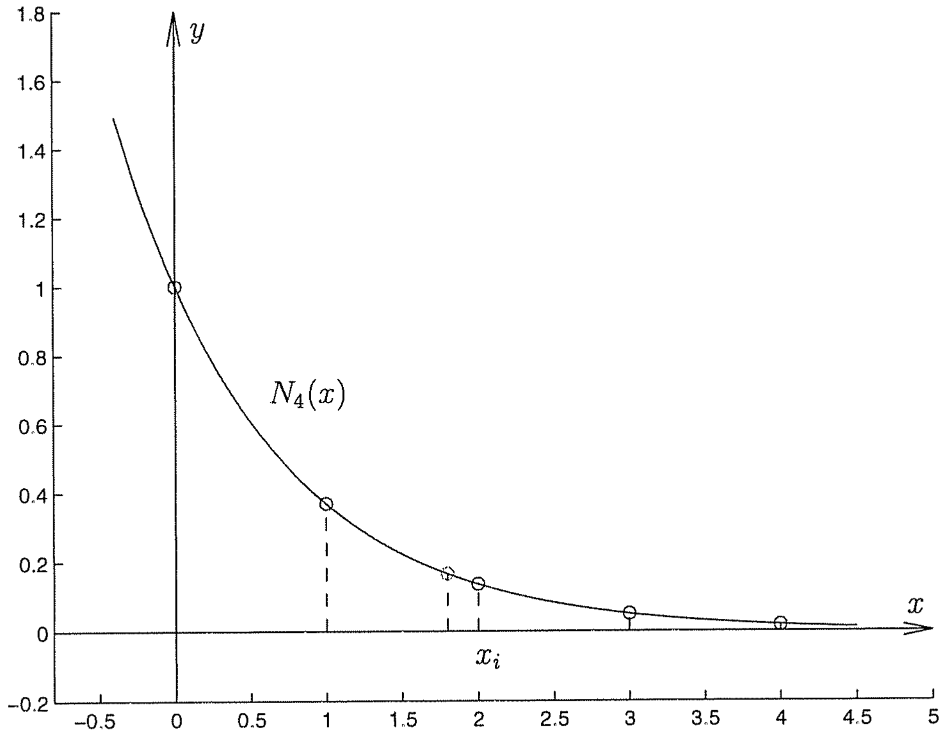
Příklad: Vypočtěte $f(1,8)$, kde funkce $f(x)$ je dána tabulkou:

x_i	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	1,0000	0,36788	0,13534	0,04979	0,01832

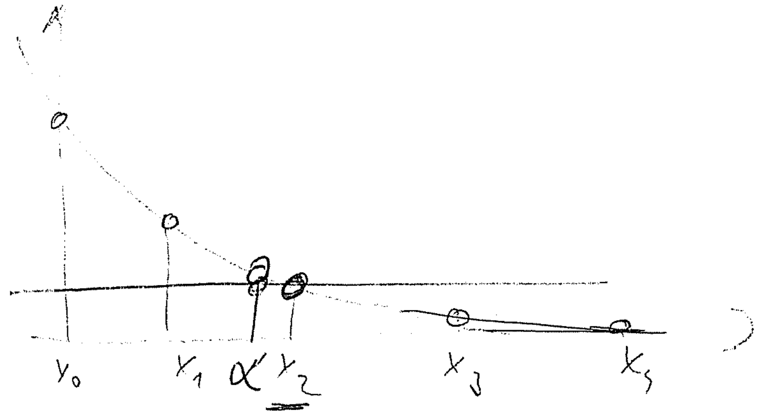
Řešení: Uzly x_i je výhodné uspořádat podle rostoucí vzdálenosti od bodu α, v němž chceme stanovit přibližnou hodnotu funce $f(x)$ – podle rozdílu hodnot $P_{i,i}$ a $P_{i-1,i-1}$ $i = 1, \ldots, n$ lze rozhodnout o předčasném ukončení Nevillova algoritmu, popř. o vhodnosti interpolace pomocí $N_n(x)$.

Nevillovo schéma:

$\lvert\alpha - x_i\rvert$	x_i	$f(x_i)$				
0,2	2	**0,13534**				
0,8	1	0,36788	**0,18185**			
1,2	3	0,04979	0,24064	**0,17009**		
1,8	0	1,00000	0,42987	0,08926	**0,16201**	
2,2	4	0,01832	0,55824	0,27583	0,13901	**0,16431**



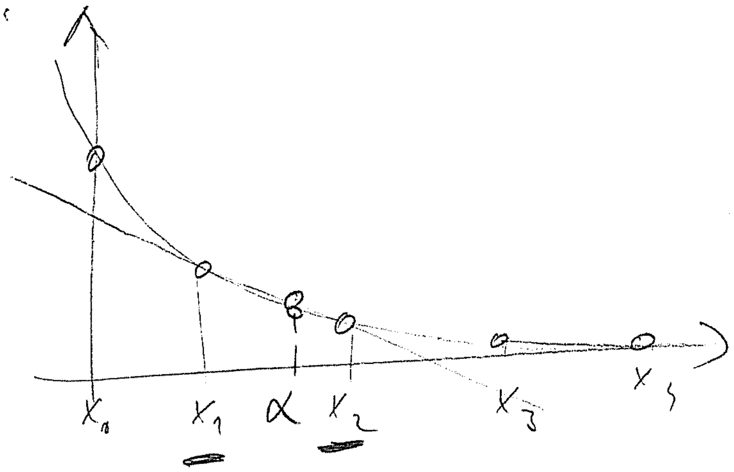
= 1 řádek :



aproximace polynomem 0. řádu

konstanta

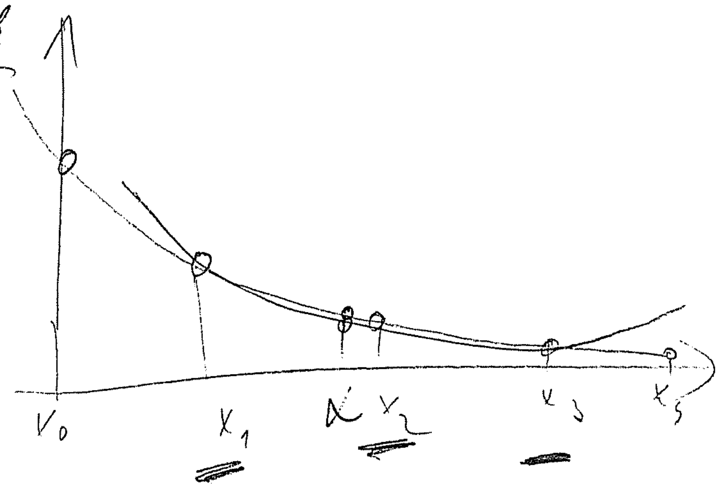
2 řádek :



aproximace polynomem 1. řádu

lin. fce

3. řádek



aproximace polynomem 2. řádu

kvadr. fce

atd.