Kapitola 5. Vektorové funkce jedné reálné proměnné

Definice 5.1. (vektorová funkce jedné reálné proměnné)

Vektorová funkce jedné reálné proměnné je zobrazení

$$\vec{x} : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Množinu $D = D(\vec{x})$ nazveme **definičním oborem** vektorové funkce $\vec{x}$.

Zapis: $\vec{x} = \vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, $t \in D$; $\quad \vec{x} : t \mapsto \vec{x}(t)$, $t \in D$.

Funkce $x_i : D \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, se nazývají **složky vektorové funkce**.

Definice 5.2. (limita a spojitost vektorové funkce)

Řekneme, že vektorová funkce $\vec{x} : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ má v hromadném bodě t_0 **vlastní limitu** $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall t \in D: \ 0 < |t - t_0| < \delta \ \Rightarrow \ \|\vec{x}(t) - \vec{a}\| < \varepsilon.$$

$$\left(\text{píšeme:} \quad \lim_{t \to t_0} \vec{x}(t) = \vec{a} \quad \right)$$

Řekneme, že vektorová funkce $\vec{x} : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ je **spojitá v bodě** $t_0 \in D$, pokud $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{x}(t) = \vec{x}(t_0)$.

Je-li t_0 izolovaný bod množiny D, považujeme vektorovou funkci $\vec{x}$ v tomto bodě za spojitou.

Věta 5.3. (limita a spojitost po složkách)

Nechť $\vec{x} : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, t_0 je hromadný bod D. Potom platí

1. $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{x}(t) = \vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} : \ \lim\limits_{t \to t_0} x_i(t) = a_i,$
2. $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{x}(t) = \vec{x}(t_0) \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} : \ \lim\limits_{t \to t_0} x_i(t) = x_i(t_0).$

Věta 5.4. (algebra limit)

Nechť $D \subset \mathbb{R}$, $\vec{x}, \vec{y} : D \to \mathbb{R}^n$, $\alpha : D \to \mathbb{R}$ a t_0 je hromadný bod D.

Jestliže $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{x}(t) = \vec{a}$, $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{y}(t) = \vec{b}$ a $\lim\limits_{t \to t_0} \alpha(t) = c$, potom platí

1. $\lim\limits_{t \to t_0} \|\vec{x}(t)\| = \|\vec{a}\|,$
2. $\lim\limits_{t \to t_0} (\vec{x}(t) + \vec{y}(t)) = \vec{a} + \vec{b},$
3. $\lim\limits_{t \to t_0} (\alpha(t)\vec{x}(t)) = c\,\vec{a},$
4. $\lim\limits_{t \to t_0} (\vec{x}(t), \vec{y}(t)) = \left(\vec{a}, \vec{b}\right).$

Definice 5.5. (derivace a diferenciál vektorové funkce)

Nechť $\vec{x} : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ a t_0 je vnitřní bod D. Jestliže existuje limita

$$\dot{\vec{x}}(t_0) := \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{x}(t) - \vec{x}(t_0)}{t - t_0} = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{x}(t_0 + h) - \vec{x}(t_0)}{h},$$

potom tuto limitu nazveme **derivací vektorové funkce $\vec{x}$ v bodě** t_0.

Říkáme, že $\vec{x}$ je **diferencovatelná v bodě** t_0, jestliže existuje konstantní vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ a vektorová funkce $\vec{\omega} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tak, že platí

$$\vec{x}(t_0 + h) - \vec{x}(t_0) = \vec{a}\,h + \vec{\omega}(h), \quad \lim_{h \to 0} \frac{\vec{\omega}(h)}{h} = \vec{0}.$$

Vektorovou lineární funkci

$$\mathrm{d}\vec{x}(t_0, h) := \vec{a}\,h = \dot{\vec{x}}(t_0)h = \dot{\vec{x}}(t_0)\,\mathrm{d}t$$

nazýváme **diferenciálem vektorové funkce $\vec{x}$ v bodě** t_0.

Věta 5.6. (o střední hodnotě)

Nechť $\vec{x} : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ je spojitá v intervalu $\langle a, b \rangle \subset D$ a diferencovatelná v (a, b). Potom existuje bod $\xi \in (a, b)$ takový, že

$$\|\vec{x}(b) - \vec{x}(a)\| \le (b - a)\|\dot{\vec{x}}(\xi)\|.$$

Definice 5.7. (vektorová primitivní funkce)

Vektorovou funkci $\vec{X}(t)$ takovou, že $\dot{\vec{X}}(t) = \vec{x}(t)$ pro $t \in D$, nazveme **primitivní funkcí** k vektorové funkci $\vec{x}(t)$. Pro interval $\langle a, b \rangle \subset D$ je potom

$$\vec{X}(b) - \vec{X}(a) = \int_a^b \vec{x}(t)\ \mathrm{d}t = \left(\int_a^b x_1(t)\,\mathrm{d}t, \ldots, \int_a^b x_n(t)\,\mathrm{d}t \right).$$

Definice 5.8. (křivka, Jordanova křivka, po částech hladká křivka)

1. Množinu $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ nazveme **jednoduchou křivkou**, pokud existuje zobrazení $\vec{\gamma} : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ tak, že
   (a) $\Gamma = \left\{\vec{\gamma}(t) : t \in \langle a, b\rangle\right\}$,
   (b) $\vec{\gamma}$ je spojitá funkce,
   (c) $\forall t_1, t_2 \in \langle a, b\rangle : \; 0 < |t_2 - t_1| < b - a \;\Rightarrow\; \vec{\gamma}(t_1) \neq \vec{\gamma}(t_2)$.

   Říkáme, že vektorová funkce $\vec{\gamma}$ je **parametrizací křivky** Γ.
   Jednoduchá uzavřená (Jordanova) křivka je jednoduchá křivka Γ, pro kterou $\vec{\gamma}(a) = \vec{\gamma}(b)$.
2. Množinu $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ nazveme **křivkou**, pokud existuje zobrazení $\vec{\gamma} : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ tak, že
   (a) $\Gamma = \left\{\vec{\gamma}(t) : t \in \langle a, b\rangle\right\}$,
   (b) $\vec{\gamma}$ je spojitá funkce,
   (c) existuje konečná množina $K \subset \langle a, b\rangle$ tak, že $\forall t_1, t_2 \in \langle a, b\rangle \setminus K : \; t_1 \neq t_2 \;\Rightarrow\; \vec{\gamma}(t_1) \neq \vec{\gamma}(t_2)$.
3. Křivku Γ nazveme **hladkou (regulární) křivkou**, pokud
   (a) $\vec{\gamma}$ je spojitě diferencovatelná funkce,
   (b) $\forall t \in \langle a, b\rangle : ||\dot{\vec{\gamma}}(t)|| \neq 0$,
   (c) pro uzavřenou křivku ($\vec{\gamma}(a) = \vec{\gamma}(b)$) je tečný vektor $\dot{\vec{\gamma}}(b)$ souhlasně kolineární s $\dot{\vec{\gamma}}(a)$.
4. Křivku Γ nazveme **po částech hladkou křivkou**, pokud je na $\langle a, b\rangle$ derivace $\dot{\vec{\gamma}}$ spojitá a $||\dot{\vec{\gamma}}(t)|| \neq 0$ až na konečný počet bodů.

Definice 5.9. (rovnost křivek, přechodová funkce)

O dvou křivkách Γ_1, Γ_2 v $\mathbb{R}^n$ řekneme, že jsou si **rovny**, pokud platí rovnost množin $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

Nechť $\vec{\gamma}_1$ a $\vec{\gamma}_2$ jsou parametrizace křivek Γ_1 a Γ_2 v $\mathbb{R}^n$. Spojitou a prostou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro kterou $\vec{\gamma}_1(f(t)) \equiv \vec{\gamma}_2(t)$, nazveme **přechodovou funkcí** mezi $\vec{\gamma}_1$ a $\vec{\gamma}_2$.

Definice 5.10. (orientovaná křivka)

Buď Γ křivka v $\mathbb{R}^n$. Jestliže jeden směr pohybu na Γ nazveme kladný a druhý záporný, řekneme, že jsme křivku **orientovali**. Je-li Γ Jordanova křivka v rovině, pak její kladnou orientací rozumíme pohyb po Γ proti směru hodinových ručiček a opačný směr zápornou orientací.

Věta 5.11. (tečna ke křivce)

Je-li $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, parametrizace hladké křivky Γ v $\mathbb{R}^n$, pak parametrické rovnice tečny ke křivce Γ v bodě $t_0 \in \langle a, b\rangle$ mají tvar

$$\vec{x}(\tau) = \vec{\gamma}(t_0) + \tau\dot{\vec{\gamma}}(t_0), \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Definice 5.12. (diferenciál křivky a diferenciál oblouku křivky)

Je-li $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, parametrizace hladké křivky Γ v $\mathbb{R}^n$, pak výraz $\mathrm{d}\vec{\gamma}(t_0, \mathrm{d}t) = \dot{\vec{\gamma}}(t_0)\,\mathrm{d}t$ nazýváme **diferenciálem křivky** a výraz $\mathrm{d}s = ||\dot{\vec{\gamma}}(t_0)||\,\mathrm{d}t$ **diferenciálem oblouku křivky**.

Věta 5.13. (délka oblouku křivky)

Je-li $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$, parametrizace po částech hladké křivky Γ v $\mathbb{R}^n$, pak pro délku s oblouku této křivky platí

$$s = \int_a^b \|\dot{\vec{\gamma}}(t)\| \, \mathrm{d}t.$$