Zpřesňující metody

Jako zástupce zpřesňujících metod si uvedeme **Newtonovu metodu**.

Nechť v intervalu $I = \langle a, b\rangle$ leží jediný jednoduchý kořen $\widehat{x}$ rovnice $f(x) = 0$. Jelikož mluvíme o zpřesňující metodě, předpokládáme, že máme zadánu nultou iteraci $x_0 \in I$, která je relativně blízko hledanému řešení. Vyjádříme Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0. Přitom předpokládáme, že existuje derivace funkce f.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2$$

Rovnici $f(x) = 0$ nahradíme lineární rovnicí

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

Ta má kořen

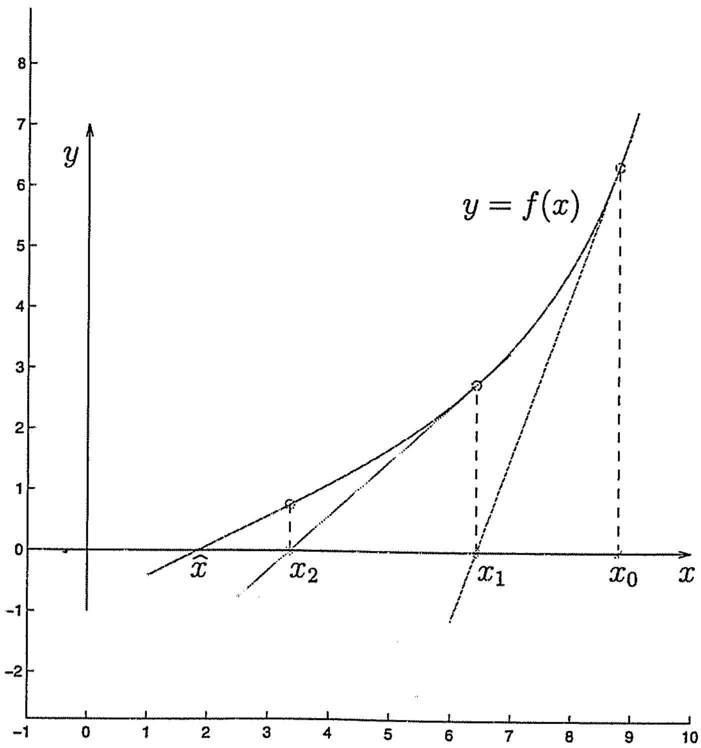
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Celý postup opakujeme a dostáváme iterační formuli

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Geometrický význam Newtonovy metody:

Křivku $y = f(x)$ nahradíme tečnou ke grafu v bodě x_k a hodnotu x_{k+1} získáme jako průsečík tečny s osou x. Proto se také Newtonova metoda nazývá **metoda tečen** nebo **metoda linearizace**.



Poznámka: Jako zastavovací podmínku lze volit $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ nebo $|f(x_k)| < \delta$.

Poznámka: Algoritmus Newtonovy metody je speciálním případem metody prosté iterace. Za funkci φ jsme volili funkci

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Newtonova metoda pro reseni nelinearni rovnice f(x)=0
pro pocatecni aproximaci x0=0.1 a zastavovaci podminku |x(k)-x(k-1)|<0.001

Funkce f(x) je zadana v souboru fce.m takto:

```
function out=fce(x);
out=sin(x)-x/2;
```

Derivace funkce f(x) je zadana v souboru der.m takto:

```
function out=der(x);
out=cos(x)-.5;
```

Newtonova metoda pro reseni nelinearni rovnice f(x)=0
pro pocatecni aproximaci x0=0.1 a zastavovaci podminku |x(k)-x(k-1)|<0.001

Funkce f(x) je zadana v souboru fce.m takto:

function out=fce(x);
out=sin(x)-x/2;

Derivace funkce f(x) je zadana v souboru der.m takto:

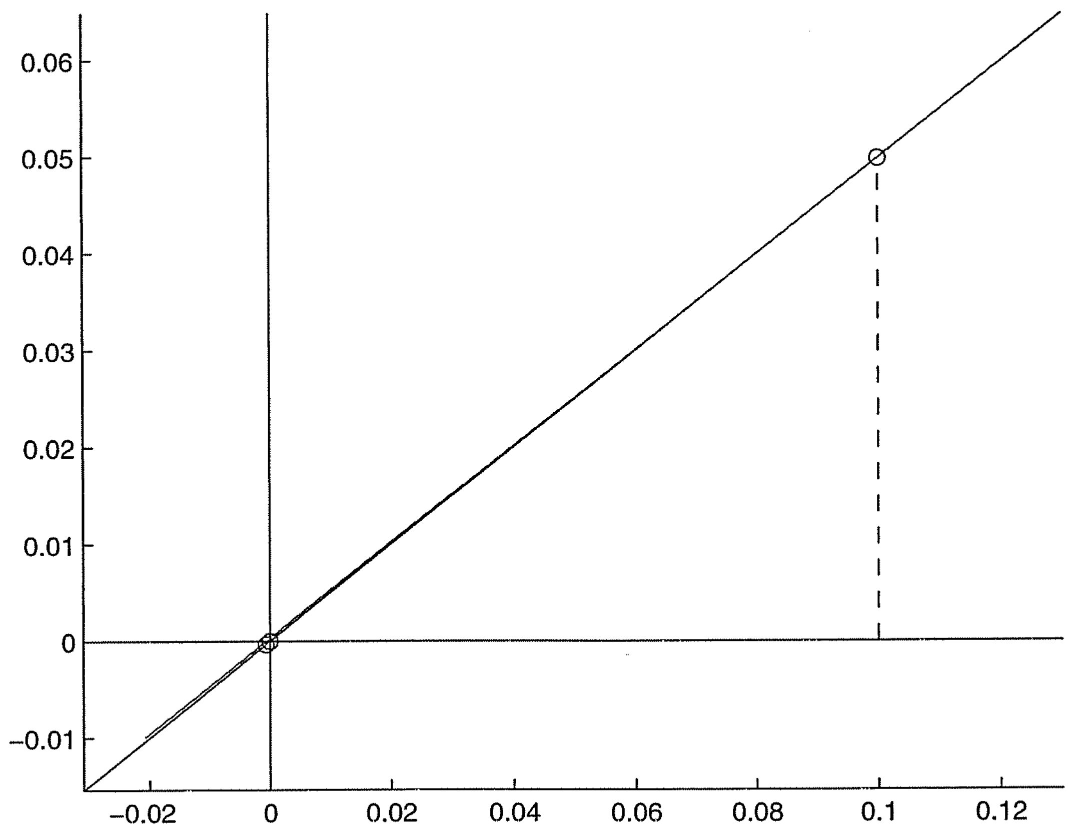
function out=der(x);

out=cos(x)-.5;

it	x(k)	f(x(k))	f'(x(k))	dx(k)=x(k)-x(k-1)
0	0.10000000	0.04983342	0.49500417	
1	-0.00067272	-0.00033636	0.49999977	0.10067272
2	0.00000000	0.00000000	0.50000000	0.00067272

```
ans =

   2.0296e-10
```



Newtonova metoda pro reseni nelinearni rovnice f(x)=0
pro pocatecni aproximaci x0=1 a zastavovaci podminku |x(k)-x(k-1)|<0.001

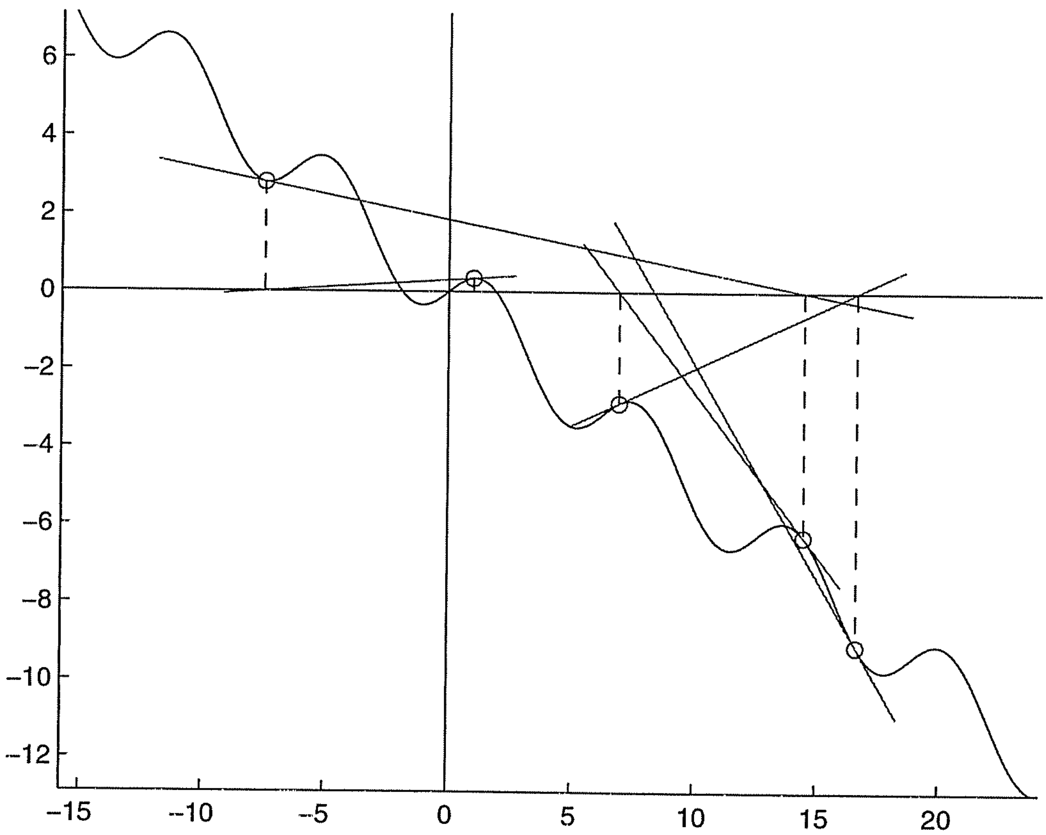
Funkce f(x) je zadana v souboru fce.m takto:

```
function out=fce(x);
out=sin(x)-x/2;
```

Derivace funkce f(x) je zadana v souboru der.m takto:

```
function out=der(x);
out=cos(x)-.5;
```

it	x(k)	f(x(k))	f'(x(k))	dx(k)=x(k)-x(k-1)
0	1.00000000	0.34147098	0.04030231	
1	-7.47274064	2.80816671	-0.12792735	8.47274064
2	14.47852098	-6.29695825	-0.83476332	21.95126162
3	6.93511541	-2.86083590	0.29491425	7.54340557
4	16.63568412	-9.11809737	-1.09965944	9.70056871
5	8.34393755	-3.28961517	-0.97058699	8.29174657
6	4.95463272	-3.44811855	-0.26011854	3.38930482
7	-8.30131800	3.24905650	-0.93256553	13.25595072



Pozn.: Zpřesňující metoda není zaručeně konvergentní.

Příklad: Pomocí Newtonovy metody najděte řešení rovnice

$$f(x) \equiv x^2 - 4x + 4 = 0.$$

Počáteční aproximaci volte $x_0 = 0,1$ a pro zastavení použijte podmínku $|x_k - x_{k-1}| < 10^{-3}$.

Řešení: Opět je třeba vypočítat derivaci

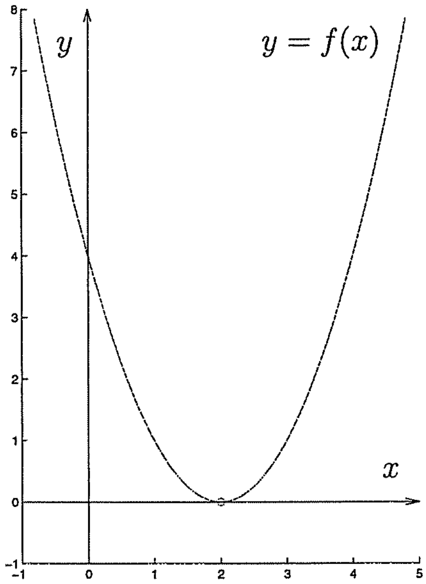
$$f'(x) = 2x - 4.$$

Iterační formule bude mít tvar

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 4x_k + 4}{2x_k - 4} = x_k - \frac{(x_k - 2)^2}{2(x_k - 2)} = x_k - \frac{1}{2}(x_k - 2) = \frac{1}{2}x_k + 1.$$

Výsledky opět zapíšeme do tabulky.

k	x_k
0	0,1
1	1,05
2	1,525
3	1,7625
4	1,8813
5	1,9406
6	1,9703
7	1,9852
8	1,9926



□

Tento příklad ukázal, že v některých situacích je Newtonova metoda mnohem pomalejší. Z obrázku se dá usoudit, kdy tyto situace nastanou. Hodnota derivace funkce f v bodě $\widehat{x} = 2$, který je řešením rovnice $f(x) = 0$, je rovna nule. Graf funkce f se osy x pouze dotkl. To odpovídá faktu, že kořen $\widehat{x} = 2$ je dvojnásobným kořenem dané rovnice. Je-li hodnota derivace f' na okolí kořene rovna 0, případně velmi blízká 0, potom se v iteračním formuli dělí nulou, případně velmi malým číslem. Tento fakt má za následek zpomalení algoritmu.

Podívejme se zpět na předpoklady, za nichž jsme odvodili Newtonovu metodu. Předpokládali jsme, že hledaný kořen je jediný (jeho násobnost je 1). Za tohoto předpokladu konverguje Newtonova metoda rychle. Při zadání úkolu, ale nemusíme být schopní poznat, že násobnost hledaného kořene je větší než 1. Problém s hledáním násobného kořene můžeme elegantně vyřešit tímto způsobem:

Je-li $\widehat{x}$ n-násobným kořenem rovnice $f(x) = 0$, potom je $\widehat{x}$ také $(n-1)$-násobným kořenem rovnice $f'(x) = 0$ a tedy jednoduchým kořenem rovnice

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = 0.$$

Poznámka: Dosud jsme řešili nelineární rovnici pouze v $\mathbb{R}$. Algoritmus Newtonovy metody můžeme použít i pro řešení dané rovnice v oboru komplexních čísel.

Příklad: Newtonovou metodou řešte v komplexním oboru rovnici

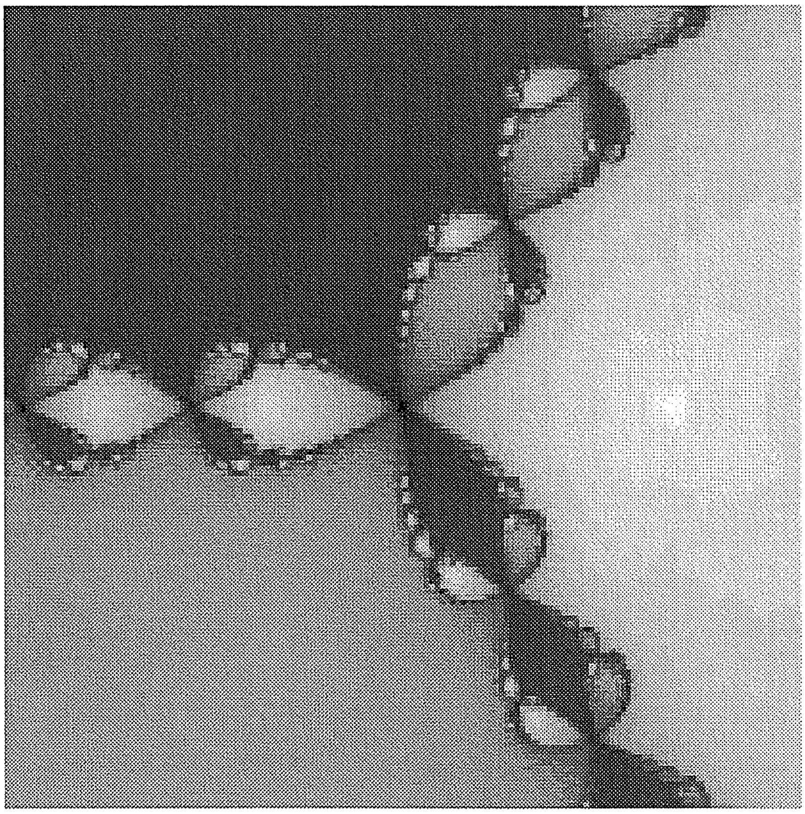
$$z^3 - 1 = 0, \qquad z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Iterační formule bude mít tvar

$$z_{k+1} = z_k - \frac{z_k^3 - 1}{2z_k^2}$$

Je zřejmé, že daná rovnice bude mít 3 řešení: $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ a $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Řešíme-li danou rovnici Newtonovou metodou pro konkrétní počáteční aproximaci ze čtverce $\langle -1.5; 1.5\rangle \times \langle -1.5; 1.5\rangle$, dostaneme jedno ze tří uvedených řešení. Obarvíme-li bod představující počáteční aproximaci různou barvou, podle toho k jakému řešení dospějeme, získáme fraktálovou strukturu.



□

Více na http://cam.ncu.cz/~danek/galerie/fractaly/WWW.Gallery.c.shtml

Poznámka: Na závěr si uvědomme nevýhody Newtonovy metody

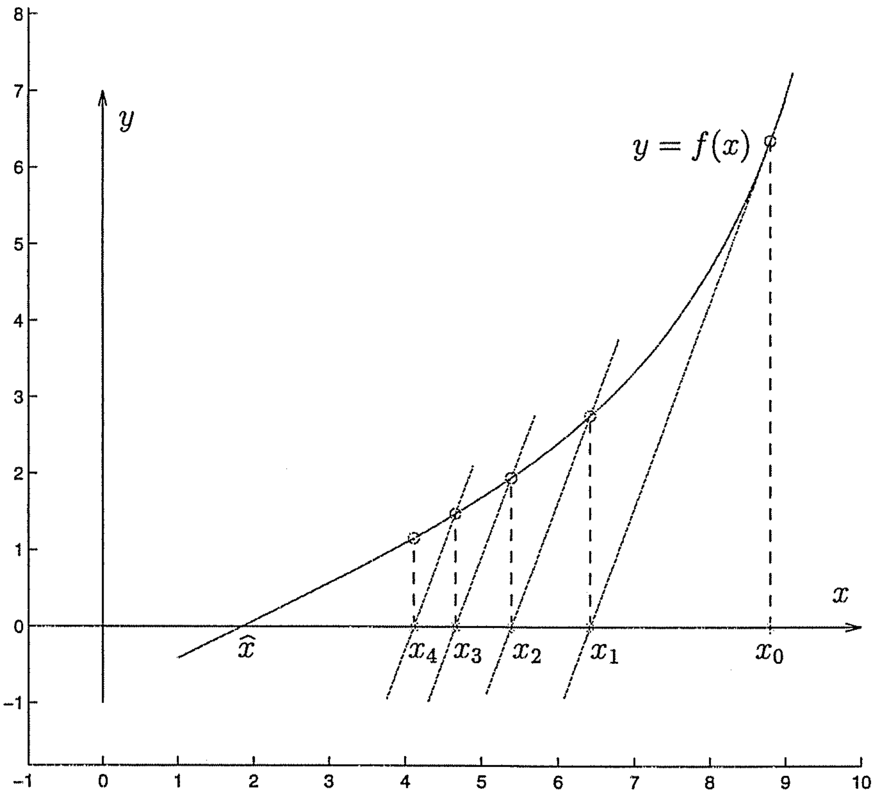
- zadaná funkce f musí být diferencovatelná
- derivace se přímo vyskytuje v iterační formuli
- v každé iteraci musíme kromě funkční hodnoty počítat také hodnotu derivace

Pro odbourání poslední vlastnosti můžeme za předpokladu, že se derivace f' na okolí kořene příliš nemění, Newtonovu metodu modifikovat tak, že hodnotu derivace vypočteme pouze jednou v bodě x_0 a položíme $f'(x_k) \approx f(x_0)$. Dostaneme iterační formuli

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}$$

Geometrický význam modifikované Newtonovy metody

Tečny ke grafu v bodech $[x_k, f(x_k)]$ nahrazujeme přímkami rovnoběžnými s tečnou ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $[x_0, f(x_0)]$.

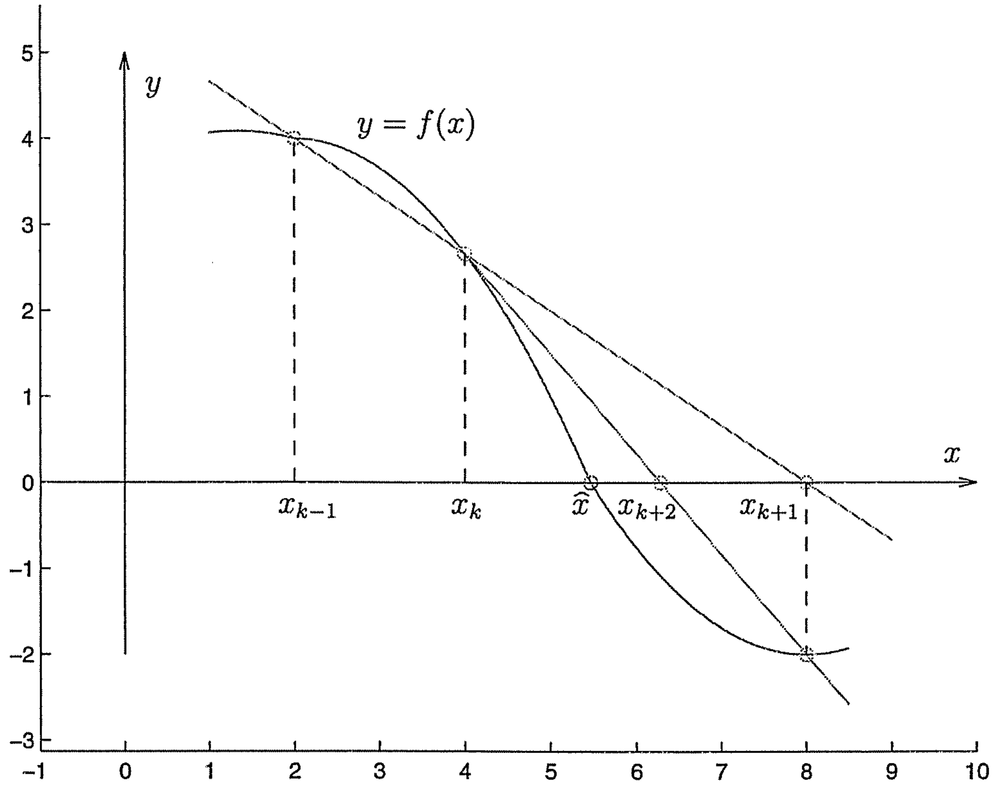


Poznámka: V této modifikaci počítáme pouze jednu hodnotu derivace $f'(x_0)$, a proto je tento postup vhodný je-li derivace $f'(x)$ složitá. Nemění-li $f'(x)$ a $f''(x)$ znaménko, je možné dokázat konvergenci této metody.

Chceme-li modifikovat Newtonovu metodu pro funkce, které nejsou diferencovatelné, nahradíme v iterační formuli derivaci $f'(x_k)$ diferenčním podílem $\dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$. Získáme tzv. **metodu sečen**.

Geometrický význam metody sečen

Mějme dvě dobré aproximace x_{k-1} a x_k kořene x rovnice $f(x) = 0$. Křivku $y = f(x)$ nahradíme přímkou (sečnou), která prochází body $[x_{k-1}, f(x_{k-1})]$ a $[x_k, f(x_k)]$. Další iteraci x_{k+1} získáme jako průsečík sečny s osou x.



Poznámka: Pro zahájení výpočtu potřebujeme znát dvě počáteční aproximace, ale na rozdíl od Newtonovy metody počítáme v každém kroku pouze jednu novou funkční hodnotu, což je úspora času.

Poznámka: Metoda sečen má obdobný algoritmus jako metoda regula falsi, ovšem nepožadujeme splnění podmínky $f(x_{k-1}).f(x_k) < 0$.

Poznámka: Metoda sečen je tzv. dvoukroková interpolační metoda, analogicky lze odvodit tříkrokovou interpolační metodu, kterou nazýváme **Mullerova metoda**.

```
Metoda secen pro reseni nelinearni rovnice f(x)=0
pro pocatecni aproximace x0=1, x1=1.2
a zastavovaci podminku |x(k)-x(k-1)|<0.001

Funkce f(x) je zadana v souboru fce.m takto:
function out=fce(x);
out=x^3+3*x^2+x-6;

| iterace |        x(k)        |      f(x(k))      | dx(k)=x(k)-x(k-1) |
------------------------------------------------------------------------
|       0 |     1.00000000     |     -1.00000000   |                   |
|       1 |     1.20000000     |      1.24800000   |       0.20000000  |
|       2 |     1.08896797     |     -0.06212428   |       0.11103203  |
|       3 |     1.09423296     |     -0.00355456   |       0.00526498  |
|       4 |     1.09455249     |      0.00001120   |       0.00031953  |
>>
```

ZASTAVOVACÍ PODMÍNKY

1. PŘÍKLAD

```
Newtonova metoda pro reseni nelinearni rovnice f(x)=0
pro pocatecni aproximaci x0=5 a zastavovaci podminku |x(k)-x(k-1)|<0.0001
```

$|f(x(k))| < 0.0001$

```
Funkce f(x) je zadana v souboru fce.m takto:
function out=fce(x);
out=atan(x+40)-1.55;

Derivace funkce f(x) je zadana v souboru der.m takto:
function out=der(x);
out=1/(1+(x+40)^2);
```

it	x(k)	f(x(k))	f'(x(k))	dx(k)=x(k)-x(k-1)
0	5.00000000	-0.00142224	0.00049358	
1	7.88145527	-0.00008555	0.00043599	2.88145527
2	8.07767541	-0.00000035	0.00043244	0.19622014
3	8.07848247	-0.00000000	0.00043242	0.00080706
4	8.07848248	0.00000000	0.00043242	0.00000001

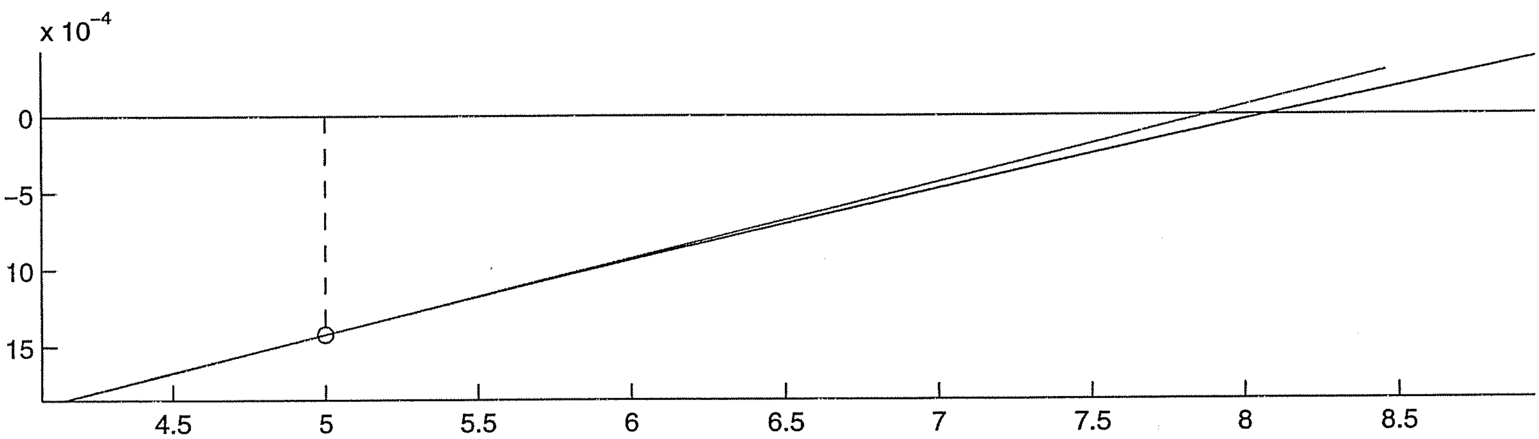
```
ans =

    8.0785

>>
```

→ chyba $|x_1 - \alpha| \approx 0{,}197$

→ chyba $|x_4 - \alpha| \lessapprox 10^{-9}$



2. PŘÍKLAD

```
Metoda secen pro reseni nelinearni rovnice f(x)=0
pro pocatecni aproximace x0=3, x1=2
a zastavovaci podminku |x(k)-x(k-1)|<
```
~~[illegible]~~ 0,01 $\qquad |f(x(k))| < 0{,}01$

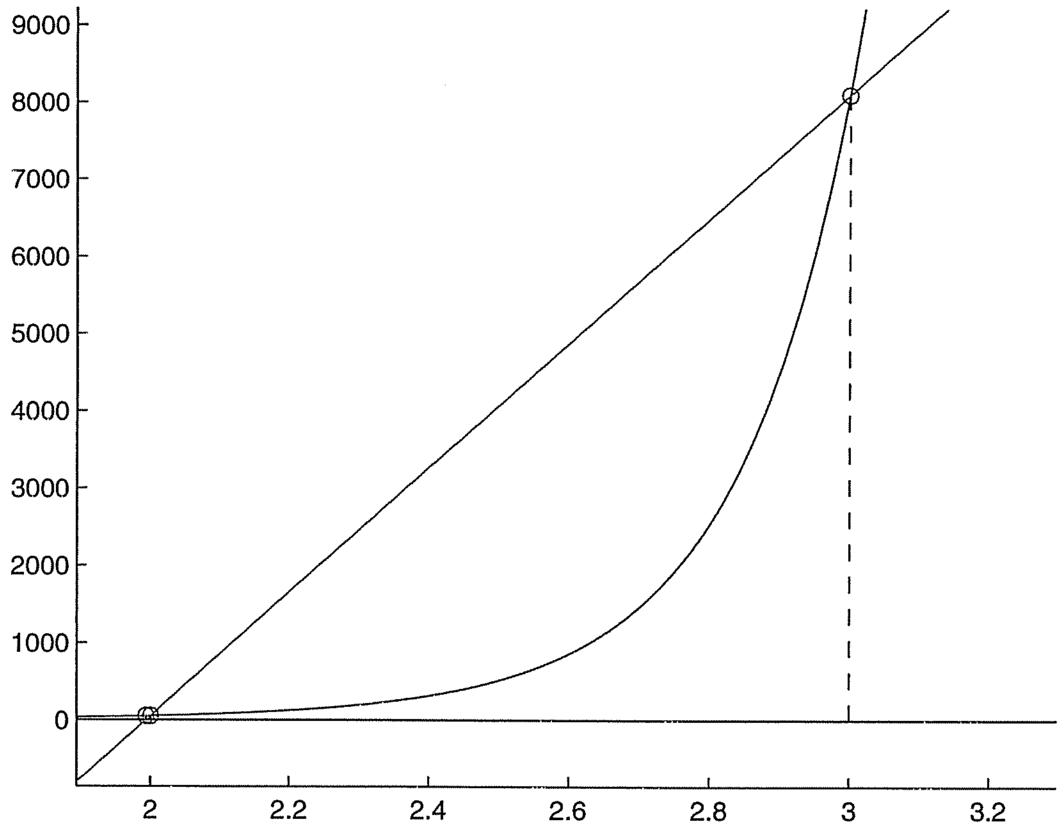
```
Funkce f(x) je zadana v souboru fce.m takto:
function out=fce(x);
out=exp(x^2)-1;
```

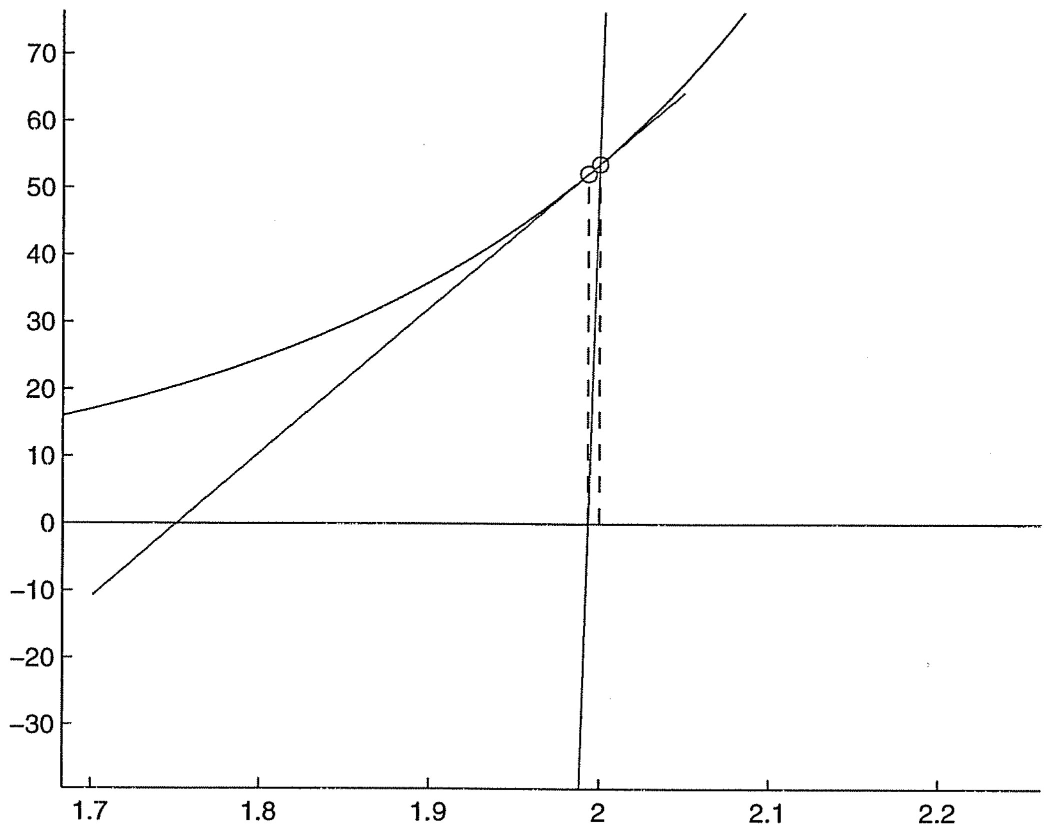
iterace	x(k)	f(x(k))	dx(k)=x(k)-x(k-1)
0	3.00000000	8102.08392758	
1	2.00000000	53.59815003	1.00000000
2	1.99334059	52.16534190	0.00665941
3	1.75088643	20.44739731	0.24245416
4	1.59458512	11.71397383	0.15630132
5	1.38494115	5.80775215	0.20964397
6	1.17879240	3.01304990	0.20614875
7	0.95653743	1.49668502	0.22225497
8	0.73716696	0.72187726	0.21937047
9	0.53278264	0.32824343	0.20438432
10	0.36235061	0.14030751	0.17043203
11	0.23511101	0.05683352	0.12723960
12	0.14847955	0.02229099	0.08663146
13	0.09257452	0.00860687	0.05590503
14	0.05741206	0.00330158	0.03516246
15	0.03552978	0.00126316	0.02188228
16	0.02196983	0.00048279	0.01355995
17	0.01358075	0.00018445	0.00838908
18	0.00839399	0.00007046	0.00518676
19	0.00518792	0.00002691	0.00320607
20	0.00320635	0.00001028	0.00198157

přesné řešení $\alpha = 0$

chyba $|x_2 - \alpha| = x_2 \approx 1{,}99$

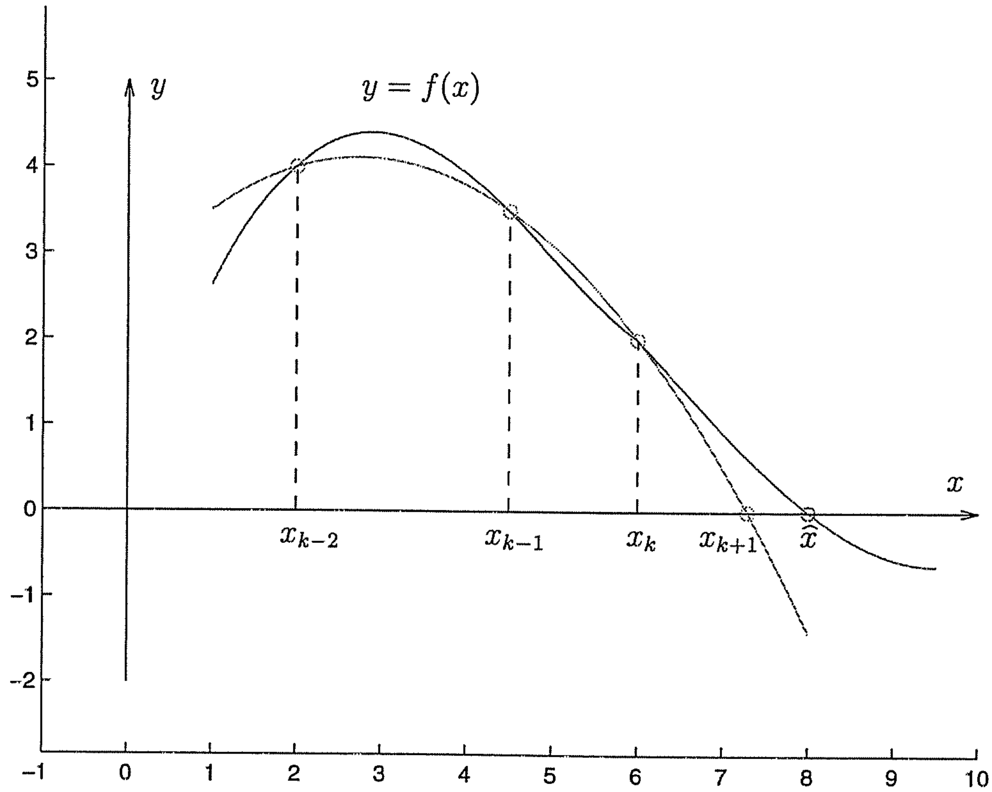
chyba $|x_{13} - \alpha| = x_{13} \approx 0{,}09$


9000
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
2
2.2
2.4
2.6
2.8
3
3.2


70
60
50
40
30
20
10
0
−10
−20
−30
1.7
1.8
1.9
2
2.1
2.2

Geometrický význam Mullerovy metody

Mějme tři dobré aproximace x_{k-2}, x_{k-1} a x_k kořene x rovnice $f(x) = 0$.
Křivku $y = f(x)$ nahradíme parabolou (kvadratickou funkcí), která prochází body $[x_{k-2}, f(x_{k-2})]$ $[x_{k-1}, f(x_{k-1})]$ a $[x_k, f(x_k)]$.
Další iteraci x_{k+1} získáme jako průsečík paraboly s osou x.
(Ten, který je blíže k x_k.)



Prostředky matlabu pro řešení nelineárních rovnic (viz help v matlabu)

`fzero`	pro obecnou nelineární rovnici
`roots`	pro kořeny polynomu