Kapitola 6. Funkce více proměnných

Věta 6.1. (funkce n proměnných)

Reálnou funkcí n reálných proměnných, $n \in \mathbb{N}$, nazveme zobrazení

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

$$\left(\textit{píšeme:} \quad z = f(\vec{x}),\ \vec{x} \in D, \quad y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \text{v } \mathbb{R}^2 : z = f(x,y), \quad \text{v } \mathbb{R}^3 : u = f(x,y,z) \right)$$

Přičemž:

1. množina $D = D(f)$ se nazývá **definiční obor** funkce f,
2. množina $H(f) = \left\{ z \in \mathbb{R} :\ z = f(\vec{x}),\ \vec{x} \in D(f) \right\}$ se nazývá **obor hodnot** funkce f,
3. množina $G = \left\{ (\vec{x}, f(\vec{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} :\ \vec{x} \in D(f) \right\}$ se nazývá **graf** funkce f,
4. množinu $H_C = \left\{ \vec{x} \in D(f) :\ f(\vec{x}) = C \right\}$, $C \in \mathbb{R}$, se nazývá **vrstevnice (hladina) grafu** funkce f.

Věta 6.2. (Heineho definice limity)

Nechť $f : D(f) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ je hromadný bod množiny $D(f)$.

1. Řekneme, že funkce f má v bodě $\vec{x}_0$ **limitu** $b \in \mathbb{R}$, jestliže pro libovolnou posloupnost $(\vec{x}_k)$, $\vec{x}_k \in D(f)$, $\vec{x}_k \neq \vec{x}_0$, konvergující k $\vec{x}_0$ (v $\mathbb{R}^n$) konverguje (v $\mathbb{R}$) posloupnost $(f(\vec{x}_k))$ k číslu b.

$$\left(\textit{píšeme:} \quad \lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = b, \qquad \text{v } \mathbb{R}^2 : \lim_{\substack{\vec{x} \to \vec{x}_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = b, \qquad \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = b \right)$$

2. Řekneme, že funkce f má v bodě $\vec{x}_0$ **limitu** $b \in \mathbb{R}$ **vzhledem k množině** $\Omega \subset D(f)$ ($\vec{x}_0$ je hromadný bod Ω), pokud restrikce (zúžení) $f|_\Omega$ funkce f na množinu Ω má v bodě $\vec{x}_0$ limitu b.

$$\left(\textit{píšeme:} \quad \lim_{\substack{\vec{x} \to \vec{x}_0 \\ \vec{x} \in \Omega}} f(\vec{x}) = b, \qquad \text{v } \mathbb{R}^2 : \lim_{\substack{\vec{x} \to \vec{x}_0 \\ y \to y_0 \\ (x,y) \in \Omega}} f(x,y) = b, \qquad \lim_{\substack{(x,y) \to (x_0,y_0) \\ (x,y) \in \Omega}} f(x,y) = b \right)$$

Věta 6.3. (Cauchyova definice limit y)

Nechť $f : D(f) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ je hromadný bod množiny $D(f)$.
Řekneme, že funkce f má v bodě $\vec{x}_0$ **limitu** $b \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \vec{x} \in D(f) :\ 0 < \left\| \vec{x} - \vec{x_0} \right\| < \delta \ \Rightarrow\ |f(\vec{x}) - b| < \varepsilon.$$

$$\left(\textit{píšeme:} \quad \lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = b \right)$$

Věta 6.4. (algebra limit)

Nechť $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\vec{x_0}$ je hromadný bod množiny D. Jestliže $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x_0}} f(\vec{x}) = b$ a $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x_0}} g(\vec{x}) = c$, potom

1. $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x_0}} \alpha f(\vec{x}) = \alpha b$,
2. $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x_0}} (f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = b + c$,
3. $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x_0}} (f(\vec{x})\, g(\vec{x})) = b\, c$,
4. $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x_0}} \dfrac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} = \dfrac{b}{c}$, pokud $c \neq 0$.

Věta 6.5. (o dvojnásobných limitách)

Nechť $f : D(f) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných. Jestliže

1. existuje dvojná limita $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y) =: b$,
2. existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $y \in P(y_0, \delta)$ existuje $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) =: \varphi(y)$ a
   pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ existuje $\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) =: \psi(x)$,

potom také existují limity $\lim\limits_{y \to y_0} \varphi(y)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x)$ a platí

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) = b.$$

Věta 6.6. (spojitost funkce v bodě)

Řekneme, že funkce $f : D(f) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je **spojitá v bodě** $\vec{x}_0 \in D(f)$, pokud existuje $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x})$ a platí

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0).$$

Je-li $\vec{x}_0$ izolovaný bod $D(f)$, považujeme funkci f v tomto bodě za spojitou.

Věta 6.7. (spojitost funkce na množině)

Řekneme, že funkce $f : D(f) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je **spojitá na množině** $\Omega \subset D(f)$, pokud je f spojitá v každém bodě množiny Ω.

Věta 6.8. (algebraické operace se spojitými funkcemi)

Jsou-li funkce f a g spojité v bodě $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, jsou v tomto bodě $\vec{x}_0$ spojité i funkce αf $(\alpha \in \mathbb{R})$, $f \pm g$, $f \cdot g$, $|f|$ a funkce $\dfrac{f}{g}$ pokud $g(\vec{x}_0) \neq 0$.

Věta 6.9. (**spojitost složené funkce**)

Nechť f je spojitá v bodě $\overrightarrow{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ a nechť g je spojitá v bodě $y_0 = f(\overrightarrow{x}_0)$. Potom superpozice $g \circ f : \overrightarrow{x} \mapsto g(f(\overrightarrow{x}))$ je spojitá v bodě $\overrightarrow{x}_0$.