Kapitola 4. Prostor ¡s¿R¡sup¿n¡/sup¿¡/s¿

Definice 4.1. (skalární součin, norma a metrika)

Nechť $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ a $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Potom:

1. **Skalární součin** prvků $\vec{x}$ a $\vec{y}$ je definován vztahem
$$\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$
2. **Euklidova norma** prvku $\vec{x}$ je definována vztahem
$$\left\|\vec{x}\right\| = \sqrt{\left(\vec{x}, \vec{x}\right)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$
3. **Euklidova vzdálenost** (metrika) prvků $\vec{x}$ a $\vec{y}$ je definována vztahem
$$d\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = \left\|\vec{x} - \vec{y}\right\|.$$

Věta 4.2. (Cauchy-Schwarzova nerovnost)

Pro všechna $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ platí
$$\left|\left(\vec{x}, \vec{y}\right)\right| \leq \left\|\vec{x}\right\| \left\|\vec{y}\right\|.$$

Věta 4.3. (vlastnosti skalárního součinu, normy a metriky)

Nechť $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom

1. pro **skalární součin** platí:
   (a) $\left(\vec{x}, \vec{x}\right) \geq 0$; $\left(\vec{x}, \vec{x}\right) = 0$ právě tehdy, když $\vec{x} = 0$,
   (b) $\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = \left(\vec{y}, \vec{x}\right)$,
   (c) $\left(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}\right) = \left(\vec{x}, \vec{y}\right) + \left(\vec{x}, \vec{z}\right)$,
   (d) $\left(\alpha\vec{x}, \vec{y}\right) = \alpha\left(\vec{x}, \vec{y}\right)$.
2. pro **Euklidovu normu** platí:
   (a) $\left\|\vec{x}\right\| \geq 0$; $\left\|\vec{x}\right\| = 0$ právě tehdy, když $\vec{x} = 0$,
   (b) $\left\|\alpha\vec{x}\right\| = |\alpha| \left\|\vec{x}\right\|$,
   (c) $\left\|\vec{x} + \vec{y}\right\| \leq \left\|\vec{x}\right\| + \left\|\vec{y}\right\|$.
3. a pro **Euklidovu vzdálenost** (metriku) platí:
   (a) $d\left(\vec{x}, \vec{y}\right) \geq 0$; $d\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = 0$ právě tehdy, když $\vec{x} = \vec{y}$,
   (b) $d\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = d\left(\vec{y}, \vec{x}\right)$,
   (c) $d\left(\vec{x}, \vec{z}\right) \leq d\left(\vec{x}, \vec{y}\right) + d\left(\vec{y}, \vec{z}\right)$.

Definice 4.4. (posloupnost v $\mathbb{R}^n$)

Posloupností bodů v $\mathbb{R}^n$ rozumíme zobrazení

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}^n : \; k \mapsto \vec{x}_k.$$

$$\left(\textit{píšeme:} \quad \left(\vec{x}_k\right), \quad \left(\vec{x}_k\right)_{k=1}^{+\infty}, \quad \left(\vec{x}_k;\; k \in \mathbb{N}\right), \quad \left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k, \dots\right), \quad \vec{x}_k \in \mathbb{R}^n \right)$$

Definice 4.5. (omezená posloupnost v $\mathbb{R}^n$)

Posloupnost $(\vec{x}_k)$ bodů v $\mathbb{R}^n$ je **omezená**, pokud existuje konstanta $c > 0$ taková, že platí

$$\forall k \in \mathbb{N} : \; \left\|\vec{x}_k\right\| \le c.$$

Definice 4.6. (konvergentní posloupnost v $\mathbb{R}^n$)

Posloupnost $(\vec{x}_k)$ bodů v $\mathbb{R}^n$ je **konvergentní v $\mathbb{R}^n$**, pokud

$$\exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists k_0 \in \mathbb{N} \; \forall k \in \mathbb{N} : \; k > k_0 \;\Rightarrow\; \left\|\vec{x}_k - \vec{x}\right\| < \varepsilon.$$

$$\left(\textit{píšeme:} \quad \lim_{k\to+\infty} \vec{x}_k = \vec{x}, \quad \vec{x}_k \to \vec{x} \right)$$

Věta 4.7. (konvergence po složkách)

Nechť $(\vec{x}_k) = ((x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,n}))$ je posloupnost v $\mathbb{R}^n$ a nechť $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Potom

$$\lim_{k\to+\infty} \vec{x}_k = \vec{x}$$

právě tehdy, když

$$\forall j \in (1, \dots, n) : \; \lim_{k\to+\infty} x_{k,j} = x_j.$$

Věta 4.8. (algebra limit)

Nechť $(\vec{x}_k)$ a $(\vec{y}_k)$ jsou posloupnosti bodů v $\mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Jestliže $\lim\limits_{k\to+\infty} \vec{x}_k = \vec{x}$ a $\lim\limits_{k\to+\infty} \vec{y}_k = \vec{y}$, potom platí

1. $\lim\limits_{k\to+\infty} (\alpha \vec{x}_k) = \alpha \vec{x}$,
2. $\lim\limits_{k\to+\infty} (\vec{x}_k + \vec{y}_k) = \vec{x} + \vec{y}$,
3. $\lim\limits_{k\to+\infty} \left(\vec{x}_k, \vec{y}_k\right) = \left(\vec{x}, \vec{y}\right)$.

Věta 4.9. (Bolzano-Weierstrassova věta)

Každá omezená posloupnost $(\vec{x}_k)$ v $\mathbb{R}^n$ obsahuje konvergentní podposloupnost.