# Kapitola 2. Mocninné řady

**Definice 2.1.** ( mocninná řada )

**Mocninnou řadou** nazýváme funkční řadu tvaru

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots,$$

kde $x \in \mathbb{R}$ je proměnná, $x_0, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ jsou reálná čísla.
Číslo $x_0$ se nazývá **střed mocninné řady**. Čísla $a_n$ se nazývají **koeficienty mocninné řady**.

**Věta 2.2.** ( Abelova věta o absolutní konvergenci )

Je-li mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ konvergentní v některém bodě $x_1 \neq x_0$, potom řada konverguje absolutně ve všech bodech $x \in \mathbb{R}$, pro které platí

$$|x-x_0| < \varrho, \quad \text{kde } \varrho := |x_1 - x_0|,$$

tj. v bodech $x \in U(x_0, \varrho) = (x_0 - \varrho, x_0 + \varrho)$.

**Definice 2.3.** ( poloměr konvergence )

Číslo

$$R := \sup\left\{ \varrho = |x-x_0| \in \mathbb{R}_0^+ : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ konverguje} \right\}$$

se nazývá **poloměr konvergence mocninné řady** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$.
Interval $J_k = (x_0 - R, x_0 + R)$ se nazývá **interval konvergence mocninné řady**.

**Věta 2.4.** ( o poloměru konvergence )

Pro mocninnou řadu $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ označme $l := \limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Potom pro její poloměr konvergence $R$ platí

$$R = \begin{cases} 0 & \text{pro } l = +\infty, \\ \dfrac{1}{l} & \text{pro } l \in (0, +\infty), \\ +\infty & \text{pro } l = 0. \end{cases}$$

$$\left( \textit{speciálně:} \quad l = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|, \quad \textit{resp.} \quad l = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)$$

**Věta 2.5.** ( Abelova věta o stejnoměrné konvergenci )

Každá mocninná řada *konverguje stejnoměrně* na každém uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, který je podmnožinou jejího oboru konvergence $K$.

**Věta 2.6.** ( Abelova věta o spojitosti součtové funkce )

Součtová funkce mocninné řady je *spojitá* na svém oboru konvergence $K$.

**Věta 2.7.** ( operace s mocninnými řadami )

1. **Součet a rozdíl mocninných řad**:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n \pm \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \pm b_n)(x-x_0)^n,$$
2. **$k$-násobek mocninné řady**, $k \in \mathbb{R}$:
$$k \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} k a_n(x-x_0)^n,$$
3. **(Cauchyův) součin mocninných řad**:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-x_0)^n,$$
kde $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$.

**Věta 2.8.** ( o integrování mocninné řady )

Nechť mocninná řada $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ má poloměr konvergence $R > 0$ a nechť $s = s(x)$ je její součtová funkce. Potom pro každé $x \in J_k = (x_0 - R, x_0 + R)$ platí

$$\int_{x_0}^{x} s(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(t-x_0)^n\right] \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{x_0}^{x} a_n(t-x_0)^n\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}.$$

**Věta 2.9.** ( o derivování mocninné řady )

Nechť mocninná řada $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ má poloměr konvergence $R > 0$ a nechť $s = s(x)$ je její součtová funkce. Potom pro každé $x \in J_k = (x_0 - R, x_0 + R)$ platí

$$s'(x) = \left[\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n\right]' = \sum_{n=0}^{+\infty} [a_n(x-x_0)^n]' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}.$$

**Věta 2.10.** ( mocninný rozvoj )

Říkáme, že **funkci $f$ lze rozvinout v mocninnou řadu se středem v bodě** $x_0$, pokud existuje mocninná řada $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ s poloměrem konvergence $R > 0$ tak, že její součtová funkce $s$ je rovna funkci $f$ na nějakém okolí $U(x_0)$, tj.

$$s(x) = f(x), \qquad x \in U(x_0) \cap J_k = (x_0 - R, x_0 + R).$$

Tato mocninná řada se nazývá **mocninný rozvoj funkce $f$ se středem v bodě** $x_0$.

**Věta 2.11.** ( o koeficientech mocninného rozvoje )

Je-li funkce $f$ rozvinutelná v mocninnou řadu $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ se středem v bodě $x_0$, potom koeficienty $a_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, tohoto rozvoje jsou jednoznačně určeny

$$\forall n \in \mathbb{N}_0: \; a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

**Definice 2.12.** ( Taylorova a Maclaurinova řada )

Mocninná řada se středem v bodě $x_0$ ve tvaru

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots$$

se nazývá **Taylorova řada funkce $f$ se středem v bodě $x_0$** a její koeficienty jsou **Taylorovy koeficienty**. Speciálně pro $x_0 = 0$ se řada nazývá **Maclaurinova řada**.

**Věta 2.13.** ( Taylorova věta )

Nechť funkce $f$ má na nějakém okolí $U(x_0)$ bodu $x_0$ derivace až do řádu $n+1$ včetně, $n \in \mathbb{N}_0$. Potom pro každý bod $x \in U(x_0)$ platí **Taylorův vzorec**

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),$$

přičemž zbytek $R_n(x)$ v Taylorově vzorci lze vyjádřit v následujících tvarech:

1. **Lagrangeův tvar zbytku** je dán vzorcem
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$
kde $\xi$ je vhodný bod ležící mezi $x$ a $x_0$;
2. **Cauchyův tvar zbytku** je dán vzorcem
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{n!}(x-\eta)^n(x-x_0),$$
kde $\eta$ je vhodný bod ležící mezi $x$ a $x_0$;
3. **integrální tvar zbytku** je dán vzorcem
$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t.$$

**Věta 2.14.** ( nutná a postačující podmínka konvergence Taylorovy řady )

Nechť funkce $f$ má derivace všech řádů na nějakém okolí $U(x_0)$ bodu $x_0$.
Potom pro $x \in U(x_0)$ konverguje Taylorova řada funkce $f$ k funkční hodnotě $f(x)$, tj. je

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad x \in U(x_0),$$

právě tehdy, když pro toto $x \in U(x_0)$ platí

$$\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0.$$

**Definice 2.15.** ( analytická funkce )

Říkáme, že funkce $f$ je **analytická v bodě** $x_0$, pokud její Taylorova řada se středem v bodě $x_0$ konverguje k $f$ na nějakém okolí $x_0$. Taylorově řadě potom říkáme **Taylorův rozvoj funkce $f$ se středem v bodě** $x_0$.

**Věta 2.16.** ( postačující podmínka analytičnosti )

Nechť funkce $f$ má na nějakém okolí $U(x_0)$ bodu $x_0$ derivace všech řádů.
Pokud existuje číslo $M > 0$ takové, že pro všechna $x \in U(x_0)$ a pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq M,$$

potom $f$ je analytická v bodě $x_0$.

**Věta 2.17.** ( základní Maclaurinovy rozvoje )

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad x \in (-1,1),$$

$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{p}{n} x^n = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \dots, \quad x \in (-1,1), \quad p \in \mathbb{R},$$

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad x \in (-1,1\rangle,$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[(2n-1)!!]^2 x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \dots, \quad x \in \langle -1,1\rangle,$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad x \in \langle -1,1\rangle,$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{argsinh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{[(2n-1)!!]^2 x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112} + \dots, \quad x \in \langle -1,1\rangle,$$

$$\operatorname{argtgh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots, \quad x \in (-1,1).$$