Zkoušková písemná práce M2 / léto 2012

8,5

Jméno: JAN NOVÁK Hodnocení: ....

1. Uveďte příklad funkční posloupnosti $f_n(x)$ (předpisem a graficky), která konverguje stejnoměrně k funkci e^x pro všechna $x \in \mathbb{R}$. [1b.] ✓ 1

2. Uveďte příklad funkční posloupnosti $f_n(x)$ (předpisem a graficky), která diverguje v bodě $x = 0$. [1b.] ✓ 1

3. Uveďte příklad mocninné řady, jejímž oborem konvergence je $K = (0, 1)$. [1b.] ✓ 1

4. Uveďte příklad funkce f (předpisem nebo graficky), v jejímž Fourierově rozvoji na intervalu $(-\pi, \pi)$ je 5. sinový koeficient nulový, tj. $b_5 = 0$. [1b.] ? 0,5

5. Napište dvě různé parametrizace křivky $x = y^2$. [1b.] ✓ 0,5

6. Uveďte příklad funkce dvou proměnných (předpisem a graficky), pro kterou platí $\operatorname{grad} f(0,0) = [2,3]^t$. [1b.] ?✓ 1

7. Uveďte příklad **spojité** funkce dvou proměnných (předpisem nebo graficky), která není diferencovatelná v bodě $[4, 5]$. [1b.] ✓ 1

8. Transformujte do polárních souřadnic dvojný integrál $\iint_\Omega \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde [1b.] ✓ ? 1

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0\}.$$

9. Doplňte meze po záměně pořadí integrace: [1b.] ✓ 0,5

$$\int_{-1}^{1} \int_{1}^{2-x^2} f(x, y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

10. Vypočtěte dvojný integrál $\iint_\Omega xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je obdélník $(0, 2) \times (0, 3)$. [1b.] ✓ 1

① $f_n(x) \xrightarrow[\longrightarrow]{\mathbb{R}} e^x$

lim sup kritérium SK

$f_n(x) = \frac{n}{n+1} e^x$

$f_n(x) \xrightarrow[\longrightarrow]{M} f(x) \iff$

$f_n(x) = e^x$ - konstantní posl.

$\iff \lim_{n\to\infty} \sup_M |f_n(x) - f(x)| = 0$

② $f_n(x)$ diverguje v $x=0$

$f_n(x) = \frac{1}{x}$

③ mocninná řada, $k = (0,1)$

$R = \frac{1}{2}$

$x_0 = \frac{1}{2}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} \left(x - \frac{1}{2}\right)^n$$

$\sum \left(\frac{x-x_0}{R}\right)^n ; k = (;)$

$\sum \frac{1}{n} \left(\frac{x-x_0}{R}\right)^n ; k = \langle ;)$

$\sum \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{x-x_0}{R}\right)^n ; k = (; \rangle$

$\sum \frac{1}{n^2} \left(\frac{x-x_0}{R}\right)^n ; k = \langle ; \rangle$

$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ pol. konvergence

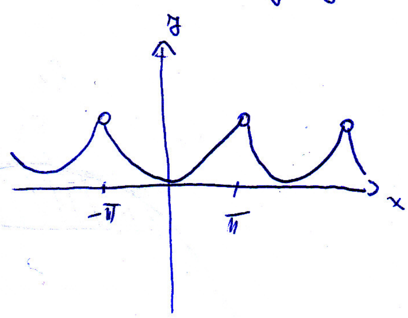
$k = (x_0 - R ; x_0 + R)$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n}} = 1$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$

④ funkce, v jejímž Fourierovy je $b_5 = 0$ (5. sin. koeficient nulový) $int(-\pi;\pi)$

$f(x) = x^2$



- sudá fce $\Rightarrow b_n = 0$ tedy i $b_5 = 0$

$\Rightarrow$ pouze cosinové koeficienty

FOURIEROVY ŘADY

- fce je integrovatelná na $\langle \alpha, \alpha+T \rangle$
- fce je periodická s periodou T

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cdot \cos n\omega x + b_n \cdot \sin n\omega x$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \cdot \cos n\omega x\, dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \cdot \sin n\omega x\, dx \quad , n \in N$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

POZN.:

- integrál liché fce přes symetrický interval je 0
- integrál sudé fce přes symetrický interval je 2x integrál fce přes poloviční interval

f - sudá $\Rightarrow b_n = 0 \;, \forall n \in N$
$(x^2, x^4, \dots)$

f - lichá $\Rightarrow a_n = 0, a_0 = 0 \;, \forall n \in N$
$(x^3, x^5, \dots)$

(5)

Parametrizace křivky $x = y^2$

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = s^2 \\ y = s \end{cases}$$

(6) $f(x,y)$: $\operatorname{grad} f(0,0) = [2,3]$

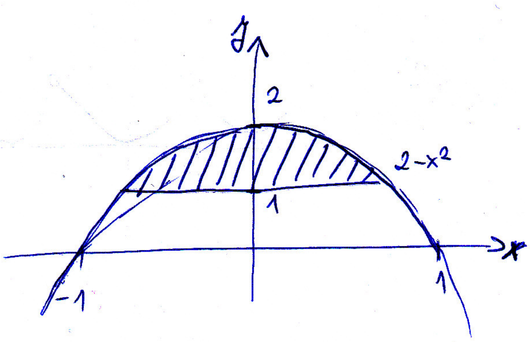
$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \boxed{f(x,y) = x^2 + 2x + 3y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0) = 2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0) = 3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3$$

(9)

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{1}^{2-x^2} f(x,y)\, dy\right) dx = \int_{1}^{2}\left(\int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\, dx\right) dy$$

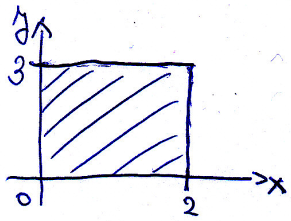


$y = 2 - x^2$

$x^2 = 2 - y \;/\sqrt{(\,)}$

$x = \pm\sqrt{2-y}$

(10) $$\iint\limits_{\langle 0,2\rangle\times\langle 0,3\rangle} xy\,dx\,dy = \int_0^3\left(\int_0^2 xy\,dx\right)dy = \int_0^3 \left[\frac{x^2}{2}y\right]_{x=0}^{x=2} dy = \int_0^3 2y\,dy = 2\cdot\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^3 =$$



$$= 2\cdot\left(\frac{9}{2}-0\right) = \underline{\underline{9}}$$

(7) $f(x,y)$ – spojitá

– není diferencovatelná v bodě $[4;5]$ $\Rightarrow$ <u>PROPADLÝ KŘÍŽ</u>

$$f(x,y) = \begin{cases} 10 & x\neq 4 \wedge y\neq 5 \\ 0 & x=4 \vee y=5 \end{cases}$$