SLAR – PŘÍMÉ METODY

Gaussova eliminacni- metoda pro reseni soustavy Ax=b, kde

A =

1	3	1	6
8	26	14	50
3	16	26	39
3	15	22	33

b =

34
302
269
231

1	3	1	6	34
0	2	6	2	30
0	7	23	21	167
0	6	19	15	129

1	3	1	6	34
0	2	6	2	30
0	0	2	14	62
0	0	1	9	39

1	3	1	6	34
0	2	6	2	30
0	0	2	14	62
0	0	0	2	8

x =

1
2
3
4

Gaussova eliminacni - metoda pro reseni soustavy Ax=b, kde

```
A =
     3     2    13     3
     2     4     7     9
     7    11     3     5
    13     4     1     8

b =
    58
    67
    58
    56

   1.0e+02 *

   0.03000000000000   0.02000000000000   0.13000000000000   0.03000000000000
                  0   0.02666666666667  -0.01666666666667   0.07000000000000
                  0   0.06333333333333  -0.27333333333333  -0.02000000000000
                  0  -0.04666666666667  -0.55333333333333  -0.05000000000000

   0.58000000000000
   0.28333333333333
  -0.77333333333333
  -1.95333333333333

   1.0e+02 *

   0.03000000000000   0.02000000000000   0.13000000000000   0.03000000000000
                  0   0.02666666666667  -0.01666666666667   0.07000000000000
                  0                  0  -0.23375000000000  -0.18625000000000
                  0                  0  -0.58250000000000   0.07250000000000

   0.58000000000000
   0.28333333333333
  -1.44625000000000
  -1.45750000000000

   1.0e+02 *

   0.03000000000000   0.02000000000000   0.13000000000000   0.03000000000000
                  0   0.02666666666667  -0.01666666666667   0.07000000000000
                  0                  0  -0.23375000000000  -0.18625000000000
                  0                  0                  0   0.53663101604278

   0.58000000000000
   0.28333333333333
  -1.44625000000000
   2.14652406417112

x =
   1.00000000000000
   2.00000000000000
   3.00000000000000
   4.00000000000000
```

```
Gaussova eliminacni - metoda pro reseni soustavy  Ax=b, kde

A =
     1     2     3     4
     2     4     1     5
     3     4     5     7
     1     8     4     2

b =
    30
    33
    54
    37


     1     2     3     4    30
     0     0    -5    -3   -27
     0    -2    -4    -5   -36
     0     6     1    -2     7

Warning: Divide by zero.
> In gem at 15
Warning: Divide by zero.
> In gem at 15


     1     2     3     4    30
     0     0    -5    -3   -27
     0     0  -Inf  -Inf  -Inf
     0     0   Inf   Inf   Inf

reseni =
     1
     2
     3
     4

A*reseni=
    30
    33
    54
    37

A ... regularni !
```

```
Gaussova eliminacni - metoda se sloupcovou pivotaci-
pro reseni soustavy  Ax=b, kde

A =
     1     2     3     4
     2     4     1     5
     3     4     5     7
     1     8     4     2

b =
    30
    33
    54
    37

v 1. kroku GEM
                3. radek menim s 1.

   3.00000000000000   4.00000000000000   5.00000000000000   7.00000000000000
                  0   1.33333333333333  -2.33333333333333   0.33333333333333
                  0   0.66666666666667   1.33333333333333   1.66666666666667
                  0   6.66666666666667   2.33333333333333  -0.33333333333333

  54.00000000000000
  -3.00000000000000
  12.00000000000000
  19.00000000000000

v 2. kroku GEM
                4. radek menim s 2.

   3.00000000000000   4.00000000000000   5.00000000000000   7.00000000000000
                  0   6.66666666666667   2.33333333333333  -0.33333333333333
                  0                  0   1.10000000000000   1.70000000000000
                  0                  0  -2.80000000000000   0.40000000000000

  54.00000000000000
  19.00000000000000
  10.10000000000000
  -6.80000000000000

v 3. kroku GEM
                4. radek menim s 3.

   3.00000000000000   4.00000000000000   5.00000000000000   7.00000000000000
                  0   6.66666666666667   2.33333333333333  -0.33333333333333
                  0                  0  -2.80000000000000   0.40000000000000
                  0                  0                  0   1.85714285714286

  54.00000000000000
  19.00000000000000
  -6.80000000000000
   7.42857142857143

x =
   1.00000000000000
   2.00000000000000
   3.00000000000000
   4.00000000000000
```

2/ Metoda LU rozkladu

$A = L \cdot U$ $\quad$ L ... dolní Δ s 1 na diagonále

$\quad\quad\quad\quad$ U ... horní ∇

$Ax = b \rightarrow L\underbrace{Ux}_{\text{označ } y} = b$

1/ $Ly = b$

2/ $Ux = y$

Význam: u řešení více soustav stačí zpětný chod

Pozn. (LU rozklad = GEM)

Příklad: Proveďte LU rozklad matice A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & 13 & 19 \\ 6 & 27 & 50 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}}_{U}$$

algoritmus (po řádcích) $\quad$ ((po sloupcích) ↳ 2há varianta)

1ř × 1s $\quad 1 \cdot u_{11} = 2 \quad \boxed{u_{11} = 2}$

1ř × 2s $\quad 1 \cdot u_{12} = 5 \quad \boxed{u_{12} = 5}$

1ř × 3s $\quad 1 \cdot u_{13} = 6 \quad \boxed{u_{13} = 6}$

2ř × 1s $\quad l_{21} \cdot u_{11} = 4 \rightarrow \boxed{l_{21} = 2}$

2ř × 2s $\quad \overset{2}{l_{21}} \cdot \overset{5}{u_{12}} + 1 \cdot u_{22} = 13 \rightarrow \boxed{u_{22} = 3}$

2ř × 3s $\quad \overset{2}{l_{21}} \cdot \overset{6}{u_{13}} + 1 \cdot u_{23} = 19 \rightarrow \boxed{u_{23} = 7}$

3ř × 1s $\quad l_{31} \cdot u_{11} = 6 \rightarrow \boxed{l_{31} = 3}$

3ř × 2s $\quad \underset{3}{l_{31}} \cdot \underset{5}{u_{12}} + l_{32} \cdot \underset{3}{u_{22}} = 27 \rightarrow \boxed{l_{32} = 4}$

3ř × 3s $\quad \overset{3}{l_{31}} \cdot \overset{6}{u_{13}} + \overset{4}{l_{32}} \cdot \overset{7}{u_{23}} + u_{33} = 50 \quad \boxed{u_{33} = 4}$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

NM 3

Příklad metodou LU rozkladu řešte :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 6 & 13 \\ 4 & 13 & 19 & 36 \\ 6 & 27 & 50 & 83 \end{array}\right)$$

1/ $\mathbb{L}y = b$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 13 \\ 2 & 1 & 0 & 36 \\ 3 & 4 & 1 & 83 \end{array}\right) \rightarrow y = \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2/ $\mathbb{U}x = y$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 6 & 13 \\ 0 & 3 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ALGORITMUS

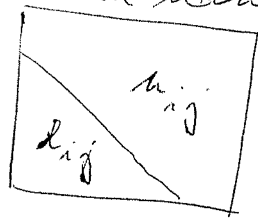
```
% Metoda LU rozkladu

u=zeros(size(a));
l=eye(size(a));

n=size(a,1);
for j=1:n
  for i=1:j
    pom=0;
    for r=1:i-1
      pom=pom+l(i,r)*u(r,j);
    end;
    u(i,j)=a(i,j)-pom;
  end;
  for i=j+1:n
    pom=0;
    for s=1:j-1
      pom=pom+l(i,s)*u(s,j);
    end;
    l(i,j)=(a(i,j)-pom)/u(j,j);
   end;
 end;
```

Z důvodu šetření paměti lze ukládal hodnoty l_{ij} a u_{ij} zpět do matice A protože se dále nepoužívají.

Ve výsledné matici budou uloženy tyto ~~čísla~~ hodnoty:



Víme, že $l_{ii} = 1$.

Téma: Řešení maticových soustav $\quad A \cdot X = B$

Př:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \left| \underbrace{\begin{matrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{matrix}}_{B} \right.$$

a) $\left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}\right) \to X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}\right) \to X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} X_1 & X_2 \end{array}$$
$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ŘEŠENÍ NEDOURČENÝCH SOUSTAV

PŘÍKLAD

$$x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 10$$
$$x_2 - 2x_3 = -4$$

Tato soustava má nekonečně mnoho řešení. Abychom mohli stanovit všechna řešení, musíme zvolit jednu složku x jako parametr.

maticově:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ŘEŠENÍ NA POČÍTAČI:

Sestavíme maticovou rovnici:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Výsledky:

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow u = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Závěr: Řešení původní soustavy je

$$x = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in R$$

Pozn.: V případě, že jde o nedourčenou soustavu s více než 1 volitelným parametrem, postupuje se analogicky:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 10 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 11 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$U = (u_1, u_2, u_3, u_4)$

$x = u_1 + \alpha u_2 + \beta u_3 + \gamma u_4$

$\alpha, \beta, \gamma \in R$

NM 3

ŘEŠENÍ PŘEURČENÝCH SOUSTAV

Je dána soustava $Ax = b$ $\qquad \underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times 1}{x}=\underset{m\times 1}{b}$

A je typu m/n; $m > n$, hodnost matice A předpokládáme n ($hod(A)=n$)

Tato soustava nelze řešit přesně !!!

Označme $r(x) = Ax - b$ – reziduum soustavy

Nyní budeme minimalizovat toto reziduum $r(x)$.

$$\min_{x\in R^n} r^T(x)\, r(x)$$

Nutná podmínka minima je, že derivace je nulová; tj

$$\operatorname{grad} r^T(x)\, r(x) = o$$

$$\operatorname{grad} r^T(x)\, r(x) = \operatorname{grad}(Ax-b)^T(Ax-b) = \operatorname{grad}(x^TA^T-b^T)(Ax-b) =$$
$$= \operatorname{grad}(x^TA^TAx - x^TA^Tb - b^TAx + b^Tb) = 2A^TAx - 2A^Tb =$$
$$= 2A^TAx - 2A^Tb = o$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{A^TAx = A^Tb}$$

Místo původní soustavy lze vyřešit tuto soustavu. Ta už je jednoznačně řešitelná!

A^TA je typu $n/m \cdot m/n = n/n$
A^Tb je typu $n/m \cdot m/1 = n/1$
x –"– $n/1$

Pozn: Soustavu jsme řešili ve smyslu nejmenších reziduí.

PŘÍKLAD

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^Tb = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 14 & 6 & 15 \\ 6 & 3 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 14 & 6 & 15 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x_1 = \tfrac{1}{2}} \quad \boxed{x_2 = \tfrac{4}{3}}$$

Pozn: Samozřejmě, že zkouška nevyjde přesně ($r(x) \neq o$) $r = \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right)^T$

Řešení soustav v komplexním oboru

1/ modifikace metod s užitím kompl. čísel

2/ převod na soustavu v reálném oboru

$$(A+iC)(x+iy)=(b+id)$$

$$Ax - Cy = b$$
$$Cx + Ay = d$$

$$\begin{pmatrix} A & -C \\ C & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

x.. reálná část

y.. imaginární část

řešení $= x + iy$

Pozn.: nevýhoda je více paměti