Kapitola 3. Fourierovy řady

Definice 3.1. (ortogonální a trigonometrický systém funkcí)

1. Nechť (f_n) je posloupnost funkcí definovaných na omezeném intervalu (a, b), které jsou integrovatelné s kvadrátem na $\langle a, b\rangle$. Říkáme, že posloupnost (f_n) tvoří **ortogonální systém funkcí** na $\langle a, b\rangle$, jestliže pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, platí
$$\int_a^b f_m(x) f_n(x)\, \mathrm{d}x = 0.$$
2. Funkční posloupnost $(1, \cos \omega x, \sin \omega x, \cos 2\omega x, \sin 2\omega x, \dots, \cos n\omega x, \sin n\omega x, \dots)$, kde $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $T > 0$, se nazývá **trigonometrický systém funkcí**.

Věta 3.2. (o ortogonalitě trigonometrického systému funkcí)

Trigonometrický systém funkcí je ortogonální na libovolném intervalu délky $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Definice 3.3. (trigonometrický polynom a trigonometrická řada)

Trigonometrický polynom stupně nejvýše n, $n \in \mathbb{N}_0$, je funkce tvaru
$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x), \quad x \in \mathbb{R},$$
kde $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$.

Trigonometrická řada s periodou $T = \frac{2\pi}{\omega}$ se nazývá funkční řada tvaru
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x), \quad x \in \mathbb{R}.$$
Reálná čísla a_0, a_k, b_k $(k = 1, 2, \dots)$ se nazývají **koeficienty trigonometrické řady**.
Speciálně:

1. **kosinová trigonometrická řada** je trigonometrická řada tvaru $(b_k = 0,\ k = 1, 2, \dots)$
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos k\omega x, \quad x \in \mathbb{R},$$
2. **sinová trigonometrická řada** je trigonometrická řada tvaru $(a_k = 0,\ k = 0, 1, 2, \dots)$
$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin k\omega x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Věta 3.4. **(o periodicitě součtové funkce)**

Jestliže trigonometrická řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x), \quad x \in \mathbb{R},$$

konverguje na nějakém základním intervalu periodicity délky $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, potom je konvergentní na celém $\mathbb{R}$ a její součtová funkce

$$s(x) = \lim_{n\to+\infty} s_n(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

je funkce periodická se základní periodou $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Věta 3.5. **(o koeficientech trigonometrické řady)**

Jestliže trigonometrická řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x), \quad x \in \mathbb{R},$$

konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$ a s je její součtová funkce, potom koeficienty a_0, a_k, b_k $(k = 1, 2, \dots)$ této trigonometrické řady jsou jednoznačně určeny vzorci

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_\alpha^{\alpha+T} s(x)\ \mathrm{d}x, \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_\alpha^{\alpha+T} s(x) \cos k\omega x\ \mathrm{d}x, \quad k = 1, 2, \dots, \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_\alpha^{\alpha+T} s(x) \sin k\omega x\ \mathrm{d}x, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Definice 3.6. (Fourierova řada)

Nechť f je periodická funkce se základní periodou T, integrovatelná na intervalu periodicity $\langle \alpha, \alpha+T\rangle$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom trigonometrická řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,\mathrm{d}x, \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_\alpha^{\alpha+T} f(x) \cos k\omega x\,\mathrm{d}x, \quad k = 1, 2, \dots, \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_\alpha^{\alpha+T} f(x) \sin k\omega x\,\mathrm{d}x, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

se nazývá **Fourierova řada funkce** f. Koeficienty a_k, b_k této řady se nazývají **Fourierovy koeficienty**.

$$\left(\textit{píšeme:} \quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x), \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \right)$$

Věta 3.7. (o koeficientech Fourierovy řady sudé / liché funkce)

1. Pro Fourierovy koeficienty *sudé* periodické funkce f se základní periodou $T = 2l$, $l > 0$, integrovatelné na intervalu periodicity délky T, platí

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{2}{l} \textstyle\int_0^l f(x)\,\mathrm{d}x, \\ a_k &= \tfrac{2}{l} \textstyle\int_0^l f(x) \cos k\omega x\,\mathrm{d}x, \quad k = 1, 2, \dots, \\ b_k &= 0, \quad k = 1, 2, \dots. \end{aligned}$$

   Fourierova řada *sudé* periodické funkce f je tedy *kosinová* trigonometrická řada

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos k\omega x, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{l}.$$

2. Pro Fourierovy koeficienty *liché* periodické funkce f se základní periodou $T = 2l$, $l > 0$, integrovatelné na intervalu periodicity délky T, platí

$$\begin{aligned} a_k &= 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ b_k &= \tfrac{2}{l} \textstyle\int_0^l f(x) \sin k\omega x\,\mathrm{d}x, \quad k = 1, 2, \dots. \end{aligned}$$

   Fourierova řada *liché* periodické funkce f je tedy *sinová* trigonometrická řada

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin k\omega x, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{l}.$$

Definice 3.8. (po částech hladká funkce)

Říkáme, že funkce f je **po částech hladká** na intervalu $\langle a, b\rangle$, pokud je na něm po částech spojitá spolu se svou derivací f'.

Věta 3.9. (1. kritérium bodové konvergence Fourierovy řady)

Je-li periodická funkce f se základní periodou T po částech hladká na intervalu periodicity $\langle a, a+T \rangle$, $a \in \mathbb{R}$, potom Fourierova řada funkce f je konvergentní na $\mathbb{R}$ a pro její součtovou funkci s platí

1. $s_n(x) \to s(x) = f(x)$ v každém bodě x, ve kterém je funkce f spojitá,
2. $s_n(x) \to s(x) = \frac{1}{2}\left[f(x+) + f(x-)\right]$ v každém bodě x nespojitosti nejvýše prvního druhu funkce f.

Věta 3.10. (2. kritérium bodové konvergence Fourierovy řady)

Nechť periodická funkce f se základní periodou T splňuje na intervalu periodicity $\langle a, a+T \rangle$, $a \in \mathbb{R}$, tzv. **Dirichletovy podmínky**:

1. f je po částech spojitá na $\langle a, a+T \rangle$,
2. f má nejvýše konečný počet ostrých lokálních extrémů na $\langle a, a+T \rangle$.

Potom Fourierova řada funkce f je konvergentní na $\mathbb{R}$ a pro její součtovou funkci s platí

1. $s_n(x) \to s(x) = f(x)$ v každém bodě x, ve kterém je funkce f spojitá,
2. $s_n(x) \to s(x) = \frac{1}{2}\left[f(x+) + f(x-)\right]$ v každém bodě x nespojitosti nejvýše prvního druhu funkce f.

Věta 3.11. (kritérium stejnoměrné konvergence Fourierovy řady)

Je-li periodická funkce f se základní periodou T spojitá na intervalu periodicity $\langle a, a+T \rangle$, $a \in \mathbb{R}$, a má-li f na tomto intervalu po částech spojitou derivaci f', potom Fourierova řada funkce f je stejnoměrně konvergentní na $\mathbb{R}$ k funkci f, tj. pro její součtovou funkci s platí

$$s_n \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} s \quad \text{a} \quad \forall x \in \mathbb{R}: \ s(x) = f(x).$$

Definice 3.12. (Fourierův rozvoj)

Říkáme, že **periodickou funkci f rozvíjíme ve Fourierovu řadu**, pokud určíme Fourierovu řadu funkce f, která konverguje na $\mathbb{R}$ a pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\frac{1}{2}\left[f(x+) + f(x-)\right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x),$$

kde a_k a b_k jsou Fourierovy koeficienty. Fourierově řadě potom říkáme **Fourierův rozvoj** dané periodické funkce.