# Kapitola 1. Funkční posloupnosti a řady

**Definice 1.1.** ( funkční posloupnosti )

**Funkční posloupnost** ( = **posloupnost funkcí** ) je zobrazení, které každému přirozenému číslu $n \in \mathbb{N}$ přiřazuje právě jednu funkci $f_n$ definovanou na množině $D \subset \mathbb{R}$:

$$n \mapsto f_n(x), \quad x \in D.$$

Funkce $f_n$ se nazývá **$n$-tý člen funkční posloupnosti** $(f_n)$.

$$\left( \textit{píšeme:} \quad (f_n(x)), \quad (f_n(x))_{n=1}^{+\infty}, \quad (f_n(x);\ n \in \mathbb{N}), \quad (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots), \quad x \in D \right)$$

**Definice 1.2.** ( bodová konvergence )

Řekneme, že funkční posloupnost $(f_n)$

1. **konverguje v bodě $a \in D$ k číslu $b \in \mathbb{R}$**, pokud $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(a) = b$,
2. **diverguje v bodě $a \in D$**, pokud $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(a) = \pm\infty$ nebo $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(a)$ neexistuje,
3. **konverguje na množině $M \subset D$ k limitní funkci $f$**, pokud $\forall\, x \in M:\ f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$,

   $$\left( \textit{píšeme:} \quad f_n(x) \to f(x),\ x \in M; \quad f_n \overset{M}{\to} f \right)$$

4. **diverguje na množině $M \subset D$**, pokud diverguje v každém bodě $x \in M$.

**Obor konvergence** $(f_n)$ je množina $K$ všech $x \in D$, ve kterých $(f_n)$ konverguje k **limitní funkci (limitě)** $f$.

$$\left( \textit{píšeme:} \quad f_n \to f \right)$$

**Definice 1.3.** ( stejnoměrná konvergence )

Řekneme, že **funkční posloupnost** $(f_n)$ **konverguje stejnoměrně k funkci $f$ na množině $M \subset D$**, pokud platí

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, x \in M:\ n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Říkáme také, že funkce $f$ je **stejnoměrná limitní funkce (limita) funkční posloupnosti** $(f_n)$ **na množině $M$**.

$$\left( \textit{píšeme:} \quad f_n(x) \rightrightarrows f(x),\ x \in M; \quad f_n \overset{M}{\rightrightarrows} f \right)$$

**Věta 1.4. ( o vztahu mezi bodovou a stejnoměrnou konvergencí )**

Jestliže funkční posloupnost $(f_n)$ konverguje stejnoměrně na množině $M$ k limitní funkci $f$, potom konverguje bodově na $M$ k téže limitní funkci $f$.

**Věta 1.5. ( postačující podmínka stejnoměrné konvergence )**

Nechť funkční posloupnost $(f_n)$ konverguje na množině $M$ k limitní funkci $f$.
Jestliže existuje reálná posloupnost $(a_n)$ taková, že

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$,
2. pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ a pro všechna $x \in M$ platí $|f_n(x) - f(x)| \le a_n$,

potom funkční posloupnost $(f_n)$ konverguje stejnoměrně na množině $M$ k limitní funkci $f$.

**Věta 1.6. ( nutná a postačující podmínka stejnoměrné konvergence )**

Funkční posloupnost $(f_n)$ konverguje stejnoměrně na množině $M$ k limitní funkci $f$ právě tehdy, když platí

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

**Věta 1.7. ( Bolzano-Cauchyovo kritérium stejnoměrné konvergence )**

Funkční posloupnost $(f_n)$ konverguje stejnoměrně na množině $M$ k limitní funkci $f$ právě tehdy, když

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\; \forall\, m \in \mathbb{N}\; \forall\, n \in \mathbb{N}\; \forall\, x \in M: \; m > n_0 \;\wedge\; n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

**Věta 1.8. ( o záměně limit )**

Nechť funkční posloupnost $(f_n)$ konverguje stejnoměrně na množině $M$ k limitní funkci $f$, nechť $x_0$ je hromadný bod množiny $M$ a předpokládejme, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ existuje $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)$. Potom

$$\lim_{n\to+\infty} \left( \lim_{x\to x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x\to x_0} \left( \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \right) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

**Věta 1.9. ( o spojitosti limitní funkce )**

Nechť $(f_n)$ je posloupnost funkcí spojitých na intervalu $I$, která na $I$ konverguje stejnoměrně k limitní funkci $f$. Potom funkce $f$ je také spojitá na $I$.

**Věta 1.10. ( o integrování limitní funkce )**

Nechť $(f_n)$ je posloupnost funkcí integrovatelných na omezeném intervalu $I := \langle a, b \rangle$, která na něm konverguje stejnoměrně k limitní funkci $f$. Potom tato funkce $f$ je také integrovatelná na intervalu $I$ a pro každé $x \in I$ platí

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Věta 1.11. ( o derivování limitní funkce )**

Nechť $(f_n)$ je posloupnost funkcí diferencovatelných na intervalu $I$, která je konvergentní alespoň v jednom bodě $x_0 \in I$ a nechť posloupnost derivací $(f_n')$ konverguje stejnoměrně na intervalu $I$. Potom limitní funkce

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$$

je také diferencovatelná na $I$ a pro každé $x \in I$ platí

$$f'(x) = \left[\lim_{n \to +\infty} f_n(x)\right]' = \lim_{n \to +\infty} f_n'(x).$$

**Definice 1.12. ( funkční řada )**

Nechť $(f_n)$ je posloupnost funkcí $f_n$ definovaných na množině $D \subset \mathbb{R}$.
Symbol

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

se nazývá **funkční řada (řada funkcí)**, funkci $f_n$ se říká **$n$-tý člen funkční řady**.
Funkci $s_n$ určenou předpisem

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x), \quad x \in D,$$

nazýváme **$n$-tým částečným součtem fukční řady**.
Posloupnost $(s_n)$ nazýváme **posloupností částečných součtů funkční řady**.

**Definice 1.13. ( bodová konvergence funkční řady )**

Řekneme, že funkční řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$

1. **konverguje v bodě** $a \in D$, pokud konverguje číselná řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(a)$,
2. **diverguje v bodě** $a \in D$, pokud diverguje číselná řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(a)$,
3. **konverguje na množině** $M \subset D$, pokud konverguje v každém bodě $x \in M$,
4. **diverguje na množině** $M \subset D$, pokud diverguje v každém bodě $x \in M$.

**Obor konvergence** funkční řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ je množina $K$ všech $x \in D$, ve kterých funkční řada bodově konverguje k **součtové funkci (součtu)** $s(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} s_n(x)$, $x \in K$.

$$\left( \textit{píšeme:} \quad s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x), \quad s = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \right)$$

**Věta 1.14.** ( absolutní konvergence funkční řady )

Řekneme, že funkční řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ je

1. **absolutně konvergentní v bodě** $a \in D$, pokud je konvergentní číselná řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(a)|,$$

2. **absolutně konvergentní na množině** $M \subset D$, pokud je absolutně konvergentní v každém bodě $x \in M$.

**Oborem absolutní konvergence** funkční řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ nazýváme množinu $K_a$ všech čísel $x \in D$, ve kterých funkční řada konverguje absolutně.

**Věta 1.15.** ( postačující podmínka konvergence funkční řady )

Jestliže funkční řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |f_n|$ konverguje na množině $M$, potom funkční řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ konverguje na $M$.

**Věta 1.16.** ( majorantní kritérium absolutní konvergence )

Nechť je dána funkční řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, $x \in D$, a nechť $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ je číselná řada taková, že pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\forall\, x \in M \subset D: \ |f_n(x)| \leq b_n.$$

Je-li tato číselná řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergentní, potom funkční řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ je absolutně konvergentní na $M$.

**Věta 1.17.** ( stejnoměrná konvergence funkční řady )

Nechť funkční řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, $x \in D$, konverguje na svém oboru konvergence $K \subset D$ k součtové funkci $s$, tj.

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x), \quad x \in K.$$

Řekneme, že daná **funkční řada konverguje stejnoměrně na množině** $M \subset K$ **k součtové funkci** $s$, pokud na této množině $M$ konverguje stejnoměrně posloupnost $(s_n(x))$ částečných součtů funkční řady k součtové funkci $s$, tj.

$$s_n(x) \rightrightarrows s(x), \quad x \in M.$$

**Věta 1.18.** ( nutná podmínka stejnoměrné konvergence funkční řady )

Nechť funkční řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na množině $M$.
Potom funkční posloupnost $(f_n)$ konverguje stejnoměrně na množině $M$ k nulové limitní funkci $f(x) = 0$, tj.

$$f_n(x) \rightrightarrows 0, \quad x \in M.$$

**Věta 1.19.** **( Cauchyovo kritérium stejnoměrné konvergence funkční řady )**

Funkční řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na množině $M$ právě tehdy, když

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\,n \in \mathbb{N}\ \forall\,p \in \mathbb{N}\ \forall\,x \in M:\ n > n_0 \quad \Rightarrow \quad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| < \varepsilon.$$

**Věta 1.20.** **( Weierstrassovo kritérium stejnoměrné konvergence funkční řady )**

Nechť je dána funkční řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, $x \in D$, a nechť $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ je číselná řada taková, že pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\forall\,x \in M \subset D:\ |f_n(x)| \le b_n.$$

Je-li tato číselná řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergentní, potom funkční řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ je stejnoměrně konvergentní na $M$.

**Věta 1.21.** **( o spojitosti součtové funkce )**

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ je funkční řada, která konverguje stejnoměrně na intervalu $I$ k součtové funkci $s$. Jestliže všechny členy funkční řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ jsou funkce spojité na $I$, potom také součtová funkce $s$ je spojitá na $I$.

**Věta 1.22.** **( o integrování funkční řady )**

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ je funkční řada, která konverguje stejnoměrně na omezeném intervalu $I$ k součtové funkci $s$.
Jestliže všechny členy funkční řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ jsou funkce integrovatelné na $I$, potom pro každé $x_0, x \in I$ konverguje také funkční řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)\ \mathrm{d}t$ a její součet je $\int\limits_{x_0}^{x} s(t)\ \mathrm{d}t$, tj.

$$\int_{x_0}^{x} s(t)\ \mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\right)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)\ \mathrm{d}t.$$

**Věta 1.23.** **( o derivování funkční řady )**

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ je funkční řada, jejíž všechny členy $f_n$ mají derivace $f_n'$ na intervalu $I$.
Jestliže funkční řada derivací $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n'$ je stejnoměrně konvergentní na $I$ a je-li funkční řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ konvergentní alespoň v jednom bodě $x_0 \in I$, potom je konvergentní na celém intervalu $I$, a to stejnoměrně.
Navíc, pro součtovou funkci $s$ funkční řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ platí

$$\forall\,x \in I:\ s'(x) = \left[\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right]' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x).$$