Kapitola 9. Riemannův integrál v ¡s¿R¡sup¿n¡/sup¿¡/s¿

Definice 9.1. (integrální součet v ¡s¿R¡sup¿2¡/sup¿¡/s¿)

Nechť funkce f je *omezená* na obdélníku $Q = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$.

1. **Dělením** D obdélníka Q nazveme množinu všech $Q_{jk} := \langle x_{j-1}, x_j\rangle \times \langle y_{k-1}, y_k\rangle$, kde $D_x := \{x_0, \dots, x_r\}$ a $D_y := \{y_0, \dots, y_s\}$ jsou dělení intervalů $\langle a, b\rangle$ a $\langle c, d\rangle$.

2. **Normou dělení** D obdélníka Q rozumíme číslo
$$\nu(D) := \max_{j,k}\{\left\|\vec{\tilde{x}}_{jk}\right\|\}, \qquad \vec{\tilde{x}}_{jk} := (\Delta x_j, \Delta y_k).$$

3. **Dolní (horní) integrální součet** funkce f příslušný k dělení D definujeme
$$\begin{aligned}\underline{S}(f; D) &:= \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} \inf_{(x,y)\in Q_{jk}} f(x, y) \cdot \Delta x_j \Delta y_k,\\ \overline{S}(f; D) &:= \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} \sup_{(x,y)\in Q_{jk}} f(x, y) \cdot \Delta x_j \Delta y_k.\end{aligned}$$

4. **Integrálním součtem** funkce f odpovídající dělení D a výběru V rozumíme číslo
$$I(f; D, V) := \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} f(\xi_j, \eta_k) \cdot \Delta x_j \Delta y_k,$$
kde **výběr** V je množina všech bodů (ξ_j, η_k), $\xi_j \in \langle x_{j-1}, x_j\rangle$, $\eta_k \in \langle y_{k-1}, y_k\rangle$.

Věta 9.2. (Riemannův integrál v $\mathbb{R}^2$)

1. Nechť funkce f je *omezená* na obdélníku $Q = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$.
   Řekneme, že funkce f má **dvojný Riemannův integrál přes obdélník** Q, pokud

$$\iint\limits_Q f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y := \underline{\iint\limits_Q} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \overline{\iint\limits_Q} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

   kde

$$\overline{\iint\limits_Q} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad := \quad \inf_D \overline{S}(f;D) \quad \text{je \textbf{horní Riemannův integrál}},$$

$$\underline{\iint\limits_Q} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad := \quad \sup_D \underline{S}(f;D) \quad \text{je \textbf{dolní Riemannův integrál}}$$

2. Nechť f je *omezená* funkce na *omezené* oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.
   Dvojný Riemannův integrál přes oblast Ω je definován jako

$$\int\limits_\Omega f\,\mathrm{d}S := \iint\limits_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y := \iint\limits_Q g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

   kde $\Omega \subset Q$ a

$$g(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & \text{pro } (x,y) \in \Omega, \\ 0 & \text{pro } (x,y) \in Q \setminus \Omega. \end{cases}$$

3. Množinu všech funkcí f, k nimž existuje Riemannův integrál na Ω, tj. které jsou **riemannovsky integrovatelné** značíme $\mathcal{R}(\Omega)$ a píšeme $f \in \mathcal{R}(\Omega)$.

Věta 9.3. (měřitelnost a míra množiny)

Omezená množina $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá **měřitelná**, pokud je funkce $f(\vec{x}) \equiv 1$ integrovatelná na Ω. Hodnota integrálu

$$\mu(\Omega) = \int\limits_\Omega 1\,\mathrm{d}S$$

se nazývá **míra množiny** Ω. **Množina míry nula** je taková množina Ω, pro níž $\mu(\Omega) = 0$.

Věta 9.4. (postačující podmínka riemannovské integrovatelnosti)

Je-li f omezená funkce na měřitelné množině Ω, jejíž množina bodů nespojitosti má míru nula, potom $f \in \mathcal{R}(\Omega)$.

Věta 9.5. (skoro všude nulová funkce)

Funkce f je **skoro všude nulová**, pokud se liší od nulové funkce na množině míry nula.

Věta 9.6. (vlastnosti integrovatelných funkcí)

1. Nechť $f \in \mathcal{R}(\Omega_1)$, $f \in \mathcal{R}(\Omega_2)$ a $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Potom $f \in \mathcal{R}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ a platí
$$\int\limits_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f \ \mathrm{d}S = \int\limits_{\Omega_1} f \ \mathrm{d}S + \int\limits_{\Omega_2} f \ \mathrm{d}S.$$
2. Množina $\mathcal{R}(\Omega)$ je lineárním prostorem.
3. Jestliže $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ a $g \in \mathcal{R}(\Omega)$, potom $f \cdot g \in \mathcal{R}(\Omega)$.
4. Jestliže $f \in \mathcal{R}(\Omega)$, $g \in \mathcal{R}(\Omega)$ a $\forall \overrightarrow{x} \in \Omega: \ f(\overrightarrow{x}) \leq g(\overrightarrow{x})$, potom
$$\int\limits_{\Omega} f \ \mathrm{d}S \leq \int\limits_{\Omega} g \ \mathrm{d}S.$$
5. Jestliže $f \in \mathcal{R}(\Omega)$, potom $|f| \in \mathcal{R}(\Omega)$ a platí
$$\left| \int\limits_{\Omega} f \ \mathrm{d}S \right| \leq \int\limits_{\Omega} |f| \ \mathrm{d}S.$$
6. Jestliže $f, g \in \mathcal{R}(\Omega)$ a platí-li $\forall \overrightarrow{x} \in \Omega: \ g(\overrightarrow{x}) \geq 0 \ \wedge \ m \leq f(\overrightarrow{x}) \leq M$, potom existuje μ takové, že $m \leq \mu \leq M$ a platí
$$\int\limits_{\Omega} fg \ \mathrm{d}S = \mu \int\limits_{\Omega} g \ \mathrm{d}S.$$

Věta 9.7. (Fubiniova věta pro obdélník v $\mathbb{R}^2$)

Nechť $f \in \mathcal{R}(Q)$, $Q = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$.

1. Jestliže pro každé $y \in \langle c, d \rangle$ je $f(\cdot, y) \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$, potom platí
$$\iint\limits_{Q} f(x, y) \ \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int\limits_{c}^{d} \left(\int\limits_{a}^{b} f(x, y) \ \mathrm{d}x \right) \ \mathrm{d}y.$$
2. Jestliže pro každé $x \in \langle a, b \rangle$ je $f(x, \cdot) \in \mathcal{R}(\langle c, d \rangle)$, potom platí
$$\iint\limits_{Q} f(x, y) \ \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int\limits_{a}^{b} \left(\int\limits_{c}^{d} f(x, y) \ \mathrm{d}y \right) \ \mathrm{d}x.$$

Věta 9.8. **(Fubiniova věta pro oblast v $\mathbb{R}^2$)**

1. Nechť $f \in \mathcal{R}(\Omega)$, $y_1, y_2 \in C(\langle a, b\rangle)$,

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \le x \le b, \ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}.$$

Potom platí

$$\iint_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x,$$

pokud pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ existuje vnitřní integrál.

2. Nechť $f \in \mathcal{R}(\Omega)$, $x_1, x_2 \in C(\langle c, d\rangle)$,

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ c \le y \le d, \ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}.$$

Potom platí

$$\iint_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y,$$

pokud pro každé $y \in \langle c, d\rangle$ existuje vnitřní integrál.

Věta 9.9. **(Fubiniova věta pro oblast v $\mathbb{R}^3$)**

Nechť $f \in \mathcal{R}(\Omega)$, $z_1, z_2 \in C(\Omega_{xy})$, $\Omega_{xy} \subset \mathbb{R}^2$ měřitelná,

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, y) \in \Omega_{xy}, \ z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y)\}.$$

Potom platí

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \iint_{\Omega_{xy}} \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

pokud pro každé $(x, y) \in \Omega_{xy}$ existuje vnitřní integrál.

Věta 9.10. **(substituce ve dvojném integrálu)**

Nechť $\Omega_{\xi\eta} \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená měřitelná množina a nechť $\mathbf{\Phi} : \Omega_{\xi\eta} \to \mathbb{R}^2 : (\xi, \eta) \mapsto (x, y)$ je prosté regulární zobrazení na množinu $\Omega_{xy} \subset \mathbb{R}^2$.

Jestliže funkce $f : \Omega_{xy} \to \mathbb{R}$ je omezená a spojitá na Ω_{xy}, potom platí

$$\iint_{\Omega_{xy}} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \iint_{\Omega_{\xi\eta}} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) |\det J_{\mathbf{\Phi}}|\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta,$$

kde $J_{\mathbf{\Phi}}$ je Jacobiho matice zobrazení $\mathbf{\Phi}$.

Věta 9.11. **(substituce v trojném integrálu)**

Nechť $\Omega_{\xi\eta\zeta} \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená měřitelná množina a nechť $\mathbf{\Phi} : \Omega_{\xi\eta\zeta} \to \mathbb{R}^3 : (\xi, \eta, \zeta) \mapsto (x, y, z)$ je prosté regulární zobrazení na množinu $\Omega_{xyz} \subset \mathbb{R}^3$.

Jestliže funkce $f : \Omega_{xyz} \to \mathbb{R}$ je spojitá na Ω_{xyz}, potom platí

$$\iiint\limits_{\Omega_{xyz}} f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega_{\xi\eta\zeta}} f(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) |\det J_{\mathbf{\Phi}}|\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta\, \mathrm{d}\zeta,$$

kde $J_{\mathbf{\Phi}}$ je Jacobiho matice zobrazení $\mathbf{\Phi}$.