Kapitola 8. Diferencovatelná zobrazení a transformace souřadnic

Definice 8.1. (¡i¿m¡/i¿ funkcí ¡i¿n¡/i¿ proměnných)

Zobrazení $\vec{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,

$$\vec{f} : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (y_1, y_2, \dots, y_m)$$

nazýváme m **funkcí** n **proměnných**.

Zápis:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Definice 8.2. (diferencovatelné zobrazení)

Nechť $\vec{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
Řekneme, že $\vec{f}$ je **diferencovatelné v bodě** $\vec{x}_0 \in \Omega$, jestliže existuje lineární zobrazení $\vec{f}\,'(\vec{x}_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ takové, že

$$\vec{f}(\vec{x}_0 + \vec{h}) - \vec{f}(\vec{x}_0) = \vec{f}\,'(\vec{x}_0)\vec{h} + \vec{\omega}(\vec{x}_0, \vec{h}),$$

kde

$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{\|\vec{\omega}(\vec{x}_0, \vec{h})\|}{\|\vec{h}\|} = 0.$$

Lineární zobrazení $\vec{f}\,'(\vec{x}_0)$ nazýváme **derivací zobrazení** $\vec{f}$ **v bodě** $\vec{x}_0$.

Definice 8.3. (Jacobiho matice)

Buď $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ diferencovatelné zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.
Potom má derivace $\vec{f}\,'(\vec{x})$ pro $\vec{x} \in \Omega$ tvar

$$\vec{f}\,'(\vec{x}) = J_{\vec{f}}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_n}, \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m(\vec{x})}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial f_m(\vec{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Matici $\vec{f}\,'(\vec{x}) = J_{\vec{f}}(\vec{x})$ nazýváme **Jacobiho maticí** zobrazení $\vec{f}$.

Definice 8.4. (jakobián)

Buď $\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ diferencovatelné zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$. Potom determinant

$$\det J_{\vec{f}}(\vec{x}) = \det \vec{f}\,'(\vec{x}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_n}, \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n(\vec{x})}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial f_n(\vec{x})}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

nazýváme **jakobiánem (Jacobiho determinant)** zobrazení $\vec{f}$.

Definice 8.5. (regulární zobrazení)

Buď $\vec{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Řekneme, že $\vec{f}$ je **regulární** ve vnitřním bodě $\vec{x} \in \Omega$, jestliže platí:

1. prvky Jacobiho matice $J_{\vec{f}}(\vec{x})$ jsou spojité funkce,
2. jakobián $\det J_{\vec{f}}(\vec{x}) \neq 0$.

Zobrazení $\vec{f}$ je regulární v Ω, je-li regulární v každém vnitřním bodě Ω.

Definice 8.6. (transformace souřadnic)

Transformací souřadnic nazveme každé *regulární* a *prosté* zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$.

Věta 8.7. (o transformacích souřadnic)

Buď $\vec{f}$ transformace souřadnic $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ na $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$,

$$\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_n(\vec{x})).$$

Pak platí

$$\mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\xi_2 \ldots \mathrm{d}\xi_n = \left|\det J_{\vec{f}}(\vec{x})\right| \, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

Věta 8.8. (TABULKA základních transformací souřadnic)

Polární souřadnice $\qquad \vec{f} : (r, \varphi) \mapsto (x, y)$,

$$\vec{f} : \begin{cases} x = r\cos\varphi, & r \in (0, +\infty), \\ y = r\sin\varphi, & \varphi \in \langle 0, 2\pi), \end{cases} \qquad \begin{aligned} \det J_{\vec{f}} &= r, \\ \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y &= r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi. \end{aligned}$$

Válcové (cylindrické) souřadnice $\qquad \vec{f} : (r, \varphi, z) \mapsto (x, y, z)$,

$$\vec{f} : \begin{cases} x = r\cos\varphi, & r \in (0, +\infty), \\ y = r\sin\varphi, & \varphi \in \langle 0, 2\pi), \\ z = z, & z \in (-\infty, +\infty), \end{cases} \qquad \begin{aligned} \det J_{\vec{f}} &= r, \\ \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z &= r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Sférické souřadnice (zeměpisné) $\qquad \vec{f} : (r, \varphi, \theta) \mapsto (x, y, z)$,

$$\vec{f} : \begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\theta, & r \in (0, +\infty), \\ y = r\sin\varphi\cos\theta, & \varphi \in \langle 0, 2\pi), \\ z = r\sin\theta, & \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \end{cases} \qquad \begin{aligned} \det J_{\vec{f}} &= r^2\cos\theta, \\ \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z &= r^2\cos\theta\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$