NELINEÁRNÍ ROVNICE

Formulace:

Je dána funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$. Hledáme číslo x z intervalu $\langle a, b\rangle$ tak, aby platila rovnost $f(x) = 0$. Číslo x nazveme **řešení** nebo **kořen rovnice**).

Poznámka:

Najít přesné řešení analyticky je možné jen ve velmi jednoduchých případech, např. při řešení lineární rovnice $12x - 3 = 0$, při řešení kvadratické rovnice $4x^2 - 5x + 8 = 0$ nebo např. při řešení rovnice $\sin 5x = \pi$. Proto je nutné pro nalezení kořenů použít nějakou numerickou metodu.

Numerické metody, kterými se budeme zabývat jsou založeny na **iteračních principech**. Pro každou iterační metodu nás budou zajímat odpovědi na dvě otázky:

- Konverguje posloupnost iterací ke hledanému kořenu?
- Jestliže ano, jak rychle?

Jestliže nemáme předběžné informace opoloze kořene, víme pouze, že leží v určitém intervalu $\langle a, b\rangle$, užijeme k výpočtu takové iterační metody, jejíž konvergence nezávisí na volbě počáteční aproximace. Tyto tzv. *vždy konvergentní metody* mají většinou tu nevýhodu, že konvergují pomalu, a hodí se tedy především k určení takové aproximace kořene, která může být použita jako počáteční aproximace pro nějakou rychleji konvergující metodu. Konvergence takové „lepší" metody už může silně záviset na tom, jak dobrá je tato počáteční aproximace, a na vlastnostech funkce f v okolí kořene. Je tedy rozumné rozdělit metody řešení nelineárních rovnic na:

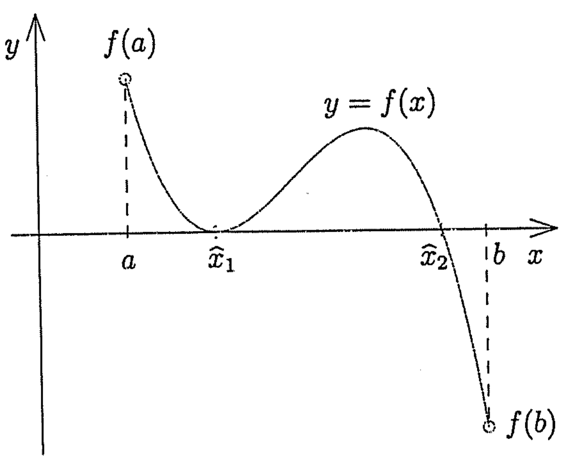
- startovací metody (vždy konvergentní metody)
- zpřesňující metody
- speciální metody (např. pro polymomy)

Tímto rozdělením ovšem nechceme zdůraznit, že startovací metoda konverguje pomalu vždy a naopak, že zpřesňující metoda konverguje vždy rychle.

Poznamenejme, že vždy budeme předpokládat, že daná funkce f je v uvažovaném intervalu $\langle a, b\rangle$ **spojitá** neboť tento předpoklad je důležitý v následující větě.

Věta: Předpokládejme, že
(i) reálná funkce f je spojitá pro $x \in \langle a, b\rangle$,
(ii) $f(a).f(b) < 0$.
Potom existuje aspoň jedno řešení x rovnice $f(x) = 0$ na $\langle a, b\rangle$.

Větu ilustruje následující obrázek.



1 CVIČENÍ NELIN. ROV. ÚVOD

BISEKCE

ALG:
1) ZADÁNÍ: $\varepsilon > 0$, a, b, $f(x)$
2) $s = (a+b)/2$
3) IF $f(s) = 0$, $\hat{x} = s$ END
ELSE
IF $f(a) f(s) < 0$, $b = s$
ELSE $a = s$
4) IF $b - a \geq \varepsilon$, 2)
ELSE $\hat{x} = (a+b)/2$ END

REGULA FALSI

- řešte (3 iterace) $\cos^2(2x) - x^2 = 0$ na $\langle 0; 1{,}5 \rangle$

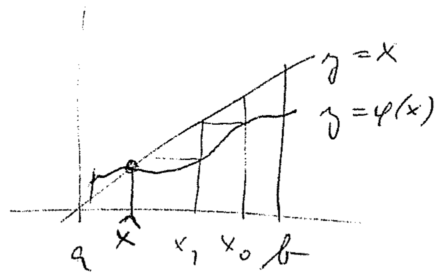
$$s = a - \frac{f(a) \cdot (b-a)}{f(b) - f(a)}$$

IT	a	b	$f(a)$	$f(b)$	s	$f(s)$
0	0	1,5	1	−1,26991	0,66082	−0,37587
1	0	0,66082	1	−0,37587	0,48029	0,0977
2	0,48029	0,66082	0,0977	−0,37587	0,51753	

PROSTÁ ITERACE (obecný princip)

$f(x) = 0 \longrightarrow x = \varphi(x)$

$y = x \quad y = \varphi(x)$



$$\boxed{x_{k+1} = \varphi(x_k)}$$

ALG:

1) zadáme $x_0 \in \langle a, b \rangle$, $\varepsilon > 0$

2) $x_{k+1} = \varphi(x_k)$

3) IF $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$, $\hat{x} = x_{k+1}$ END
ELSE 2)

PŘÍKLAD:

Metodou prosté iterace řešte rovnici

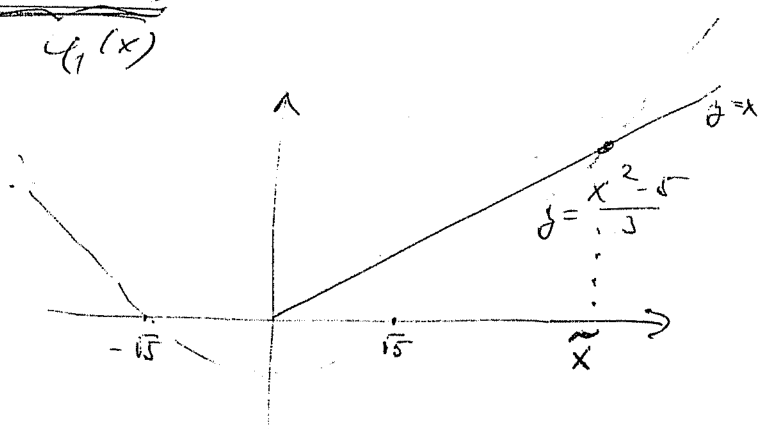
$$x^2 - 3x - 5 = 0 \qquad \text{na } \langle 0, 10 \rangle$$

s poč. volbou $x^0 = 5$. $\qquad \varepsilon = 0{,}01$

1 způsob: $\quad x^2 - 5 = 3x$

$$x = \underbrace{\frac{1}{3}(x^2 - 5)}_{\varphi_1(x)}$$

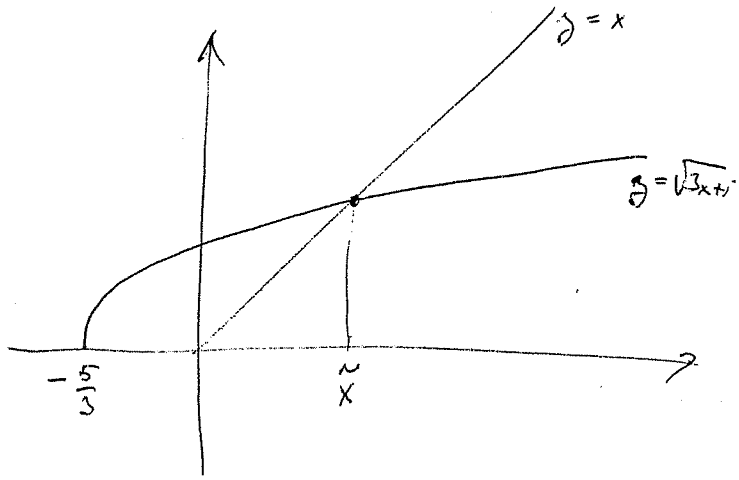
it. k	x^k
0	5
1	6,66666
2	13,14814
3	55,95793



2. způsob: $\quad x^2 = 3x + 5$

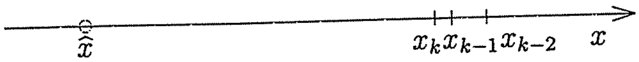
$$x = \underbrace{\pm\sqrt{3x+5}}_{\varphi_2(x)}$$

it. k	x^k
0	5
1	4,47213
2	4,29143
3	4,2278
4	4,2051
5	4,19708
⋮	



$$\tilde{x} \approx 4{,}19$$

Poznámka: Jak bylo řečeno hodnota rozdílu dvou po sobě jdoucích iterací neodpovídá obecně chybě přibližného řešení. Geometricky si to lze představit takto:



Nyní si bez důkazu uvedeme větu, která uvádí postačující podmínky konvergence metody prosté iterace.

Věta: (Postačující podmínky konvergence metody prosté iterace)
Předpokládejme, že je funkce φ na intervalu $I = \langle a, b\rangle$ spojitá a platí:

(a) $\forall x \in I : \varphi(x) \in I$ **(funkce φ zobrazuje I do sebe)**,

(b) $\exists q \in \langle 0, 1) : \; |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q|x - y| \quad \forall x, y \in I$ **(funkce φ je kontrakce)**.

Potom

1) v intervalu I existuje právě jeden kořen x rovnice $x = \varphi(x)$,

2) posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ určená formulí $x_k = \varphi(x_{k-1})$ konverguje pro každé $x_0 \in I$ a $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$.

Poznámka: Pro diferencovatelnou funkci φ lze podmínku (b) nahradit podmínkou

(b') $\exists q \in \langle 0, 1) : \; |\varphi'(x)| \leq q \quad \forall x \in I$

Podívejme se na souvislost předpokladů předchozí věty a volby funkce φ v jednotlivých případech předchozího příkladu. . Všimněme si ještě jedné skutečnosti, v posledním případě konvergovala metoda prosté iterace viditelně rychleji než ve třetím případě. Bylo to způsobeno vlastností funkce φ. Z geometrické představy je zřejmé, že metoda bude konvergovat rychleji, jestliže bude graf funkce φ „co nejvíce vodorovný“, tzn. $\varphi' \approx 0$. Skutečně rychlost konvergence metody prosté iterace charakterizuje $|\varphi'(x_k)|$, protože můžeme psát

$$\varphi'(x_k) \approx \frac{\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)}{x_{k+1} - x_k} = \frac{x_{k+2} - x_{k+1}}{x_{k+1} - x_k}.$$

Poznámka: Řešíme-li metodou prosté iterace algebraickou rovnici

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

je většinou vhodné vyjádřit x z nejvyšší mocniny, tj.

$$x = \underbrace{\sqrt[n]{-\frac{a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{a_n}}}_{\varphi(x)}$$

Pokud předpokládáme, že řešení je v abs. hodnotě větší než 1.

Odhad chyby metody prosté iterace

$$\boxed{|x_k - \alpha| \leq \frac{q}{1-q}\,|x_{k-1} - x_k|}$$

q … omezení $|\varphi'(x)|$

pokud $|x_{k-1} - x_k| < \varepsilon$

potom $|x_k - \alpha| \leq \dfrac{q\varepsilon}{1-q}$

VIZ PRVNÍ PŘÍKLAD NA PROSTOU ITERACI:

$$\boxed{\begin{array}{ll} x^2 - 3x - 5 = 0 & \langle 0, 10\rangle \\ x_0 = 5 & \\ x = \underbrace{\sqrt{3x+5}}_{\varphi(x)} & \end{array}}$$

$$\varphi(x) = (3x+5)^{\frac{1}{2}}$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2}(3x+5)^{-\frac{1}{2}}\cdot 3 = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3x+5}}$$

$3x+5$ … rostoucí, kladná

$\sqrt{3x+5}$ … —"— kladná

$\dfrac{1}{\sqrt{3x+5}}$ klesající, kladná

$$q = \max_{x\in\langle 0,10\rangle} |\varphi'(x)| = \varphi'(0) = \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{5}} \doteq 0{,}67$$

odhad chyby:

$$|x_5 - \alpha| \leq \frac{0{,}67 \cdot 0{,}01}{1-0{,}67} = 0{,}0203$$

Pozn: chyba v tomto případě > tolerance

2) Kdy se rovná tolerance ε přesné chybě?

$$\left[q = 0{,}5 \quad \Leftarrow \quad \frac{q}{1-q} = 1 \right]$$

Pozn:

- je-li $q = 0{,}01$

  Potom $\frac{q\,\varepsilon}{1-q} = \frac{0{,}01\,\varepsilon}{0{,}99} \approx 0{,}01\,\varepsilon$ ... odhad chyby

- je-li $q = 0{,}99$

  Potom $\frac{q\,\varepsilon}{1-q} = \frac{0{,}99\,\varepsilon}{0{,}01} = 99\,\varepsilon$ ... odhad chyby