Kapitola 7. Diferenciální počet funkcí více proměnných

Definice 7.1. **(derivace funkce více proměnných)**

Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\vec{x}_0$ je vnitřní bod množiny Ω a nechť $\vec{s} \in \mathbb{R}^n$ je daný vektor.
Jestliže existuje konečná limita

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\,\vec{s}) - f(\vec{x}_0)}{t},$$

pak tuto limitu nazýváme **derivací funkce f v bodě $\vec{x}_0$ podle vektoru $\vec{s}$** a značíme ji

$$\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial \vec{s}}.$$

Je-li $\vec{s}$ jednotkový vektor, pak tuto limitu nazýváme **derivací funkce f v bodě $\vec{x}_0$ ve směru vektoru $\vec{s}$**.
Je-li $\vec{s} = \vec{e}_i$ (tj. jednotkový vektor ve směru osy x_i), potom derivaci

$$\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial \vec{e}_i}$$

nazýváme **parciální derivací funkce f v bodě $\vec{x}_0$ podle i-té proměnné** (nebo podle x_i) a značíme ji

$$\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0), \quad f_{x_i}(\vec{x}_0), \quad f_i(\vec{x}_0).$$

Definice 7.2. **(gradient)**

Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\vec{x}_0$ je vnitřní bod množiny Ω a nechť f má parciální derivace podle všech proměnných v bodě $\vec{x}_0$. Potom vektor

$$\left(\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_n} \right)$$

nazýváme **gradientem funkce f v bodě $\vec{x}_0$** a značíme

$$\operatorname{grad} f(\vec{x}_0) \quad \text{nebo} \quad \nabla f(\vec{x}_0).$$

Definice 7.3. **(totální diferenciál)**

Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\vec{x}_0$ je vnitřní bod množiny Ω a nechť $\vec{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ je vektor z $\mathbb{R}^n$.

Řekneme, že funkce f je **diferencovatelná v bodě $\vec{x}_0$** vzhledem k $\vec{h}$, jestliže existuje vektor $\vec{D} = (D_1, D_2, \dots, D_n)$ a funkce $\omega(\vec{h})$ tak, že

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0) = (\vec{D}, \vec{h}) + \omega(\vec{h}), \qquad \lim_{\vec{h} \to 0} \frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0.$$

Výraz

$$(\vec{D}, \vec{h}) = D_1 h_1 + D_2 h_2 + \cdots + D_n h_n$$

nazýváme **totálním diferenciálem funkce f v bodě $\vec{x}_0$** a značíme jej $\mathrm{d}f(\vec{x}_0, \vec{h})$.

Je-li f diferencovatelná v každém bodě $\vec{x} \in \Omega$, řekneme, že f je diferencovatelná v Ω.

Věta 7.4. **(totální diferenciál a gradient)**

Je-li $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferencovatelná v bodě $\vec{x}_0$ a je-li $\mathrm{d}f(\vec{x}_0, \vec{h}) = (\vec{D}, \vec{h})$ totální diferenciál funkce f v bodě $\vec{x}_0$, potom platí

$$D_i = \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Dále potom pro libovolný vektor $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\mathrm{d}f(\vec{x}_0, \vec{h}) = \left(\operatorname{grad} f(\vec{x}_0), \vec{h}\right) = \left(\nabla f(\vec{x}_0), \vec{h}\right) = \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial \vec{h}}.$$

Věta 7.5. **(gradient a derivace podle vektoru)**

Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\vec{x}_0$ je vnitřní bod množiny Ω a nechť $\vec{s} \in \mathbb{R}^n$ je daný vektor.
Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $\vec{x}_0$, potom platí

$$\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial \vec{s}} = \left(\vec{s}, \operatorname{grad} f(\vec{x}_0)\right).$$

Věta 7.6. **(diferencovatelnost a spojitost)**

Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $\vec{x}_0$, potom je v tomto bodě $\vec{x}_0$ spojitá.

Věta 7.7. **(postačující podmínka diferencovatelnosti)**

Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\vec{x}_0$ je vnitřní bod množiny Ω a nechť existují parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, na nějakém okolí bodu $\vec{x}_0$.

Jsou-li parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, spojité v bodě $\vec{x}_0$, je funkce f v tomto bodě $\vec{x}_0$ diferencovatelná.

Věta 7.8. **(směr největšího růstu)**

Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $\vec{x}_0$ a gradient $\operatorname{grad} f(\vec{x}_0)$ je nenulový vektor, potom pro derivaci funkce f v bodě $\vec{x}_0$ ve směru vektoru $\vec{z}$ platí

$$\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial \vec{z}} = \max_{\substack{\vec{s} \\ \|\vec{s}\| = 1}} \left|\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial \vec{s}}\right|, \qquad \text{kde } \vec{z} := \frac{\operatorname{grad} f(\vec{x}_0)}{\|\operatorname{grad} f(\vec{x}_0)\|},$$

$\vec{s}$ je libovolný jednotkový vektor.

Definice 7.9. **(tečná nadrovina)**

Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in \Omega$. Řekneme, že nadrovina

$$y = D_1 x_1 + \cdots + D_n x_n + D_0$$

je **tečnou nadrovinou ke grafu funkce f v bodě** $(\vec{x}_0, f(\vec{x}_0))$, jestliže platí

$$f(\vec{x}) - (D_1 x_1 + \cdots + D_n x_n + D_0) = \omega(\vec{x} - \vec{x}_0), \qquad \lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \frac{\omega(\vec{x} - \vec{x}_0)}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0.$$

Věta 7.10. **(diferenciál a tečná nadrovina)**

Funkce f má v bodě $\overrightarrow{x}_0 = (x_{0,1}, \ldots, x_{0,n})$ totální diferenciál právě tehdy, když v bodě $(\overrightarrow{x}_0, f(\overrightarrow{x}_0))$ existuje tečná nadrovina.
Rovnice této tečné nadroviny je

$$y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\overrightarrow{x}_0)}{\partial x_i}(x_i - x_{0,i}) + f(\overrightarrow{x}_0).$$

Normála v tomto bodě má tvar

$$\frac{y - f(\overrightarrow{x}_0)}{-1} = \frac{x_1 - x_{0,1}}{\frac{\partial f(\overrightarrow{x}_0)}{\partial x_1}} = \cdots = \frac{x_n - x_{0,n}}{\frac{\partial f(\overrightarrow{x}_0)}{\partial x_n}}.$$

Věta 7.11. **(derivace složené funkce I)**

Nechť x a y jsou reálné funkce jedné reálné proměnné definované na okolí bodu $t_0 \in \mathbb{R}$. Nechť x a y jsou obě diferencovatelné v t_0. Nechť f je reálná funkce dvou reálných proměnných definovaná na okolí bodu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, kde $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$. Nechť f je diferencovatelná v bodě (x_0, y_0).
Potom funkce $F(t) = f(x(t), y(t))$ je diferencovatelná v bodě t_0 a platí

$$\frac{\mathrm{d}F(t_0)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x(t_0)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y(t_0)}{\mathrm{d}t}.$$

Věta 7.12. **(derivace složené funkce II)**

Nechť u a v jsou reálné funkce dvou reálných proměnných definované na okolí bodu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Nechť u a v jsou obě diferencovatelné v (x_0, y_0). Nechť f je reálná funkce dvou reálných proměnných definovaná na okolí bodu $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$, kde $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$. Nechť f je diferencovatelná v bodě (u_0, v_0). Potom funkce $F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ je diferencovatelná v bodě (x_0, y_0) a platí

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(u_0, v_0)}{\partial u}\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial f(u_0, v_0)}{\partial v}\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} = \frac{\partial f(u_0, v_0)}{\partial u}\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} + \frac{\partial f(u_0, v_0)}{\partial v}\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

Věta 7.13. **(derivace složené funkce III)**

Nechť f je funkce n reálných proměnných, která má v otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ spojité parciální derivace podle všech proměnných. Nechť $x_j = \varphi_j(t_1, \ldots, t_r)$ jsou funkce r proměnných se spojitými parciálními derivacemi podle všech proměnných v otevřené množině $D \subset \mathbb{R}^r$. Potom funkce

$$F(t_1, t_2, \ldots, t_r) = f(\varphi_1(\overrightarrow{t}), \varphi_2(\overrightarrow{t}), \ldots, \varphi_n(\overrightarrow{t}))$$

má parciální derivace podle všech proměnných v množině D a platí

$$\frac{\partial F}{\partial t_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, r.$$

Definice 7.14. (parciální derivace vyšších řádů)

Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\vec{x}_0$ je vnitřní bod množiny Ω a nechť funkce f má v nějakém okolí bodu $\vec{x}_0$ parciální derivaci podle i-té proměnné $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.
Pokud existuje parciální derivace funkce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ v bodě $\vec{x}_0$ podle j-té proměnné

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\vec{x}_0),$$

nazýváme ji **parciální derivací druhého řádu funkce f v bodě $\vec{x}_0$ podle i-té a j-té proměnné** (v tomto pořadí) a značíme ji

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0), \quad f_{x_i x_j}(\vec{x}_0), \quad f_{ij}(\vec{x}_0), \quad \frac{\partial^2 f(\vec{x}_0)}{\partial x_i^2} \text{ pro } i = j.$$

Pro $i \neq j$ nazýváme $\frac{\partial^2 f(\vec{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j}$ a $\frac{\partial^2 f(\vec{x}_0)}{\partial x_j \partial x_i}$ **smíšenými parciálními derivacemi druhého řádu**.

Parciální derivaci k-tého řádu funkce f v bodě $\vec{x}_0$ definujeme rekurentně jako

$$\frac{\partial^k f(\vec{x}_0)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k-1}} \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k-1}}}\right)(\vec{x}_0).$$

Věta 7.15. (o záměnnosti smíšených derivací)

Nechť funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je definovaná na okolí bodu $\vec{x}_0 \in \Omega$. Dále nechť f má na tomto okolí parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $i \neq j$.

Je-li funkce $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ spojitá v bodě $\vec{x}_0$, potom v bodě tomto bodě $\vec{x}_0$ existuje i derivace $\dfrac{\partial^2 f(\vec{x}_0)}{\partial x_j \partial x_i}$ a platí

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x}_0)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(\vec{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Definice 7.16. (diferenciál vyššího řádu)

Nechť má funkce f diferenciál $\mathrm{d}\, f(\vec{x}, \vec{h}) = (\operatorname{grad} f(\vec{x}), \vec{h})$ vzhledem k přírůstku $\vec{h}$ v jistém okolí bodu $\vec{x}_0$. Diferenciál funkce $\mathrm{d} f(\vec{x}, \vec{h})$ v bodě $\vec{x}_0$ opět vzhledem k $\vec{h}$ nazýváme **druhým diferenciálem funkce f v bodě $\vec{x}_0$** a značíme ho $\mathrm{d}^2 f(\vec{x}_0, \vec{h})$. Pokud existuje $\mathrm{d}^2 f(\vec{x}_0, \vec{h})$, potom platí

$$\mathrm{d}^2 f(\vec{x}_0, \vec{h}) = \vec{h}\, \mathbf{H}(\vec{x}_0)\, \vec{h}^T, \qquad \text{kde } \mathbf{H}(\vec{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\vec{x}_0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\vec{x}_0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\vec{x}_0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\vec{x}_0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\vec{x}_0)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\vec{x}_0)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\vec{x}_0)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\vec{x}_0)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\vec{x}_0)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

je tzv. **Hessova matice**.
Diferenciál k-tého řádu definujeme rekurentně jako $\mathrm{d}^k f(\vec{x}, \vec{h}) = \mathrm{d}\left(\mathrm{d}^{k-1} f(\vec{x}, \vec{h})\right)$.

Věta 7.17. (**Taylorova věta**)

Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je $(k+1)$-krát diferencovatelná funkce na okolí $U(\vec{x}_0) \subset \Omega$, $k \in \mathbb{N}_0$.
Potom pro každé $\vec{x} \in U(\vec{x}_0)$, $\vec{x} \neq \vec{x}_0$, existuje $\theta \in (0,1)$ tak, že platí

$$f(\vec{x}) = \underbrace{f(\vec{x}_0) + \mathrm{d}f(\vec{x}_0, \vec{x} - \vec{x}_0) + \cdots + \frac{1}{k!}\mathrm{d}^k f(\vec{x}_0, \vec{x} - \vec{x}_0)}_{= T_k(\vec{x})} + \underbrace{\frac{1}{(k+1)!}\mathrm{d}^{k+1} f(\vec{x}_0 + \theta(\vec{x} - \vec{x}_0), \vec{x} - \vec{x}_0)}_{= R_k(\vec{x})}.$$

Definice 7.18. (**lokální a globální extrémy**)

Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in \Omega$.

1. Řekneme, že číslo $f(\vec{x}_0)$ je **lokálním minimem** (resp. **lokálním maximem**) funkce f na množině Ω, jestliže existuje okolí $U(\vec{x}_0)$ bodu $\vec{x}_0$ takové, že

$$\forall \vec{x} \in U(\vec{x}_0) \cap \Omega : \; f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x}) \qquad (\text{resp. } f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x})).$$

   Pokud platí ostré nerovnosti, řekneme, že f má v bodě $\vec{x}_0$ **ostré lokální minimum** (resp. **ostré lokální maximum**) na množině Ω.

$$\left(\textit{píšeme:} \quad f(\vec{x}_0) = \min_{\vec{x} \in U(\vec{x}_0) \cap \Omega} f(\vec{x}) \qquad (\text{resp. } f(\vec{x}_0) = \max_{\vec{x} \in U(\vec{x}_0) \cap \Omega} f(\vec{x})) \right)$$

2. Řekneme, že číslo $f(\vec{x}_0)$ je **globálním minimem** (resp. **globálním maximem**) funkce f na množině Ω, jestliže platí

$$\forall \vec{x} \in \Omega : \; f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x}) \qquad (\text{resp. } f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x})).$$

$$\left(\textit{píšeme:} \quad f(\vec{x}_0) = \min_{\vec{x} \in \Omega} f(\vec{x}) \qquad (\text{resp. } f(\vec{x}_0) = \max_{\vec{x} \in \Omega} f(\vec{x})) \right)$$

Věta 7.19. (**nutná podmínka lokálního extrému**)

Nechť je funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ve vnitřním bodě $\vec{x}_0 \in \Omega$ diferencovatelná a nechť má v tomto bodě lokální extrém. Potom

$$\forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n : \; \mathrm{d}f(\vec{x}_0, \vec{h}) = 0$$

a platí

$$\operatorname{grad} f(\vec{x}_0) = \vec{0}.$$

Definice 7.20. (**stacionární bod**)

Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce v bodě $\vec{x}_0 \in \Omega$. Bod $\vec{x}_0$ nazýváme **stacionárním bodem** funkce f, pokud

$$\operatorname{grad} f(\vec{x}_0) = \vec{0}.$$

Věta 7.21. **(postačující podmínka lokálního extrému)**

Nechť funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je dvakrát diferencovatelná ve vnitřním bodě $\vec{x}_0 \in \Omega$.

Jestliže pro všechna $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ je diferenciál $\mathrm{d}f(\vec{x}_0, \vec{h}) = 0$, potom platí:

1. je-li $\forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n, \ \vec{h} \neq \vec{0}: \ \mathrm{d}^2 f(\vec{x}_0, \vec{h}) > 0$, má funkce f v $\vec{x}_0$ ostré lokální minimum;
2. je-li $\forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n, \ \vec{h} \neq \vec{0}: \ \mathrm{d}^2 f(\vec{x}_0, \vec{h}) < 0$, má funkce f v $\vec{x}_0$ ostré lokální maximum;
3. jestliže existují $\vec{h}_1, \vec{h}_2 \in \mathbb{R}^n$ tak, že $\mathrm{d}^2 f(\vec{x}_0, \vec{h}_1) > 0$ a $\mathrm{d}^2 f(\vec{x}_0, \vec{h}_2) < 0$, nemá funkce f v $\vec{x}_0$ extrém, ale tzv. **sedlový bod**.

Věta 7.22. **(ekvivalentní postačující podmínky extrému)**

Nechť funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je dvakrát diferencovatelná ve vnitřním bodě $\vec{x}_0 \in \Omega$ a nechť $\vec{x}_0$ je *stacionární bod* funkce f, tj.

$$\operatorname{grad} f(\vec{x}_0) = \vec{0}.$$

Potom platí

1. funkce f má v bodě $\vec{x}_0$ **ostré lokální minimum**, pokud
   - Hessova matice $\mathbf{H}(\vec{x}_0)$ je *pozitivně definitní*;
   - všechny hlavní minory matice $\mathbf{H}(\vec{x}_0)$ jsou kladné, tj. $M_1 > 0, \ M_2 > 0, \ M_3 > 0, \ \dots$;
   - všechna vlastní čísla matice $\mathbf{H}(\vec{x}_0)$ jsou kladná;
2. funkce f má v bodě $\vec{x}_0$ **ostré lokální maximum**, pokud
   - Hessova matice $\mathbf{H}(\vec{x}_0)$ je *negativně definitní*;
   - hlavní minory matice $\mathbf{H}(\vec{x}_0)$ střídají znaménka, tj. $M_1 < 0, \ M_2 > 0, \ M_3 < 0, \ \dots$;
   - všechna vlastní čísla matice $\mathbf{H}(\vec{x}_0)$ jsou záporná;
3. funkce f má v bodě $\vec{x}_0$ **sedlo**, pokud
   - Hessova matice $\mathbf{H}(\vec{x}_0)$ je *indefinitní*;
   - hlavní minory matice $\mathbf{H}(\vec{x}_0)$ jsou nenulové a znaménka mění jinak než v přechozích dvou případech;
   - všechna vlastní čísla matice $\mathbf{H}(\vec{x}_0)$ jsou nenulová, alespoň jedno z nich je kladné a jedno záporné;
4. *nelze rozhodnout* resp. je třeba dalších kritérií, pokud
   - Hessova matice $\mathbf{H}(\vec{x}_0)$ je *pozitivně* či *negativně semidefinitní*;
   - alespoň jeden z hlavních minorů matice $\mathbf{H}(\vec{x}_0)$ je nulový;
   - alespoň jedno vlastní číslo matice $\mathbf{H}(\vec{x}_0)$ je nulové.

Definice 7.23. **(řešení rovnice)**

Nechť $F(\vec{x}, y) = F(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ je funkce $(n+1)$ proměnných, $n \in \mathbb{N}$.
Funkci $y = f(\vec{x})$ pro $\vec{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ nazveme (**globálním**) **řešením** rovnice $F(\vec{x}, y) = 0$ na Ω, jestliže pro všechna $\vec{x} \in \Omega$ platí

$$F(\vec{x}, f(\vec{x})) = 0.$$

Jestliže pro všechna $\vec{x} \in U(\vec{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$ je $F(\vec{x}, f(\vec{x})) = 0$, pak $y = f(\vec{x})$ nazveme **lokálním řešením** rovnice $F(\vec{x}, y) = 0$.

Definice 7.24. (implicitní funkce)

Funkci $y = f(\vec{x})$, která je řešením rovnice $F(\vec{x}, y) = 0$, nazveme **implicitní funkcí** nebo **funkcí danou implicitně**.

Věta 7.25. (o existenci globálního řešení)

Nechť funkce $F(\vec{x}, y)$ je definovaná na množině $\Omega \times \langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a nechť pro všechna pevná $\vec{x} \in \Omega$ je $F(\vec{x}, y)$ spojitá funkce proměnné y. Jestliže pro všechna $\vec{x} \in \Omega$ platí $F(\vec{x}, a)\, F(\vec{x}, b) \leq 0$, potom existuje alespoň jedna funkce $y = f(\vec{x})$, která je globálním řešením rovnice $F(\vec{x}, y) = 0$ na Ω.

Věta 7.26. (o existenci lokálního řešení, o implicitní funkci)

Nechť $F(\vec{x}, y)$ je funkce, která má spojité parciální derivace až do k-tého řádu ($k \in \mathbb{N}$) v nějakém okolí bodu $(\vec{x}_0, y_0)$ a nechť

$$F(\vec{x}_0, y_0) = 0, \qquad \frac{\partial F(\vec{x}_0, y_0)}{\partial y} \neq 0.$$

Potom platí:

1. existuje okolí $U(\vec{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\vec{x}_0$ a funkce $y = f(\vec{x})$, která je jediným řešením rovnice $F(\vec{x}, y) = 0$ na $U(\vec{x}_0)$, tj.
$$\forall \vec{x} \in U(\vec{x}_0): \;\; F(\vec{x}, f(\vec{x})) = 0;$$
2. funkce $y = f(\vec{x})$ má spojité parciální derivace až do k-tého řádu v $U(\vec{x}_0)$ a pro $\vec{x} \in U(\vec{x}_0)$ platí
$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial F(\vec{x}, f(\vec{x}))}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial F(\vec{x}, f(\vec{x}))}{\partial y}}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$