Sbírka úloh z matematické analýzy 2.

Čížek Jiří — Kubr Milan

5. prosince 2006

Obsah

Kapitola 1

Neurčitý integrál.

Integrační vzorce.

Funkce $f(x)$	$\int f(x)\,dx$	Podmínky
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	$n\in\mathbf{N}, x\in\mathbf{R}$
x^a	$\frac{x^{a+1}}{a+1}+C$	$a\in\mathbf{R}, a\neq -1, x\in(0,+\infty)$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+C$	$x\in\mathbf{R}-\{0\}$
e^x	e^x+C	$x\in\mathbf{R}$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+C$	$x\in\mathbf{R}, a>0, a\neq 1$
$\sin x$	$-\cos x+C$	$x\in\mathbf{R}$
$\cos x$	$\sin x+C$	$x\in\mathbf{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}x+C$	$x\in\mathbf{R}, x\neq\frac{(2k+1)\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{cotg}x+C$	$x\in\mathbf{R}, x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x+C$	$x\in(-1,1)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg}\,x+C$	$x\in\mathbf{R}$
$\mathrm{sh}x$	$\mathrm{ch}x+C$	$x\in\mathbf{R}$
$\mathrm{ch}x$	$\mathrm{sh}x+C$	$x\in\mathbf{R}$
$\frac{1}{\mathrm{ch}^2x}$	$\mathrm{th}x+C$	$x\in\mathbf{R}$
$\frac{1}{\mathrm{sh}^2x}$	$-\mathrm{cth}x+C$	$x\in\mathbf{R}-\{0\}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$	$x\in\mathbf{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\lvert x+\sqrt{x^2-1}\rvert+C$	$x\in\mathbf{R}-\langle -1,1\rangle$

Poznámka: Také lze psát

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\arccos x+C \qquad \int\frac{dx}{1+x^2}=-\mathrm{arccotg}\,x+C,$$

poněvadž platí

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},\ \ x\in\langle -1,1\rangle \qquad \mathrm{arctg}\,x+\mathrm{arccotg}\,x=\frac{\pi}{2},\ \ x\in\mathbf{R}.$$

1.1 Základní integrály.

Poznámka: Ve všech výsledcích této kapitoly je vynechána integrační konstanta.

1. Užitím základních integračních vzorců vypočtěte $\int f(x)\,dx$, je-li

(a) $f(x) = \sqrt{x}$; $\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]$

(b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $\left[-\frac{1}{x}\right]$

(c) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$; $\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x}\right]$

(d) $f(x) = \frac{(1-x)^2}{x}$; $\left[\ln|x| - 2x + \frac{x^2}{2}\right]$

(e) $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}$; $\left[\frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3} + \frac{4}{\sqrt[4]{x}}\right]$

(f) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[4]{x}}$; $\left[\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} - \frac{24}{13}x\sqrt[12]{x} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}\right]$

(g) $f(x) = \frac{(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x})^2}{x}$; $\left[2x - \frac{12\sqrt{2}\sqrt[3]{3}}{5}\sqrt[6]{x^5} + \frac{3\sqrt[3]{9}}{2}\sqrt[3]{x^2}\right]$

(h) $f(x) = (1-x)(1-2x)(1-3x)$; $\left[x - 3x^2 + \frac{11}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4\right]$

(i) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-3x^2}}$; $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin x\right]$

(j) $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$; $[x - \operatorname{arctg} x]$

(k) $f(x) = \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}$; $\left[\operatorname{arctg} x - \frac{1}{x}\right]$

(l) $f(x) = a^x e^x, a \neq e^{-1}$; $\left[\frac{a^x e^x}{1+\ln a}\right]$

(m) $f(x) = \frac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{2^x}$; $\left[3x - \frac{2\cdot 1{,}5^x}{\ln(1{,}5)}\right]$

(n) $f(x) = \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}$; $\left[\frac{1}{5\ln 2}\left(\frac{1}{2}\right)^x - \frac{2}{\ln 5}\left(\frac{1}{5}\right)^x\right]$

(o) $f(x) = 1 + \sin x + \cos x$; $[x - \cos x + \sin x]$

(p) $f(x) = \arcsin x + \arccos x$; $\left[\frac{\pi}{2}x\right]$

(q) $f(x) = \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}$; $\left[\ln|x| - \frac{1}{4x^4}\right]$

(r) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$; $[\operatorname{tg} x - x]$

(s) $f(x) = \operatorname{cotg}^2 x$; $[-\operatorname{cotg} x - x]$

(t) $f(x) = \operatorname{th}^2 x$; $[x - \operatorname{th} x]$

(u) $f(x) = \operatorname{cth}^2 x$; $[x - \operatorname{cth} x$; v příkladech t) a u) užijte vztahu $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1]$

(v) $f(x) = 2\sin^2\frac{x}{2}$; $[x - \sin x]$

(w) $f(x) = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}$; $[-\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x]$

(x) $f(x) = \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}$; $\left[\frac{1}{2}(\operatorname{tg} x + x)\right]$

(y) $f(x) = \frac{x^4}{1+x^2}$; $\left[\frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x\right]$

(z) $f(x) = \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}$; $\left[\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x\right]$

2. Nechť $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ (t.j. F je primitivní funkce k f). Ukažte, že pro $a \neq 0$ platí

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Řešení: Platí

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{a}F(ax+b)+C\right\} = \frac{1}{a}\frac{d}{dx}F(ax+b) = \frac{1}{a}F'(ax+b)\,a = f(ax+b).$$

3. Užitím předchozího vzorce vypočtěte $\int f(x)\,dx$, je-li

(a) $f(x) = (x+1)^{15}$; $\left[\frac{1}{16}(x+1)^{16}\right]$

(b) $f(x) = \frac{1}{(2x-3)^5}$; $\left[-\frac{1}{8(2x-3)^4}\right]$

(c) $f(x) = \sqrt{8-2x}$; $\left[\frac{1}{3}(2x-8)\sqrt{8-2x}\right]$

(d) $f(x) = (8-3x)\sqrt[5]{8-3x}$; $\left[\frac{5}{33}(8-3x)^2\sqrt[5]{3x-8}\right]$

(e) $f(x) = \frac{1}{(5x-2)^{5/2}}$; $\left[\frac{2}{15(2-5x)\sqrt{5x-2}}\right]$

(f) $f(x) = \frac{1}{2+3x^2}$; $\left[\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}x\right]$

(g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-5x^2}}$; $\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\sqrt{\frac{5}{2}}x\right]$

(h) $f(x) = e^{-x} + e^{-2x}$; $\left[-e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-2x}\right]$

(i) $f(x) = \sin 5x - \sin 5\alpha$; $\alpha \in \mathbf{R}$; $\left[-\frac{1}{5}\cos 5x - x\sin 5\alpha\right]$

(j) $f(x) = \frac{1}{\sin^2(2x+\pi/4)}$; $\left[-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

(k) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}$; $\left[2\operatorname{th}\frac{x}{2}\right]$

(l) $f(x) = \frac{1}{1+\cos x}$; $\left[\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right]$

(m) $f(x) = \frac{1}{1-\cos x}$; $\left[-\operatorname{cotg}\frac{x}{2}\right]$

(n) $f(x) = \frac{1}{1+\sin x}$; $\left[\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right);\ \text{užijte vztahu}\ \sin x = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

(o) $f(x) = \frac{1}{4x^2+4x+5}$; $\left[\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{2}\right]$

(p) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$; $\left[\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x+1}{\sqrt{3}}\right]$

4. Ukažte, že

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

na vnitřku M definičního oboru funkce $\frac{f'(x)}{f(x)}$.

Řešení: Pro $x \in M$ je $\frac{d}{dx}[\ln|f(x)| + C] = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

5. Užitím předchozího vzorce vypočtěte $\int f(x)\,dx$ (v příkladech (h)-(l) určete množinu M z příkladu 4.) , je-li

(a) $f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$; $\left[\frac{1}{3}\ln|x^3+1|\right]$

(b) $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$; $[\ln(e^x+1)]$

(c) $f(x) = \operatorname{cotg}x$; $[\ln|\sin x|]$

(d) $f(x) = \operatorname{tg}x$; $[-\ln|\cos x|]$

(e) $f(x) = \mathrm{th}x$; $[\ln \mathrm{ch}x]$

(f) $f(x) = \mathrm{cth}x$; $[\ln |\mathrm{sh}x|]$

(g) $f(x) = \frac{e^{2x}}{1-3e^{2x}}$; $\left[-\frac{1}{6}\ln|1-3e^{2x}|\right]$

(h) $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$; $[\ln|\ln x|]$

(i) $f(x) = \frac{1}{x(1+\ln x)}$; $[\ln|1+\ln x|]$

(j) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,\arcsin x}$; $[\ln|\arcsin x|]$

(k) $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin x\,\cos x}$; $[\ln|\sin 2x|]$

(l) $f(x) = \frac{\cos x}{1+2\sin x}$; $\left[\frac{1}{2}\ln|1+2\sin x|\right]$

(m) $f(x) = \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}$; $[-\ln(1+\cos^2 x)]$

6. Užitím substituce vypočtěte $\int f(x)\,dx$, je-li

(a) $f(x) = \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}$; (b) $f(x) = \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}$; (c) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}$;

(d) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$; (e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$;

Řešení:

(a) Platí

$$\int \frac{2^x\,dx}{\sqrt{1-4^x}} = \left| \begin{array}{l} 2^x = t \\ 2^x dx = \frac{dt}{\ln 2} \end{array} \right| = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\ln 2}\arcsin t + C = \frac{\arcsin 2^x}{\ln 2} + C$$

pro $x \in (-\infty, 0)$.

(b) Daný integrál rozdělíme nejdříve na dva integrály. Platí

$$I = \int \frac{2x - \sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

V prvém integrálu zavedeme substituci $1 - x^2 = t$, neboli $2xdx = -dt$; ve druhém $\arcsin x = u$, tedy $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = du$. Odtud plyne, že

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} - \int \sqrt{u}\,du = -2\sqrt{t} - \frac{2}{3}u\sqrt{u} + C = -2\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{\arcsin^3 x} + C$$

pro $x \in (0, 1)$.

(c) Položíme-li $u = \ln\frac{1+x}{1-x}$, platí $du = \frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}\,dx = \frac{2dx}{1-x^2}$ a tedy

$$\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx = \frac{1}{2}\int u\,du = \frac{1}{4}u^2 + C = \frac{1}{4}\ln^2\frac{1+x}{1-x} + C$$

pro $x \in (-1, 1)$. Všiměte si, že f je lichá a F sudá.

(d) Platí

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

pro $x \neq k\pi$ podle příkladu 4.

(e) Výsledek najdete v úvodní tabulce. Získáme jej substitucí $x = \mathrm{sh}t$. Platí

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \left| \begin{array}{l} x = \mathrm{sh}t \\ dx = \mathrm{ch}t\, dt \end{array} \right| = \int dt = t + C = \mathrm{argsh}x + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C.$$

Tento integrál je však možné vypočítat i bez znalosti hyperbolických funkcí. Substituce $x = \mathrm{cotg}\, t$, $t \in (0, \pi)$, $dx = -\frac{dt}{\sin^2 t}$, převádí obecně integrál $\int R(x, \sqrt{1+x^2})\, dx$ z racionální funkce R v proměnných $x, \sqrt{1+x^2}$ na integrál $\int R_1(\sin t, \cos t)\, dt$ z racionální funkce R_1 v proměnných $\sin t, \cos t$, který se naučíme řešit v odstavci 1.3. V našem případě dostaneme

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = -\int \frac{\frac{dt}{\sin^2 t}}{\sqrt{\mathrm{cotg}^2 t + 1}} = -\int \frac{dt}{\sin t} = -\ln\left|\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right| + C = \ln\left|\mathrm{cotg}\frac{t}{2}\right| + C$$

podle příkladu (d). Dále platí

$$x = \mathrm{cotg}t = \frac{\mathrm{cotg}^2\frac{t}{2} - 1}{2\mathrm{cotg}\frac{t}{2}} \text{ a odtud } \mathrm{cotg}^2\frac{t}{2} - 2x\,\mathrm{cotg}\frac{t}{2} - 1 = 0,$$

neboli $\left(\mathrm{cotg}\frac{t}{2}\right)_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2+1}$. Poněvadž $\frac{t}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, je $\mathrm{cotg}\frac{t}{2} > 0$ a musíme vyloučit znaménko "$-$" (pro všechna $x \in \mathbf{R}$ je $x - \sqrt{x^2+1} < 0$). To nám dává konečný výsledek

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Poznámka: Jako v příkladu 6(d) lze substitucí $x = \frac{1}{\sin t}, t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ vypočítat

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C, \quad x \in (1, +\infty).$$

Protože $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ je sudá, primitivní funkce $F(x) = \ln|x + \sqrt{x^2-1}|$ je lichá a protože $D(f) = D(F) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, platí i poslední vzorec úvodní tabulky.

7. Pomocí věty o substituci najděte $\int f(x)\, dx$, je-li

(a) $f(x) = \sin^2 x \cos x$; $\left[\frac{1}{3}\sin^3 x\right]$

(b) $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^3}$; $\left[-\frac{1}{4(1+x^2)^2}\right]$

(c) $f(x) = \frac{x^4}{(x^5+1)^4}$; $\left[-\frac{1}{15(x^5+1)^3}\right]$

(d) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; $[\sqrt{x^2+1}]$

(e) $f(x) = x^2 \sqrt[3]{1+x^3}$; $\left[\frac{1}{4}(1+x^3)\sqrt[3]{1+x^3}\right]$

(f) $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^4+1}}$; $\left[\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^4+1)^2}\right]$

(g) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $[-\sqrt{1-x^2}]$

(h) $f(x) = xe^{-x^2}$; $\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]$

(i) $f(x) = e^{\cos x} \sin x$; $[-e^{\cos x}]$

(j) $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$; $\left[\frac{1}{3}\ln^3 x\right]$

(k) $f(x) = \frac{\mathrm{arctg}\, x}{1+x^2}$; $\left[\frac{1}{2}\mathrm{arctg}^2 x\right]$

(l) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \sqrt[4]{\mathrm{cotg} x}}$; $\left[-\frac{4}{3}\sqrt[4]{\mathrm{cotg}^3 x}\right]$

(m) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}$; $\left[\frac{2}{\sqrt{\cos x}}\right]$

(n) $f(x) = \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}$; $\left[-\sin \frac{1}{x}\right]$

(o) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}$; $\left[\frac{3}{2} \sqrt[3]{1 - \sin 2x}\right]$

(p) $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$; $\left[2e^{\sqrt{x}}\right]$

(q) $f(x) = \frac{x}{x^4+1}$; $\left[\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\, x^2\right]$

(r) $f(x) = \frac{1}{\cos x}$; $\left[\ln \left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\right.$, užijte vztahu $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ a příkladu 6(d)]

(s) $f(x) = \frac{1}{\mathrm{sh} x}$; $\left[\ln \left|\mathrm{th} \frac{x}{2}\right|\right.$, užijte vztahu $\mathrm{sh} x = 2\mathrm{sh}\frac{x}{2}\mathrm{ch}\frac{x}{2}$ a postupu z příkladu 6(d)]

(t) $f(x) = \frac{1}{\mathrm{ch} x}$; $[2\mathrm{arctg}\, e^x]$

(u) $f(x) = \frac{e^{\mathrm{tg} x} + \mathrm{cotg} x}{\cos^2 x}$; $[e^{\mathrm{tg} x} + \ln|\mathrm{tg} x|$, rozdělte daný integrál na dva]

(v) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$; $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg} x}{\sqrt{2}}\right)\right.$, vydělte čitatele i jmenovatele $\left.\cos^2 x\right]$

Poznámka: Funkce $F_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg} x}{\sqrt{2}}\right)$ je primitivní k funkci f v množině

$$M = D(F_1) = \mathbf{R} - \left\{(2k+1)\,\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

Pro funkci F, s $D(F) = \mathbf{R}$, která je dána předpisem

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{k\pi}{\sqrt{2}},\quad x \in \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right);\ k \in \mathbf{Z},$$

platí $F'(x) = f(x)$, $x \in \mathbf{R}$ a F je tedy spojitá v $\mathbf{R}$. Přesvědčte se o tom. Graf funkce F jsme „slepili“ posouváním částí grafu F_1. Nakreslete obrázek a vše si rozmyslete.

(w) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

$[-\arcsin \frac{1}{|x|}$; pro $x > 1$ vytkněte x z $\sqrt{x^2 - 1}$ a výsledek rozšiřte sudě na $\mathbf{R} - \langle -1, 1\rangle]$

(x) $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{2 + \cos 2x}}$; $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x\right)\right.$,

vyjádřete $\cos 2x$ pomocí $\sin^2 x$; „slepte“ opět primitivní funkci k f na celém $\mathbf{R}$]

(y) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$; $[x - \ln(1 + \sqrt{1 + e^{2x}})$; vytkněte e^x z $\sqrt{1 + e^{2x}}$ a užijte příkladu 6(d)]

(z) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}$; $[-2\arcsin e^{-\frac{x}{2}}$, vytkněte $e^{x/2}$ z $\sqrt{e^x - 1}]$

8. Užitím integrace per partes vypočtěte $\int f(x)\,dx$, je-li

(a) $f(x) = x^3 e^{-x^2}$; (b) $f(x) = x^n \ln x, n \neq -1$; (c) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$;

(d) $f(x) = x^2 \ln \frac{1-x}{1+x}$; (e) $f(x) = \arcsin^2 x$; (f) $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}, a > 0$;

(g) $f(x) = e^{ax}\cos bx$, (resp. $e^{ax}\sin bx$), $a^2 + b^2 > 0$; (h) $f(x) = \ln^n x, n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$;

(i) $f(x) = x^n e^{ax}$, $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $a \neq 0$; (j) $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$, $n \in \mathbf{N}$.

Řešení:

(a) Do integrálu $\mathcal{I} = \int x^3 e^{-x^2} dx$ zavedeme nejdříve substituci $x^2 = t$; odtud $xdx = \frac{dt}{2}$. Je tedy

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2}\int te^{-t}\,dt = \left|\begin{array}{ll} u = t & v' = e^{-t} \\ u' = 1 & v = -e^{-t} \end{array}\right| = -\frac{1}{2}te^{-t} + \frac{1}{2}\int e^{-t}dt =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-t}(t+1) + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^2+1) + C.$$

(b) Platí

$$\int x^n \ln x\,dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & v' = x^n \\ u' = \frac{1}{x} & v = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ (\text{je}\, n \neq -1) \end{vmatrix} = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n dx =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)\ln x - 1] + C.$$

Pro $n = -1$ se daný integrál řeší substitucí $t = \ln x$ (viz příklad 7(j)).

(c) Platí

$$\int \ln(x + \sqrt{1+x^2})\,dx = \begin{vmatrix} u = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & v = x \end{vmatrix} =$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C$$

(d) Je

$$\int x^2 \ln\frac{1-x}{1+x}dx = \begin{vmatrix} u = \ln\frac{1-x}{1+x} & v' = x^2 \\ u' = -\frac{2}{1-x^2} & v = \frac{x^3}{3} \end{vmatrix} = \frac{x^3}{3}\ln\frac{1-x}{1+x} + \frac{2}{3}\int\frac{x^3dx}{1-x^2} =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln\frac{1-x}{1+x} + \frac{2}{3}\int\frac{x^3 - x + x}{1-x^2}dx = \frac{x^3}{3}\ln\frac{1-x}{1+x} - \frac{2}{3}\int x\,dx + \frac{2}{3}\int\frac{x}{1-x^2}dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln\frac{1-x}{1+x} - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}\ln|1-x^2| + C = \frac{1}{3}\left[x^3\ln\frac{1-x}{1+x} - x^2 - \ln(1-x^2)\right] + C.$$

Podmínka $1 - x^2 > 0$ je splněna, neboť funkce $\ln\frac{1-x}{1+x}$ je definována pro $\frac{1-x}{1+x} > 0$, t. j. pro $x \in (-1, 1)$.

(e) Je

$$\int \arcsin^2 x\,dx = \begin{vmatrix} u = \arcsin x & v' = 1 \\ u' = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} & v = x \end{vmatrix} = x\arcsin^2 x - 2\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\,dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = \arcsin x & v' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & v = -\sqrt{1-x^2} \end{vmatrix} = x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\,\arcsin x - 2\int dx =$$

$$= x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\,\arcsin x - 2x + C.$$

Tento integrál lze řešit i substitucí $x = \sin t, t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(f) Platí

$$\mathcal{I} = \int\sqrt{a^2 - x^2}dx = \begin{vmatrix} u = \sqrt{a^2-x^2} & v' = 1 \\ u' = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} & v = x \end{vmatrix} = x\sqrt{a^2-x^2} + \int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Jestliže v posledním integrálu odečteme a přičteme a^2, dostaneme

$$\mathcal{I} = x\sqrt{a^2-x^2} + \int\left(\frac{x^2-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx +$$

$$+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = x\sqrt{a^2-x^2} - \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx + a^2\arcsin\frac{x}{a}.$$

Pro hledaný integrál $\mathcal{I}$ dostáváme rovnici $\mathcal{I} = x\sqrt{a^2-x^2} - \mathcal{I} + a^2\arcsin\frac{x}{a}$ a jejím řešením je

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right) + C.$$

Poznámka: Integrály typu $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\,dx$, kde R je racionální funkce v proměnných x a $\sqrt{a^2 - x^2}$, se obecně řeší substitucí $x = a\sin t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Vypočtěte tímto postupem znovu příklad 8(f) a posuďte, který výpočet je jednodušší.

(g) Pro $a \neq 0$ je

$$\mathcal{I} = \int e^{ax}\cos bx\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \cos bx & v' = e^{ax} \\ u' = -b\sin bx & v = \frac{1}{a}e^{ax} \end{array} \right| = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \sin bx & v' = e^{ax} \\ u' = b\cos bx & v = \frac{1}{a}e^{ax} \end{array} \right| = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx - \frac{b^2}{a^2}\mathcal{I}.$$

Z dané rovnice vypočteme

$$\mathcal{I} = \int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C.$$

Integrál $\mathcal{K} = \int e^{ax}\sin bx\,dx$ můžeme vypočítat stejným způsobem nebo využít předchozího výpočtu. Platí totiž $\mathcal{I} = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\mathcal{K}$ a odtud

$$\mathcal{K} = \int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a}\left(\mathcal{I} - \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx\right) + C = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C.$$

Pro $a = 0$ a $b \neq 0$ je výpočet obou integrálů jednoduchý a odvozené vzorce rovněž platí.

Poznámka: Ten, kdo zná Eulerův vztah

$$e^{a+ib} = e^a(\cos b + i\sin b),$$

může uvedený integrál vypočítat následujícím způsobem:

$$\mathcal{I} + i\mathcal{K} = \int e^{(a+ib)x}dx = \frac{e^{(a+ib)x}}{a + ib} = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(\cos bx + i\sin bx)(a - ib) =$$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\left[(a\cos bx + b\sin bx) + i(a\sin bx - b\cos bx)\right].$$

Oddělením reálné a imaginární části v tomto vztahu dostaneme oba vzorce pro $\mathcal{I}$ i $\mathcal{K}$ současně.

(h) Jestliže označíme $\mathcal{I}_n = \int \ln^n x\,dx$, dostaneme

$$\mathcal{I}_n = \left| \begin{array}{ll} u = \ln^n x & v' = 1 \\ u' = \frac{n\ln^{n-1}x}{x} & v = x \end{array} \right| = x\ln^n x - n\int \ln^{n-1}x\,dx = x\ln^n x - n\mathcal{I}_{n-1},$$

tedy posloupnost $\{\mathcal{I}_n\}_{n=1}^{\infty}$ je určena rekurentně prvým členem $\mathcal{I}_0 = x$ a rekurentní formulí

$$\mathcal{I}_n = x\ln^n x - n\mathcal{I}_{n-1}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Odtud

$$\mathcal{I}_1 = \int \ln x\,dx = x\ln x - x, \;\; \mathcal{I}_2 = \int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x \;\text{ atd.}$$

(i) Analogicky jako v předchozím příkladu můžeme psát

$$\mathcal{I}_n = \int x^n e^{ax}\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^n & v' = e^{ax} \\ u' = nx^{n-1} & v = \frac{1}{a}e^{ax} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x^n}{a}e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx = \frac{x^n}{a}e^{ax} - \frac{n}{a}\mathcal{I}_{n-1},$$

tedy opět dostaneme rekurentní formuli

$$\mathcal{I}_n = \frac{x^n}{a}e^{ax} - \frac{n}{a}\mathcal{I}_{n-1}.$$

Vypočtěte $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3$, víte-li, že $\mathcal{I}_0 = \frac{e^{ax}}{a}$.

(j) Označme $\mathcal{K}_n = \int \frac{dx}{(1+x^n)}$. Potom platí

$$\mathcal{K}_n = \left| \begin{array}{ll} u = \frac{1}{(1+x^2)^n} & v' = 1 \\ u' = -\frac{2nx}{(1+x^2)^{n+1}} & v = x \end{array} \right| = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^{n+1}} =$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\mathcal{K}_n - 2n\mathcal{K}_{n+1}.$$

Z rovnice $\mathcal{K}_n = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\mathcal{K}_n - 2n\mathcal{K}_{n+1}$ dostaneme rekurentní formuli

$$\mathcal{K}_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\mathcal{K}_n,$$

odkud můžeme postupně spočítat $\mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3, \ldots$, neboť $\mathcal{K}_1 = \operatorname{arctg} x$.

Poznámka: Této rekurentní formule budeme v dalším používat při integraci racionální funkce, jejíž jmenovatel má komplexní vícenásobné kořeny a při výpočtu integrálů, které se na integrály z racionálních funkcí zmíněného typu převádějí.

9. Vypočtěte $\int f(x)\,dx$, je-li

(a) $f(x) = \ln x$; [$x\ln x - x$, srovnejte s příkladem 8(b)]

(b) $f(x) = xe^{-x}$; [$-e^{-x}(x+1)$, srovnejte s příkladem 8(i)]

(c) $f(x) = x\cos x$; [$x\sin x + cosx$]

(d) $f(x) = x\,\mathrm{sh}x$; [$x\mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x$]

(e) $f(x) = x^2e^{-2x}$; [$-\frac{1}{4}e^{-2x}(2x^2+2x+1)$, srovnejte s příkladem 8(i)]

(f) $f(x) = x^2\sin 2x$; [$\frac{1}{4}(\cos 2x + 2x\sin 2x - 2x^2\cos 2x)$]

(g) $f(x) = \operatorname{arctg} x$; [$x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$]

(h) $f(x) = \arcsin x$; [$x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$]

(i) $f(x) = x^3\mathrm{ch}3x$; [$\left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x}{9}\right)\mathrm{sh}3x - \left(\frac{x2}{3} + \frac{2}{27}\right)\mathrm{ch}3x$]

(j) $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$; [$x\mathrm{tg}x + \ln|\cos x|$]

(k) $f(x) = x\operatorname{arctg} x$; [$\frac{1}{2}(x^2\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x - x)$]

(l) $f(x) = x\cos^2 x$; [$\frac{1}{8}(2x^2 + 2x\sin 2x + \cos 2x)$, užijte vzorec $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$]

(m) $f(x) = \ln(x^2+1)$; [$x\ln(x^2+1) + 2\operatorname{arctg} x - 2x$]

(n) $f(x) = x\mathrm{tg}^2x$; [$x\mathrm{tg}x + \ln|\cos x| - \frac{x^2}{2}$]

(o) $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}$; [$2\sqrt{x+1}\arcsin x + 4\sqrt{1-x}$]

(p) $f(x) = x^5e^{x^3}$; [$\frac{1}{3}e^{x^3}(x^3-1)$, zaveďte substituci $x^3 = t$]

(q) $f(x) = \sqrt{x}\ln^2 x$; [$\frac{3}{27}x\sqrt{x}(9\ln^2 x - 12\ln x + 8)$]

(r) $f(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$; $\quad\left[-\frac{1}{x}(\ln^2 x + 2\ln x + 2)\right]$

(s) $f(x) = x^2 \arccos x$; $\quad\left[\frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{x^2+2}{9}\sqrt{1-x^2}\right]$

(t) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$; $\quad[2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)]$

(u) $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$; $\quad[x\operatorname{arctg}\sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x}]$

(v) $f(x) = x\sin\sqrt{x}$; $\quad[2(6-x)\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - 6(2-x)\sin\sqrt{x}$,
v příkladech (t)-(v) užijte substituce $\sqrt{x} = t]$

(w) $f(x) = x\operatorname{arctg}^2 x$; $\quad\left[\frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg}^2 x - x\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]$

(x) $f(x) = \sqrt{x^2+a^2}$; $\quad\left[\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\right\}\right.$,
užijte postupů z příkladů 8(f) a 6(e)]

(y) $f(x) = e^{3x}(\sin 2x - \cos 2x)$; $\quad\left[\frac{e^{3x}}{13}(\sin 2x - 5\cos 2x)\right.$, užijte příklad 8(g)]

(z) $f(x) = e^{2x}\sin^2 x$; $\quad\left[\frac{e^{2x}}{8}(2-\cos 2x - \sin 2x)\right.$,
užijte vzorec $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ a příklad 8(g)]

10. Vypočtěte $\int f(x)\,dx$, je-li

(a) $f(x) = \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}$, (b) $f(x) = \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}$, (c) $f(x) = \frac{1}{x^3+1}$,

(d) $f(x) = \frac{1}{x^4+1}$, (e) $f(x) = \frac{2x}{(1+x)(1+x^2)^2}$, (f) $f(x) = \frac{(x+1)^4}{(x^2+2x+2)^3}$.

Řešení:

(a) Poněvadž je daná racionální funkce neryze lomená, musíme nejdříve provést dělení:

$$(x^5+x^4-8) : (x^3-4x) = x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}.$$

Poslední zlomek je již racionální ryze lomená funkce, kterou rozložíme na součet parciálních zlomků.

$$\frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2},$$

kde A, B, C jsou zatím neznámé konstanty. Vynásobením rovnosti výrazem $x(x^2-4)$ dostaneme

$$4x^2+16x-8 = A(x^2-2) + B(x^2+2x) + C(x^2-2x).$$

Položíme-li $x = 0$, dostaneme pro neznámou A rovnici $-8 = -4A \;\Rightarrow\; A = 2$. Analogicky dosazením $x = 2$ dostaneme $40 = 8B \;\Rightarrow\; B = 5$, dosazením $x = -2$ dostaneme $-24 = 8C \;\Rightarrow\; C = -3$. Pro $x \neq 0, x \neq \pm 2$ je tedy

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx = \int x^2\,dx + \int x\,dx + 4\int dx + 2\int\frac{dx}{x} + 5\int\frac{dx}{x-2} - 3\int\frac{dx}{x+2}\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2\ln|x| + 5\ln|x-2| - 3\ln|x+2| + C = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right| + C.$$

(b) Danou racionální funkci rozložíme na součet parciálních zlomků. Platí

$$\frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-2} + \frac{E}{(x-2)^2}.$$

Odtud

$$x^3-2x^2+4 = Ax^2(x-2)^2 + Bx(x-2)^2 + C(x-2)^2 + Dx^3(x-2) + Ex^3.$$

Srovnáním koeficientů u odpovídajících si mocnin dostaneme soustavu lineárních algebraických rovnic

$$\begin{array}{rrrrrrr}
x^4: & 0 = & A & & & +D & \\
x^3: & 1 = & -4A & +B & & -2D & +E \\
x^2: & -2 = & 4A & -4B & +C & & \\
x^1: & 0 = & & 4B & -4C & & \\
x^0: & 4 = & & & 4C & &
\end{array}$$

Řešením soustavy rovnic dostaneme

$$C = 1\,,\ \ B = 1\,,\ \ A = \frac{1}{4}\,,\ \ D = -\frac{1}{4}\,,\ \ E = \frac{1}{2}.$$

je nyní

$$\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}\,dx = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x} + \int\frac{dx}{x^2} + \int\frac{dx}{x^3} - \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2(x-2)} + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right| - \frac{3x^2-3x-2}{2x^2(x-2)} + C.$$

Poznámka: (Ostrogradského metoda)

Je-li $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ryze lomená racionální funkce, kde $Q(x) = \prod\limits_{i=1}^{k}(x-\alpha_i)^{k_i}$ (t.j. polynom Q má kořeny α_i s násobností k_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, při čemž α_i mohou být komplexní). Označme

$$Q_1(x) = \prod_{i=1}^{k}(x-\alpha_i)\,, \quad Q_2(x) = \frac{Q(x)}{Q_1(x)}.$$

V předchozím příkladu 10(b) je $Q(x) = x^3(x-2)^2$, $Q_1(x) = x(x-2)$. Potom je

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} + \int\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\,dx,$$

kde funkce $\frac{P_1}{Q_1}$ a $\frac{P_2}{Q_2}$ jsou ryze lomené racionální funkce. V předchozím příkladu 10(b) je výraz $\frac{P_2}{Q_2}$ součet integrálů všech parciálních zlomků, které mají ve jmenovateli vyšší mocninu kořenového činitele než 1, t.j.

$$\frac{P_2}{Q_2} = \int\frac{dx}{x^2} + \int\frac{dx}{x^3} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-2)^2},$$

výraz $\frac{P_1}{Q_1}$ je součet prvního a čtvrtého parciálního zlomku, t.j.

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{4x} - \frac{1}{4(x-2)}.$$

Musíme určit polynomy P_1 a P_2; zapíšeme je pomocí neurčitých koeficientů

$$\int\frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}\,dx = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^2(x-2)} + \int\frac{Dx+E}{x(x-2)}\,dx.$$

Tuto rovnost zderivujeme a vynásobíme nejmenším společným jmenovatelem všech zlomků. Dostaneme tak

$$\frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2} = \frac{2Ax+B}{x^2(x-2)} - 2\,\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3(x-2)} - \frac{Ax^2+Bx+C}{x^2(x-2)^2} + \frac{Dx+E}{x(x-2)}$$

a dále

$$x^3-2x^2+4=(2Ax+B)(x^2-2x)-(Ax^2+Bx+C)\{2(x-2)+x\}+(Dx+E)x^2(x-2).$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin x dostaneme soustavu lineárních algebraických rovnic:

$$\begin{array}{rrrrrrr}
x^4: & 0= & & & & D & \\
x^3: & 1= & -A & & & -2D & +\ E \\
x^2: & -2= & & -2B & & & -2E \\
x^1: & 0= & & 2B & -3C & & \\
x^0: & 4= & & & 4C & &
\end{array}$$

Její řešení je $C=1,\ \ D=0,\ \ B=\frac{3}{2},\ \ E=-\frac{1}{2},$ a $A=-\frac{3}{2}$. Odtud tedy dostáváme

$$\int\frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}\,dx=-\frac{3x^2-3x-2}{2x^2(x-2)}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x(x-2)}.$$

Nyní zbývá rozložit funkci $\frac{1}{x(x-2)}$ na parciální zlomky a vypočítat $\int\frac{dx}{x(x-2)}$.

$$\frac{1}{x(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}\,,\qquad 1=A(x-2)+Bx.$$

Dosazením $x=2$ do poslední rovnosti dostaneme $B=\frac{1}{2}$, dosazením $x=0$ dostaneme $A=-\frac{1}{2}$. Je tedy

$$\int\frac{dx}{x(x-2)}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\ln|x-2|-\ln|x|\right)+C=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|+C.$$

a odtud

$$\int\frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}\,dx=-\frac{3x^2-3x-2}{2x^2(x-2)}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|+C.$$

Uvedená Ostrogradského metoda je výhodná v případě vícenásobných komplexních kořenů polynomu Q. Vyhneme se totiž užití rekurentní formule pro integrál $\int\frac{dx}{(1+x^2)^n}$, $n\in\mathbf{N},\ \ n\geq 2$. Příležitostně tuto metodu připomeneme.

(c) Jestliže danou racionální funkci rozložíme na součet parciálních zlomků, dostaneme

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1};\qquad 1=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1).$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin x dostaneme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rrrrr}
x^2: & 0= & A & +B & \\
x^1: & 0= & -A & +B & +C \\
x^0: & 1= & A & & +C
\end{array}$$

s řešením $A=\frac{1}{3},\ \ B=-\frac{1}{3},\ \ C=\frac{2}{3}$. Platí tedy

$$\mathcal{I}=\int\frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{3}\int\frac{(x-2)dx}{x^2-x+1}=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\int\frac{2x-4}{x^2-x+1}\,dx=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}=\frac{1}{3}\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-x+1}}+\frac{1}{2}\mathcal{K},$$

kde

$$\mathcal{K}=\int\frac{dx}{x^2-x+1}=\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}\int\frac{dx}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$$

a tady

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3} \ln \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Poznámka: Polynom x^3+1 má kořeny $x_1 = -1$, $x_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Tyto kořeny jsou jednoduché, takže je můžeme dosadit do vztahu

$$1 = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1).$$

Dosazením kořenu $x = -1$ dostaneme $1 = 3A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{3}$. Dosazením $x = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ dostaneme

$$1 = \left(B \, \frac{1+i\sqrt{3}}{2} + C \right) \frac{3+i\sqrt{3}}{2}, \quad 4 = (B + 2C + iB\sqrt{3})(3 + i\sqrt{3}),$$

$$4 = 3(B + 2C) - 3B + i\sqrt{3}(3B + B + 2C).$$

Odtud

$$6C = 4 \ \Rightarrow \ C = \frac{2}{3}, \quad B + 2C = 0 \ \Rightarrow \ B = -\frac{C}{2} = -\frac{1}{3}.$$

Vícenásobné kořeny dosazujeme vícekrát, ale až po zderivování (předvedeme v poznámce k řešení příkladu 10(e)). Oba komplexně sdružené kořeny nemá smysl dosazovat, neboť dostaneme rovnost komplexně sdružených čísel a porovnáním reálných a imaginárních částí tutéž soustavu rovnic.

Nejrychlejší postup výpočtu neurčitých koeficientů v rozkladu na součet parciálních zlomků je dosadit ty kořeny, které se dají dosadit snadno a pak porovnávat koeficienty u stejných mocnin x, počínaje těmi nejvyššími a nejnižšími.

(d) Je

$$x^4 + 1 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)$$

a tedy

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1},$$

$$1 = (Ax+B)(x^2 - x\sqrt{2} + 1) + (Cx+D)(x^2 + x\sqrt{2} + 1).$$

Srovnáním koeficientů dostaneme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
x^3: & 0 = & A & & & + & C & \\
x^2: & 0 = & -\sqrt{2}A & + & B & + & \sqrt{2}C & + \ D \\
x^1: & 0 = & A & - & \sqrt{2}B & + & C & + \ D \\
x^0: & 1 = & A & & B & & & + \ D.
\end{array}$$

Řešením soustavy je čtveřice $A = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $D = \frac{1}{2}$. Platí tedy

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} \, dx - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1} \, dx =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} \, dx + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2+x\sqrt{2}+1} \, dx - \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1} \, dx +$$

$$+ \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2-x\sqrt{2}+1} \, dx = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{4}(\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2),$$

kde

$$\mathcal{I}_1 = \int \frac{dx}{x^2+x\sqrt{2}+1}, \quad \mathcal{I}_2 = \int \frac{dx}{x^2-x\sqrt{2}+1}.$$

Je

$$\mathcal{I}_1 = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} = 2\int \frac{dx}{(x\sqrt{2}+1)^2+1} = \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,(x\sqrt{2}+1)+C.$$

Analogicky

$$\mathcal{I}_2 = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,(x\sqrt{2}-1)+C.$$

Shrnutím dostaneme

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\mathrm{arctg}\,(x\sqrt{2}+1)+\mathrm{arctg}\,(x\sqrt{2}-1)\Big)+C.$$

Poznámky: (1.) Součet $\mathrm{arctg}\,(x\sqrt{2}+1)+\mathrm{arctg}\,(x\sqrt{2}-1)$ lze vyjádřit pomocí jediné hodnoty funkce arctg.
Buďte $u, v \in \mathbf{R}$, pak $\mathrm{arctg}\,u+\mathrm{arctg}\,v \in (-\pi,\pi)$. Pokud jsou $u, v \in \mathbf{R}$ navíc taková, že $u\cdot v \le 0$, pak

$$\mathrm{arctg}\,u+\mathrm{arctg}\,v \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\quad \mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,u)\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,v)\le 0$$

a platí

$$\mathrm{arctg}\,u+\mathrm{arctg}\,v = \mathrm{arctg}\,\frac{u+v}{1-uv}.$$

Skutečně

$$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,u+\mathrm{arctg}\,v) = \frac{\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,u)+\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,v)}{1-\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,u)(\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,v)} = \frac{u+v}{1-uv}.$$

Tedy pokud je $(x\sqrt{2}+1)(x\sqrt{2}-1) = 2x^2-1 \le 0$, t. j. pokud $x \in \left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle$, pak platí

$$\mathrm{arctg}\,(x\sqrt{2}+1)+\mathrm{arctg}\,(x\sqrt{2}-1) = \mathrm{arctg}\,\frac{2x\sqrt{2}}{1-(2x^2-1)} = \mathrm{arctg}\,\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}.$$

Výraz $\mathrm{arctg}\,\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$ je definován pro $x \in \mathbf{R}-\{-1,1\}$ a platí

$$\left(\mathrm{arctg}\,\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)' = \frac{1}{1+\frac{2x^2}{(1-x^2)^2}}\cdot\frac{\sqrt{2}(1-x^2)+2x^2\sqrt{2}}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}(1+x^2)}{(1-x^2)^2+2x^2} = \frac{\sqrt{2}(1+x^2)}{1+x^4},\quad |x|\ne 1.$$

Stejně tak

$$\Big[\mathrm{arctg}\,(x\sqrt{2}+1)+\mathrm{arctg}\,(x\sqrt{2}-1)\Big]' = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2x^2+2x\sqrt{2}+2}+\frac{1}{2x^2-2x\sqrt{2}+2}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2(1+x^2)}{1+x^4} = \frac{\sqrt{2}(1+x^2)}{1+x^4},\quad x\in\mathbf{R}.$$

Tedy obě funkce jsou primitivní k funkci $\frac{\sqrt{2}(1+x^2)}{1+x^4}$ a liší se tedy o konstantu. Přesně

$$\mathrm{arctg}\,(x\sqrt{2}+1)+\mathrm{arctg}\,(x\sqrt{2}-1)-\mathrm{arctg}\,\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} = \begin{cases} -\pi & \text{pro } x\in(-\infty,-1) \\ 0 & \text{pro } x\in(-1,1) \\ \pi & \text{pro } x\in(1,+\infty). \end{cases}$$

(2.) Obecně lze ukázat, že

$$\operatorname{arctg} u + \operatorname{arctg} v = \begin{cases} \pi + \operatorname{arctg} \frac{u+v}{1-uv} & \text{pro} \quad u > 0,\, v > 0,\, uv > 1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro} \quad u > 0,\, v > 0,\, uv = 1 \\ \operatorname{arctg} \frac{u+v}{1-uv} & \text{pro} \quad uv < 1 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{pro} \quad u < 0,\, v < 0,\, uv = 1 \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{u+v}{1-uv} & \text{pro} \quad u < 0,\, v < 0,\, uv > 1. \end{cases}$$

(e) Pro rozklad dané funkce na součet parciálních zlomků platí

$$\frac{2x}{(1+x)(1+x^2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

$$2x = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x+1)(x^2+1) + (Dx+E)(x+1).$$

Srovnáním koeficientů dostaneme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rrrrrrr} x^4: & 0 = & A & +B & & & \\ x^3: & 0 = & & B & +C & & \\ x^2: & 0 = & 2A & +B & +C & +D & \\ x^1: & 2 = & & B & +C & +D & +E \\ x^0: & 0 = & A & & +C & & +E \end{array}$$

Abychom nemuseli řešit tuto nepříjemnou soustavu, využijeme postupu z příkladu 10(a). (Srovnejte též poznámku k řešení příkladu 10(c)).
Pro $x = -1$ dostaneme $-2 = 4A \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$ a odtud $B = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{2}$, $D = 1$, $E = 1$. Platí tedy

$$\int \frac{2x\,dx}{(1+x)(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}\,dx + \int \frac{x+1}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x+1|} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\mathcal{I} + \mathcal{K},$$

kde

$$\mathcal{I} = \int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2}, \quad \mathcal{K} = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Zavedeme-li v integrálu $\mathcal{I}$ substituci $x^2+1 = t$, dostaneme $\mathcal{I} = -\frac{1}{x^2+1} + C$. Pro výpočet integrálu $\mathcal{K}$ použijeme rekurentní formuli z příkladu 8(j). Podle ní je

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_2 = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\mathcal{K}_1 = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

Shrnutím dostáváme

$$\int \frac{2x\,dx}{(1+x)(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x+1|} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x+1|} + \frac{x-1}{2(1+x^2)} + C.$$

Poznámka: Použijeme-li k výpočtu Ostrogradského metodu, nemusíme znát rekurentní vzorec z příkladu 8(j). Platí totiž

$$\int \frac{2x\,dx}{(1+x)(1+x^2)^2} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + \int \frac{Cx^2+Dx+E}{(1+x)(1+x^2)}\,dx.$$

Derivováním tohoto vztahu a vynásobením nejmenším společným jmenovatelem $(1+x)(1+x^2)^2$ dostaneme

$$\frac{2x}{(1+x)(1+x^2)^2} = \frac{A}{1+x^2} - \frac{2x(Ax+B)}{(1+x^2)^2} + \frac{Cx^2+Dx+E}{(1+x)(1+x^2)},$$

$$2x = A(1+x^2)(1+x) - 2x(1+x)(Ax+B) + (Cx^2+Dx+E)(1+x^2).$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin x dostaneme soustavu

$$\begin{array}{rrrrrrr}
x^4: & 0= & & & C & & \\
x^3: & 0= & -A & & & +D & \\
x^2: & 0= & -A & -2B & +C & & \\
x^1: & 2= & A & -2B & & +D & \\
x^0: & 0= & A & & & & +E
\end{array}$$

Z druhé rovnice plyne, že $D = A$, z páté $E = -A$; dosazením $D = A$ do čtvrté rovnice dostaneme $B = A - 1$. Když toto vyjádření a $C = 0$ dosadíme do třetí rovnice, dostaneme

$$0 = -A - 2A + 2 - A \;\Rightarrow\; A = D = \frac{1}{2},\;\; E = B = -\frac{1}{2}.$$

Tedy

$$\int \frac{2x\,dx}{(1+x)(1+x^2)^2} = \frac{x-1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx.$$

Racionální lomenou funkci v posledním integrálu rozložíme na součet parciálních zlomků:

$$\frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1};\;\; x-1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1).$$

Dosazením $x = -1$ dostaneme $-2 = 2A \;\Rightarrow\; A = -1$, dosadíme-li $x = i$, máme $-1+i = C - B + i(C+B) \;\Rightarrow\; B - B = -1,\;\; C + B = 1 \;\Rightarrow\; B = 1,\;\; C = 0$. Proto

$$\int \frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx = \int \left(\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x+1}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \ln|x+1| + C = \ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x=1|} + C,$$

a tedy celkově

$$\int \frac{2x\,dx}{(1+x)(1+x^2)^2} = \frac{x-1}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x+1|} + C.$$

Jak se vám Ostrogradského metoda líbí?

(f) Rozklad na součet parciálních zlomků dává

$$\frac{(x+1)^4}{(x^2+2x+2)^3} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{Ex+F}{(x^2+2x+2)^3},$$

$$(x+1)^4 = (Ax+B)(x^2+2x+2)^2 + (Cx+D)(x^2+2x+2) + Ex + F.$$

Porovnáním koeficientů dostaneme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
x^5: & 0= & A & & & & & \\
x^4: & 1= & 4A & +\;B & & & & \\
x^3: & 4= & 8A & +4B & +\;C & & & \\
x^2: & 6= & 8A & +8B & +2C & +\;D & & \\
x^1: & 4= & 4A & +8B & +2C & +2D & +E & \\
x^0: & 1= & & 4B & & +2D & & +F
\end{array}$$

s řešením $A=0,\ \ B=1,\ \ C=0,\ \ D=-2,\ \ E=0,\ \ F=1$. Tedy

$$\int\frac{(x+1)^4\,dx}{(x^2+2x+2)^3}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}-2\int\frac{dx}{[(x+1)^2+1]^2}+\int\frac{dx}{[(x+1)^2+1]^3}=$$

$$=\operatorname{arctg}(x+1)-2\mathcal{K}_2+\mathcal{K}_3.$$

Použitím stejné rekurentní formule jako v předchozím příkladu dostaneme

$$\mathcal{K}_2=\frac{x+1}{2(x^2+2x+2)}+\frac{1}{2}\mathcal{K}_1=\frac{x+1}{2(x^2+2x+2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1)+C,$$

$$\mathcal{K}_3=\frac{x+1}{4(x^2+2x+2)^2}+\frac{3}{4}\mathcal{K}_2=\frac{x+1}{4(x^2+2x+2)^2}+\frac{3(x+1)}{8(x^2+2x+2)}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}(x+1)+C.$$

Shrnutím dostaneme

$$\int\frac{(x+1)^4\,dx}{(x^2+2x+2)^3}=\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{x+1}{x^2+2x+2}-\operatorname{arctg}(x+1)+\frac{x+1}{4(x^2+2x+2)^2}+$$

$$+\frac{3(x+1)}{8(x^2+2x+2)}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}(x+1)+C=\frac{3}{8}\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{5(x+1)}{8(x^2+2x+2)}+$$

$$+\frac{x+1}{4(x^2+2x+2)^2}+C=\frac{3}{8}\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{5x^3+15x^2+18x+8}{8(x^2+2x+2)^2}+C.$$

Poznámka: Podle Ostrogradského metody je

$$\int\frac{(x+1)^4\,dx}{(x^2+2x+2)^3}=\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{(x^2+2x+2)^2}+\int\frac{Ex+F}{x^2+2x+2}\,dx.$$

Odtud

$$\frac{(x+1)^4}{(x^2+2x+2)^3}=\frac{3Ax^2+2Bx+C}{(x^2+2x+2)^2}-\frac{2(2x+2)(Ax^3+Bx^2+Cx+D)}{(x^2+2x+2)^3}+\frac{Ex+F}{x^2+2x+2},$$

$$(x+1)^4=(3Ax^2+2Bx+C)(x^2+2x+2)-4(x+1)(Ax^3+Bx^2+Cx+D)+$$
$$+(Ex+F)(x^2+2x+2)^2.$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin x dostaneme

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
x^5: & 0= & & & & & E & \\
x^4: & 1= & -A & & & & & +\ F \\
x^3: & 4= & 2A & -2B & & & & +4F \\
x^2: & 6= & 6A & & -3C & & & +8F \\
x^1: & 4= & & 4B & -2C & -4D & & +8F \\
x^0: & 1= & & & 2C & -4D & & +4F.
\end{array}$$

Řešením soustavy dostaneme $A=-\frac{5}{8}\ \ B=-\frac{15}{8},\ \ C=-\frac{18}{8},D=-1,\ \ F=\frac{3}{8}$. Tedy

$$\int\frac{(x+1)^4\,dx}{(x^2+2x+2)^3}=-\frac{5x^3+15x^2+18x+8}{8(x^2+2x+2)^2}+\frac{3}{8}\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}=$$

$$=\frac{3}{8}\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{5x^3+15x^2+18x+8}{8(x^2+2x+2)^2}+C.$$

11. Vypočtěte $\int f(x)\,dx$, je-li

(a) $f(x) = \frac{x}{(x+1)(2x+1)}$, $\left[\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|2x+1|\right]$

(b) $f(x) = \frac{x}{2x^2-3x-2}$, $\left[\frac{1}{10}\{\ln|2x+1| + 4\ln|x-2|\}\right]$

(c) $f(x) = \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}$, $\left[\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|\right]$

(d) $f(x) = \frac{x^3-1}{4x^3-x}$, $\left[\frac{1}{4}x + \ln|x| - \frac{7}{16}\ln|2x-1| - \frac{9}{16}\ln|2x+1|\right]$

(e) $f(x) = \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}$, $\left[\frac{x^2}{2} + \ln|x| + \frac{1}{2}\{\ln|x-1| + 3\ln|x+1|\} + \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right]$

(f) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}$, $\left[\ln\frac{x^2}{|x+1|} + \frac{6}{x+1}\right]$

(g) $f(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2$, $\left[4\ln|x| - 3\ln|x-1| - \frac{9}{x-1}\right]$

(h) $f(x) = \frac{x^3+1}{x^3-x^2}$, $\left[x + \frac{1}{x} + \ln\frac{(x-1)^2}{|x|}\right]$

(i) $f(x) = \frac{1}{8}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4$, $\left[\frac{x}{8} - \ln|x+1| - \frac{9x^2+12x+5}{3(x+1)^3}\right]$

(j) $f(x) = \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}$, $\left[2\ln\left|\frac{x+4}{x+2}\right| - \frac{5x+12}{x^2+6x+8}\right]$

(k) $f(x) = \frac{7x^3-9}{x^4-5x^3+6x^2}$, $\left[\frac{3}{2x} - \frac{5}{4}\ln|x| - \frac{47}{4}\ln|x-2| + 20\ln|x-3|\right]$

(l) $f(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}$, $\left[\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}\right]$

(m) $f(x) = \frac{x}{x^3-1}$, $\left[\frac{1}{3}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]$

(n) $f(x) = \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}$, $\left[\frac{x^2}{2} + x + \ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}} - \operatorname{arctg} x\right]$

(o) $f(x) = \frac{x^2}{1-x^4}$, $\left[\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right]$

(p) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}$, $\left[\frac{1}{2}\left\{\ln\frac{|1+x|}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{x+1}\right\}\right]$

(q) $f(x) = \frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)}$, $\left[\frac{1}{4}\left\{\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x-1|} + \operatorname{arctg} x - \frac{7}{(x-1)^2}\right\}\right]$

(r) $f(x) = \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}$, $\left[\ln(x^2+4) - \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - \frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right]$

(s) $f(x) = \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}$, $\left[\frac{2-x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{2}\ln(x^2+2) - \frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right]$

(t) $f(x) = \frac{1}{x(x^2+4)^2(x^2+1)}$, $\left[\frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{18}\ln(x^2+1) + \frac{7}{288}\ln(x^2+4) - \frac{1}{24(x^2+4)}\right]$

(u) $f(x) = \frac{1}{(x^2+9)^3}$, $\left[\frac{x}{36(x^2+9)^2} + \frac{x}{216(x^2+9)} + \frac{1}{648}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right]$

(v) $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^4}$, $\left[\frac{15x^5+40x^3+33x}{48(x^2+1)^3} + \frac{5}{16}\operatorname{arctg} x\right]$

Poznámky: (1.) V příkladu (i) zlomek $\frac{x-1}{x+1}$ vydělte a pak umocněte.

(2.) V příkladu (o) lze při výpočtu postupovat tak, že do rozkladu $\frac{-t}{t^2-1}$ na součet parciálních zlomků se dosadí $t = x^2$ a zlomky, které nejsou parciální, se znovu rozloží na součet parciálních zlomků.

(3.) V příkladu (q) zkuste Ostrogradského metodu.

(4.) V příkladu (s) zapište čitatele ve tvaru $x^3 + 2x - (x+1)$. Lze aplikovat též Ostrogradského metodu.

(5.) V příkladu (t) je vhodné zadanou funkci rozšířit výrazem x a provést substituci $t = x^2$.

(6.) V příkladech (u) a (v) jsou dané funkce parciální zlomky, proto lze využít příkladu 8(j). Výsledek zkontrolujte Ostrogradského metodou.

1.2 Integrály typu $\int R\left(x, \sqrt[s]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)\, dx$.

12. Vypočtěte $\int f(x)\, dx$, je-li

(a) $f(x) = \frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$, (b) $f(x) = \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}$, (c) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$,

(d) $f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, (e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}$, (f) $f(x) = \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$,

(g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$, (h) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.

Řešení:

(a) V integrálu $\mathcal{I} = \displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}$ zavedeme substituci

$$\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} = t \;\Rightarrow\; x = \frac{1-t^3}{1+t^3},\;\; dx = \frac{-6t^2\, dt}{(t^3+1)^2}.$$

Platí tedy

$$\mathcal{I} = -6\int \frac{t^3}{(t^3+1)^2}\,\frac{1+t^3}{1-t^3}\, dt = -6\int \frac{t^3\, dt}{(t^3+1)(1-t^3)} = 3\int \left(\frac{1}{t^3+1} + \frac{1}{t^3-1}\right) dt.$$

Označíme-li $F(t) = \int \frac{dt}{t^3+1}$, pak

$$\frac{d}{dt}\{F(-t)\} = \frac{dF}{dt}(-t)\cdot(-1) = \frac{-1}{(-t)^3+1} = \frac{1}{t^3-1}$$

a je tedy $F(-t) = \int \frac{dt}{t^3-1}$. Podle příkladu 10(c) víme, že

$$F(t) = \frac{1}{3}\ln\frac{|t+1|}{\sqrt{t^2-t+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}},$$

plyne odtud, že

$$\mathcal{I} = 3\{F(t)+F(-t)\} + C = \ln|t^2-1| - \frac{1}{2}\ln[(t^2-t+1)(t^2+t+1)] +$$

$$+\sqrt{3}\left\{\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right\} + C = \ln\frac{|t^2-1|}{\sqrt{t^4+t^2+1}} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{-\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\frac{4t^2-1}{3}} + C =$$

$$= \ln\frac{|t^2-1|}{\sqrt{t^4+t^2+1}} - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1+2t^2} + C = \ln\frac{|t^2-1|}{\sqrt{t^4+t^2+1}} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1+2t^2}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{2} + C =$$

$$= \ln\frac{|t^2-1|}{\sqrt{t^4+t^2+1}} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1+2t^2}{\sqrt{3}} + K,$$

kde $t = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$. Při úpravě výsledku jsme použili lichosti funkce arctg a vzorec z poznámek (1.) a (2.) k příkladu 10(d).

(b) Do integrálu $\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\, dx$ zavedeme substituci

$$\sqrt[3]{2+x} = t,\;\; \text{tedy}\;\; x = t^3-2,\;\; dx = 3t^2\, dt.$$

Po substituci dostáváme integrál $\mathcal{I} = 3\int \frac{(t^3-2)t^3}{t^3+t-2}\, dt$. Tato funkce není ryze lomená, musíme tedy provést dělení se zbytkem:

$$(t^6 - 2t^3) : (t^3 + t - 2) = t^3 - t + \frac{t^2 - 2t}{t^3 + t - 2}.$$

Jestliže poslední zlomek rozložíme na parciální zlomky, dostaneme

$$\frac{t^2 - 2t}{(t-1)(t^2+t+2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt + C}{t^2 + t + 2},$$

tedy

$$t^2 - 2t = A(t^2 + t + 2) + (Bt + C)(t - 1).$$

Dosazením $t = 1$ máme $A = -\frac{1}{4}$ a srovnáním koeficientů dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{array}{rrrrr} t^2: & 1 = & A & +B & \\ t^0: & 0 = & 2A & & -C \end{array}$$

s řešením $B = \frac{5}{4},\ C = -\frac{1}{2}$. Platí tedy

$$\mathcal{I} = \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{4}\ln|t-1| + \frac{3}{4}\int \frac{5t-2}{t^2+t+2}\, dt = \frac{3}{4}\left(t^4 - 2t^2 - \ln|t-1|\right) +$$

$$\frac{15}{8}\int \frac{2t+1}{t^2+t+2}\, dt - \frac{27}{8}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} = \frac{3}{4}\left(t^4 - 2t^2 - \ln|t-1|\right) +$$

$$+\frac{15}{8}\ln(t^2+t+2) - \frac{27}{14}\int \frac{dt}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{3}{4}\left(t^4 - 2t^2 - \ln|t-1|\right) + \frac{15}{8}\ln(t^2+t+2) - \frac{27}{4\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{7}} + C,$$

kde $t = \sqrt[3]{2+x}$.

(c) V integrálu $\mathcal{I} = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\, dx$ zavedeme substituci $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = t$. Odtud

$$x = \frac{t^3+1}{t^3-1},\quad dx = \frac{-6t^2\, dt}{(t^3-1)^2}$$

a tedy

$$\mathcal{I} = \int \frac{-6t^3\, dt}{(t^3-1)^2} = \frac{At^2 + Bt + C}{t^3 - 1} + \int \frac{Dt^2 + Et + F}{t^3 - 1}\, dt.$$

Derivováním tohoto vztahu a následným vynásobením výrazem $(t^3-1)^2$ dostaneme

$$\frac{-6t^3}{(t^3-1)^2} = \frac{2At + B}{t^3 - 1} - \frac{3t^2(At^2 + Bt + C)}{(t^3-1)^2} + \frac{Dt^2 + Et + F}{t^3 - 1},$$

$$-6t^2 = (2At + B)(t^3 - 1) - 3t^2(At^2 + Bt + C) + (Dt^2 + Et + F)(t^3 - 1).$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin t dostaneme

$$\begin{array}{rrrrcrrrr} t^5: & 0 = & & D, & \qquad & t^4: & 0 = & -A & +E, \\ t^2: & 0 = & -3C & -D, & & t^1: & 0 = & -2A & -E. \end{array}$$

Odtud $A = C = D = E = 0$ a $-6t^2 = (B+F)(t^3-1) - 3Bt^3$. Opětovným porovnáním koeficientů u stejných mocnin t dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{array}{rrrr} t^3: & -6 = & -2B & +F, \\ t^0: & 0 = & B & +F, \end{array}$$

jejímž řešením je dvojice $B = 2,\ F = -2$. Tedy

$$\int \frac{-6t^3\,dt}{(t^3-1)^2} = \frac{2t}{t^3-1} - 2\int \frac{dt}{t^3-1} = \frac{2t}{t^3-1} - \frac{2}{3}\ln\frac{|t-1|}{\sqrt{t^2+t+1}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$$

podle příkladu 10(c) a vzorce pro $\int \frac{dt}{t^3-1}$ z řešení příkladu 12(a). Odtud

$$\mathcal{I} = \frac{2t}{t^3-1} + \frac{1}{3}\ln\frac{t^2+t+1}{t^2-2t+1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C,$$

kde $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$,

(d) Do integrálu $\mathcal{I} = \displaystyle\int x\sqrt{\tfrac{x-1}{x+1}}\,dx$ zavedeme substituci $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = t$. Odtud

$$x = \frac{1+t^2}{1-t^2},\quad dx = \frac{4t\,dt}{(1-t^2)^2}.$$

Je tedy

$$\mathcal{I} = 4\int \frac{t^4+t^2}{(1-t^2)^3}\,dt = \int \frac{-4t^4-4t^2}{(t^2-1)^3}\,dt = \frac{At^3+Bt^2+Ct+D}{(t^2-1)^2} + \int \frac{Et+F}{t^2-1}\,dt.$$

Zderivováním tohoto vztahu a vynásobením výrazem $(t^2-1)^3$ dostaneme

$$-4t^4 - 4t^2 = (3At^2+2Bt+C)(t^2-1) - 4t(At^3+Bt^2+Ct+D) + (Et+F)(t^4-2t^2+1).$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin t dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{array}{rrrrrrrr} t^5: & 0 = & & & & & E & \\ t^4: & -4 = & -\ A & & & & & +\ F \\ t^3: & 0 = & & -2B & & & -2E & \\ t^2: & -4 = & -3A & & -3C & & & -2F \\ t^1: & 0 = & & -2B & & -4D & +\ E & \\ t^0: & 0 = & & & -\ C & & & +\ F. \end{array}$$

Z první, třetí a páté rovnice dostaneme $B = D = E = 0$, z druhé, čtvrté a šesté $A = 3,\ C = F = -1$. Odtud plyne, že

$$\mathcal{I} = \frac{3t^3-t}{(t^2-1)^2} + \int \frac{dt}{1-t^2} = t\cdot\frac{3t^2-1}{(t^2-1)^2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + K = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{\frac{3x-3}{x+1}-1}{\left(\frac{x-1}{x+1}-1\right)^2} +$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\right| + K = \frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^2}{2} + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{1}{2}(x-2)(x+1) + K =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + \operatorname{sgn}\,[x(x-2)]\,\sqrt{x^2-1}\right\} + K.$$

(e) Je

$$\mathcal{I}=\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}=\left|\begin{array}{l}\sqrt[12]{x}=t,\ \ x=t^{12},\\ dx=12t^{11}\,dt.\end{array}\right|=$$

$$=12\int\frac{t^{11}\,dt}{t^6+t^4+2t^3}=12\int\frac{t^8\,dt}{t^3+t+2}.$$

Po vydělení dostaneme

$$\frac{t^8}{t^3+t+2}=t^5-t^3-2t^2+t+4+\frac{3t^2-6t-8}{t^3+t+2}.$$

Rozklad ryze lomené části na parciální zlomky dává

$$\frac{3t^2-6t-8}{t^3+t+2}=\frac{A}{t+1}+\frac{Bt+C}{t^2-t+2},\ \ 3t^2-6t-8=A(t^2-t+2)+(Bt+C)(t=1).$$

Srovnáním koeficientů dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{array}{rrrrr} t^2: & 3= & A & +B & \\ t^1: & -6= & -A & +B & +C \\ t^0: & -8= & 2A & & +C, \end{array}$$

jejímž řešením je trojice $A=\frac{1}{4},\ \ B=\frac{11}{4},\ \ C=-\frac{17}{2}$. Platí tedy

$$\mathcal{I}=2t^6-3t^4-8t^3+6t^2+48t+3\ln|t+1|+\mathcal{K},$$

kde

$$\mathcal{K}=\int\frac{33t-102}{t^2-t+2}\,dt=\frac{33}{2}\int\frac{2t-1}{t^2-t+2}\,dt-\frac{171}{2}\int\frac{dt}{t^2-t+2}=\frac{33}{2}\ln(t^2-t+2)-$$

$$-\frac{171}{2}\int\frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}=\frac{33}{2}\ln(t^2-t+2)-\frac{342}{7}\int\frac{dt}{\left(\frac{2t-1}{\sqrt{7}}\right)^2+1}=$$

$$=\frac{33}{2}\ln(t^2-t+2)-\frac{171}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{7}}+C$$

Tedy výsledně

$$\mathcal{I}=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}-8\sqrt[4]{x}+6\sqrt[6]{x}+48\sqrt[12]{x}+$$

$$+\ln(\sqrt[12]{x}+1)+\frac{33}{2}\ln(\sqrt[6]{x}-\sqrt[12]{x}+2)-\frac{171}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[12]{x}-1}{\sqrt{7}}+C.$$

(f) Platí

$$\mathcal{I}=\int\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx=\left|\begin{array}{l}\sqrt{x}=t,\ \ x=t^2,\\ dx=2t\,dt\end{array}\right|=2\int t\cdot\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt.$$

Do tohoto integrálu zavedeme substituci $\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}=u$, tedy

$$t=\frac{1-u^2}{1+u^2},\ \ dt=\frac{-4u\,du}{(1+u^2)^2}.$$

Platí tedy

$$\mathcal{I}=-8\int\frac{u^2(1-u^2)}{(1+u^2)^3}\,du=\int\frac{8u^4-8u^2}{(1+u^2)^3}\,du=\frac{Au^3+Bu^2+Cu+D}{(1+u^2)^2}+\int\frac{Eu+F}{u^2+1}\,du.$$

Zderivováním tohoto vztahu a vynásobením výrazem $(u^2+1)^3$ dostaneme

$8u^4-8u^2 = (3Au^2+2Bu+C)(u^2+1)-4u(Au^3+Bu^2+Cu+D)+(Eu+F)(u^4+2u^2+1).$

Porovnání koeficientů u stejných mocnin u dává soustavu rovnic

$$\begin{array}{rrccccccc}
u^5: & 0= & & & & & E & \\
u^4: & 8= & -A & & & & & +\ F \\
u^3: & 0= & & -2B & & & +2E & \\
u^2: & -8= & 3A & & -3C & & & +2F \\
u^1: & 0= & & 2B & & -4D & +\ E & \\
u^0: & 0= & & & C & & & +\ F
\end{array}$$

jejímž řešením je $A=-6,\ \ B=D=E=0,\ \ c=-2,\ \ F=2$. Odtud

$$\mathcal{I} = -2u\,\frac{3u^2+1}{(u^2+1)^2} + 2\mathrm{arctg}\, u + C,$$

kde $u=\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$. po dosazení za u a po úpravě dostáváme

$$\mathcal{I} = \int\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx = (\sqrt{x}-2)\sqrt{1-x} + 2\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} + C =$$
$$= (\sqrt{x}-2)\sqrt{1-x} + \arccos\sqrt{x} + C.$$

Poznámka: Pro $t\in\langle 0,1\rangle$ platí $2\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} = \arccos t$. Skutečně pro $u\in\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle$ platí

$$\mathrm{tg}\frac{u}{2} = \frac{\sin\frac{u}{2}}{\cos\frac{u}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}},\quad \text{tedy}\ \ u = 2\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}}.$$

Položíme-li $\cos u = t$, je $u=\arccos t$, což dává uvedený výsledek.

(g) Integrál $\mathcal{I}=\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$ nejdříve upravíme. Platí

$$\mathcal{I} = \int\frac{dx}{(x-1)(x+2)\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}} = \int\frac{\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}\,dx}{(x-1)(x+2)}.$$

Zavedením substituce $\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}=t$ dostaneme

$$x=\frac{1+2t^4}{1-t^4},\ \ dx=\frac{12t^3\,dt}{(1-t^4)^2},\ \ x-1=\frac{3t^4}{1-t^4},\ \ x+2=\frac{3}{1-t^4}.$$

Tedy

$$\mathcal{I} = 12\int\frac{\frac{t^4\,dt}{(1-t^4)^2}}{\frac{3t^4}{1-t^4}\cdot\frac{3}{1-t^4}} = \frac{4}{3}\int dt = \frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} + C.$$

(h) Jestliže v integrálu $\mathcal{I}=\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx$ vydělíme čitatele i jmenovatele $\sqrt{x-1}$, dostaneme $\mathcal{I}=\int\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1}\,dx$. Zavedení substituce $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=t$ dává $x=\frac{t^2+1}{t^2-1},\ \ dx=\frac{-4t\,dt}{(t^2-1)^2}$, tedy

$$\mathcal{I} = -4\int\frac{(t-1)t\,dt}{(t+1)(t^2-1)^2} = \int\frac{-4t\,dt}{(t+1)^3(t-1)}.$$

Rozklad na parciální zlomky má tvar

$$\frac{-4t}{(t+1)^3(t-1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{C}{(t+1)^3} + \frac{D}{t-1},$$

$$-4t = A(t^3+t^2-t-1) + B(t^2-1) + C(t-1) + D(t^3+3t^2+3t+1).$$

Srovnáním koeficientů u stejných mocnin t dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{array}{rrrrrr} t^3: & 0 = & A & & & +\ D \\ t^2: & 0 = & A & +B & & +3D \\ t^1: & -4 = & -A & & +C & +3D \\ t^0: & 0 = & -A & -B & -C & +\ D, \end{array}$$

jejímž řešením je čtveřice $D = -\frac{1}{2},\ A = \frac{1}{2},\ B = 1,\ C = -2$. Tedy

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2}\ln|t+1| - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{2}\ln|t-1| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{t}{(t+1)^2} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\right| - \frac{\sqrt{x^2-1}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^2} + C = \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| -$$

$$-\frac{\sqrt{x^2-1}}{2(x+\sqrt{x^2-1})} + C = \frac{1}{2}\left\{\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| - \sqrt{x^2-1}(x-\sqrt{x^2-1})\right\} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| - x\sqrt{x^2-1} + x^2\right\} + K,$$

kde $K = C - \frac{1}{2}$.

13. Vypočtěte $\int f(x)\,dx$, je-li

(a) $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$, $\quad[2\{\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})\}]$

(b) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$, $\quad[x - 2\sqrt{x} + 2\ln(\sqrt{x}+1)]$

(c) $f(x) = x\sqrt[4]{x-2}$, $\quad\left[\frac{4}{45}(x-2)(5x+8)\sqrt[4]{x-2}\right]$

(d) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}$, $\quad\left[\frac{x+2}{5}\sqrt[3]{(3x+1)^2}\right]$

(e) $f(x) = \frac{1-2\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}$, $\quad[2\sqrt{x} - x - \ln(2\sqrt{x}+1)]$

(f) $f(x) = \frac{1}{3x+\sqrt[3]{x^2}}$, $\quad\left[\ln|1+3\sqrt[3]{x^2}|\right]$

(g) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}$, $\quad[x + 4\sqrt{x+1} + 4\ln|\sqrt{x+1}-1|]$

(h) $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{x}$, $\quad\left[2\left(\sqrt{x+4} + \ln\frac{|\sqrt{x+4}-2|}{\sqrt{x+4}+2}\right)\right]$

(i) $f(x) = \frac{1}{x^3}\sqrt[5]{\frac{x}{x+1}}$, $\quad\left[\frac{5}{4}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{4/5} - \frac{5}{9}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{9/5}\right]$

(j) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+2}}{x+1}$, $\quad\left[3t + \ln\frac{|t-1|}{\sqrt{t^2+t+1}} - \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t+1}{\sqrt{3}},\ \text{kde}\ t = \sqrt[3]{x+2}\right]$

(k) $f(x) = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $\quad\left[\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right| + 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right]$

(l) $f(x) = \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}$, $\quad\left[6\sqrt[3]{(x+1)^2}\left(\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{x+1}{5} + \frac{\sqrt{x+1}}{7} + \frac{1}{4}\right)\right]$

(m) $f(x) = \frac{1}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x})}$, $\quad\left[10\left(\ln\frac{\sqrt[10]{x}}{\sqrt[10]{x}+1} + \frac{1}{\sqrt[10]{x}} - \frac{1}{2\sqrt[5]{x}} + \frac{1}{3\sqrt[10]{x^3}} - \frac{1}{4\sqrt[5]{x^2}}\right)\right]$

(n) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$,
$\quad\left[6\left\{\frac{1}{9}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}(x+1)^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}} - \frac{1}{6}(x+1) + \frac{1}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}} - \frac{1}{4}(x+1)^{\frac{2}{3}}\right\}\right]$

(o) $f(x) = \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}$,
$\left[6t - 3t^2 - 2t^3 + \frac{3}{2}t^4 + \frac{6}{5}t^5 - \frac{6}{7}t^7 + 3\ln(1+t^2) - 6\operatorname{arctg} t, \ \text{kde} \ t = \sqrt[6]{x+1}\right]$

(p) $f(x) = \frac{1}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$, $\left[\ln x - \frac{3}{2}\ln(\sqrt[6]{x}+1) - \frac{9}{4}\ln(2\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x}+1) - \frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}\right]$

(q) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x^3})}$, $\left[-\frac{2}{3}\ln\frac{(\sqrt[4]{x}+1)^2}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+1} + \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{3}}\right]$

(r) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$, $\left[-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right]$

1.3 Integrály typu $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$.

14. Vypočtěte $\int f(x)\,dx$, je-li

(a) $f(x) = \sin^4 x \cos^5 x$,
(b) $f(x) = \sin^2 x \cos^4 x$,
(c) $f(x) = \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}$,
(d) $f(x) = \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}$,
(e) $f(x) = \frac{1}{\sin^4 x \cos^4 x}$,
(f) $f(x) = \frac{\cos^2 x}{(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)^2}$, $ab \neq 0$,
(g) $f(x) = \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^8 x + \cos^8 x}$,
(h) $f(x) = \frac{\cos x}{(1-\cos x)^2}$
(i) $f_1(x) = \sin ax \cos bx$,
$f_2(x) = \cos ax \cos bx$,
$f_3(x) = \sin ax \sin bx$, $|a| \neq |b|$,
(j) $f(x) = \cos x \cos 2x \cos 3x$,
(k) $f(x) = \sin^3 2x \cos^2 3x$,
(l) $f(x) = \frac{1}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$.

Řešení:

(a) Platí

$$\int \sin^4 x \cos^5 x\,dx = \int \sin^4 x(1-\sin^2 x)^2\cos x\,dx = \left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x\,dx = dt \end{array} \right| = \int t^4(1-t^2)^2\,dt =$$

$$= \int (t^8 - 2t^6 + t^4)\,dt = \frac{t^9}{9} - \frac{2t^7}{7} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{9}\sin^9 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

(b) Užitím goniometrických vzorců pro poloviční argument dostaneme

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos^2 2x)(1+\cos 2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x(1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{8}\left\{\int \sin^2 2x\,dx + \int \sin^2 2x \cos 2x\,dx\right\} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} t = \sin 2x \\ \frac{dt}{2} = \cos 2x\,dx \end{array} \right| = \frac{1}{16}\left\{\int (1-\cos 4x)dx + \int t^2\,dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{16}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{3}\sin^3 2x\right) + C = \frac{x}{16} - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

(c) Platí

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - 2\int dx + \int \cos^2 x\,dx =$$

$$= \operatorname{tg} x - 2x + \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,dx = \operatorname{tg} x - 2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C =$$

$$= \frac{1}{4}\left(4\mathrm{tg}\, x - 6x + \sin 2x\right) + C.$$

Poznámky: (1.) Zavedeme-li substituci $\mathrm{tg}\, x = t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, která je standardně používána při výpočtu integrálů tohoto typu, dostaneme

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{\frac{t^4}{(t^2+1)^2}}{\frac{1}{t^2+1}} \cdot \frac{dt}{t^2+1} = \int \frac{t^4}{(t^2+1)^2}\, dt =$$

$$= \int \frac{t^4 + 2t^2 + 1 - 2(t^2+1) + 1}{(t^2+1)^2}\, dt = t - 2\int \frac{dt}{t^2+1} + \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} =$$

$$= t - 2\mathrm{arctg}\ t + \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\ t + C$$

podle příkladu 8(j). Je tedy

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\, dx = \mathrm{tg}\, x - \frac{3}{2}x + \frac{\mathrm{tg}\, x}{2(1+\mathrm{tg}^2 x)} + C$$

a ukazuje se, že substituce vyžaduje v tomto konkrétním příkladu poněkud delší výpočet.
(2.) Substituce $t = \mathrm{tg}\, x$ není pro výpočet integrálu $\int \cos^2 x\, dx$ vhodná. Postup při výpočtu integrálů tvaru $\int \frac{\sin^{2m} x}{\cos^{2n} x}\, dx$, $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbf{N}$, je následující

$$\int \frac{\sin^{2m} x}{\cos^{2n} x}\, dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)^m}{\cos^{2n} x}\, dx = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}(-1)^k \int \cos^{2(k-n)} x\, dx.$$

Je-li $k \in \mathbf{Z}$, pak se $\int \cos^{2k} x\, dx$ řeší substitucí $t = \mathrm{tg}\, x$ právě když je $k < 0$. Je-li $k > 0$, potom postupujeme jako v příkladu 14(b).

(d) Po jednoduché úpravě integrandu dostaneme

$$\mathcal{I} = \int \frac{\cos^4 x\, dx}{\sin^3 x} = \int \frac{\cos^4 x\, \sin x}{\sin^4 x}\, dx = -\int \frac{\cos^4 x(-\sin x)}{(1-\cos^2 x)^2}\, dx = \left| \begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x\, dx = dt \end{array} \right| =$$

$$= -\int \frac{t^4\, dt}{(1-t^2)^2} = -\int \frac{(t^2-1)^2 + 2t^2 - 1}{(t^2-1)^2}\, dt = -t - \int \frac{(2t^2-1)dt}{(t^2-1)^2}.$$

Protože

$$\int \frac{2t^2-1}{(t^2-1)^2}\, dt = \frac{At+B}{t^2-1} + \int \frac{Ct+D}{t^2-1}\, dt,$$

dostaneme derivováním a násobením výrazem $(t^2-1)^2$

$$2t^2 - 1 = A(t^2-1) - 2t(At+B) + (Ct+D)(t^2-1).$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{array}{rrcccc} t^3: & 0 = & & & C & \\ t^2: & 2 = & -A & & & +D \\ t^1: & 0 = & & -2B & -C & \\ t^0: & -1 = & -A & & & -D \end{array}$$

jejímž řešením je $A = -\frac{1}{2}$, $B = C = 0$, $D = \frac{3}{2}$. Je tedy

$$\mathcal{I} = -t - \frac{t}{2(1-t^2)} + \frac{3}{2}\int \frac{dt}{1-t^2} = -t - \frac{t}{2(1-t^2)} - \frac{3}{4}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + C =$$

$$= -\cos x - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{3}{4}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C = -\cos x - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{3}{4}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

(e) Platí

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ dx = \frac{dt}{t^2+1} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{dt}{t^2+1}}{\frac{t^4}{(t^2+1)^2} \cdot \frac{1}{(t^2+1)^2}} = \int \frac{(t^2+1)^3}{t^4}\, dt =$$

$$= \int \left(t^2 + 3 + \frac{3}{t^3} + \frac{1}{t^4} \right) dt = \frac{1}{3} t^3 + 3t - \frac{3}{t} - \frac{1}{3t^2} + C =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{cotg}^3 x \right) + 3(\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x) + C$$

Poznámky: (1.) Daný integrál můžeme též přepsat do tvaru

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x} = 16 \int \frac{dx}{\sin^4 2x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} 2x = t \\ dx = \frac{dt}{2(t^2+1)} \end{array} \right| = 8 \int \frac{(t^2+1)\, dt}{t^4} =$$

$$= 8 \left\{ -\frac{1}{t} - \frac{1}{3t^3} \right\} + C = -\frac{8}{3} \left(3\operatorname{cotg} 2x + \operatorname{cotg}^3 2x \right) + C.$$

Jestliže si uvědomíme, že $\operatorname{cotg} 2x = \frac{1}{2} \left(\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x \right)$, ověříme snadno, že oba výsledky jsou stejné. Obecně se dvě primitivní funkce, vypočítané dvěma různými postupy, mohou lišit pouze o konstantu.

(2.) Uvedený integrál můžeme též vypočítat následujícím postupem

$$\mathcal{I} = \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x} = \int \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)\, dx}{\sin^4 x \cos^4 x} = \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}.$$

Zopakujeme-li tento postup ještě dvakrát, dostaneme

$$\mathcal{I} = \int \frac{dx}{\sin^4 x} + 2 \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \operatorname{cotg}^2 x \frac{dx}{\sin^2 x} + 8 \int \frac{dx}{\sin^2 2x} +$$

$$+ \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \operatorname{tg}^2 x \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{3} \left(\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{cotg}^3 x \right) + \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x - 4\operatorname{cotg} 2x + C$$

a snadno ověříme, že výsledek je opět stejný.

(3.) Lze také počítat

$$\mathcal{I} = \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\sin^4 x \cos^4 x}\, dx = \int \frac{dx}{\cos^4 x} + 2 \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} +$$

$$+ \int \frac{dx}{\sin^4 x} = \int (\operatorname{tg}^2 x + 1) \frac{dx}{\cos^2 x} + 2 \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx + \int (\operatorname{cotg}^2 x + 1) \frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + 2(\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x) - \frac{1}{3} \operatorname{cotg}^3 x - \operatorname{cotg} x + C =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{cotg}^3 x \right) + 3(\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x) + C$$

(4.) Uvedený integrál ilustruje situaci, se kterou se v dalším budeme v dalším setkávat poměrně často, hlavně v paragrafu 1.4, který bude pojednávat o metodách výpočtu integrálů typu $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx$. Pro výpočet se bude nabízet více postupů (někdy až 8) a naším úkolem bude vybrat ten, který je nejefektivnější, tj. správný a krátký. V příkladu 14(e) to bude nejspíš postup z bodu (1.) těchto poznámek.

(f) Je

$$\mathcal{I}=\int\frac{\cos^2 x\,dx}{(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)^2}=\int\frac{\cos^2 x\,dx}{(a^2\mathrm{tg}^2 x+b^2)^2\cos^4 x}=\left|\begin{array}{c}\mathrm{tg}\,x=t\\ dt=\frac{dx}{\cos^2 x}\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{dt}{(a^2t^2+b^2)^2}=\frac{1}{b^4}\int\frac{dt}{(\frac{a^2}{b^2}t^2+1)^2}=\left|\begin{array}{c}\dfrac{at}{b}=u\\ dt=\dfrac{b}{a}du\end{array}\right|=\frac{1}{ab^3}\int\frac{du}{(u^2+1)^2}.$$

podle příkladu 8(j) platí

$$\mathcal{I}=\frac{1}{ab^3}\left\{\frac{u}{2(u^2+1)}+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,u\right\}+C=\frac{1}{2ab^3}\left\{\frac{\frac{a\mathrm{tg}x}{b}}{\frac{a^2\mathrm{tg}^2x}{b^2}+1}+\mathrm{arctg}\,\frac{a\mathrm{tg}x}{b}\right\}+C=$$

$$=\frac{1}{2ab^3}\left\{\frac{ab\,\mathrm{tg}\,x}{a^2\mathrm{tg}^2x+b^2}+\mathrm{arctg}\,\frac{a\,\mathrm{tg}\,x}{b}\right\}+C.$$

Poznámky: (1.) Do integrálu $\int\frac{\sin^2 x\,dx}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^2}$ bychom substituovali $t=\mathrm{cotg}\,x$.

(2.) Primitivní funkce k $f(x)=\frac{\cos^2 x}{(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)^2}$ existuje v celém $\mathbf{R}$. Získáme ji „slepením“ výsledku příkladu 14(f).

(3.) Pokud v předpisu funkce f nahradíme znaménko "+" znaménkem "−", lze výpočet provést obdobně, ale $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=\mp\infty$, je-ji $x_0=\pm\mathrm{arctg}\,\frac{b}{a}+k\pi$, F primitivní funkce k f. Jednotlivé díly grafu F nelze „slepit“ žádnou volbou konstanty.

(g) Integrand nejdříve upravíme. Platí

$$\frac{\sin^2 x\,\cos^2 x}{\sin^8 x+\cos^8 x}=\frac{4\sin^2 2x}{(1-\cos 2x)^4+(1+\cos 2x)^4}=\frac{2\sin^2 2x}{1+6\cos^2 2x+\cos^4 2x}.$$

Nyní platí

$$\int\frac{\sin^2 x\,\cos^2 x}{\sin^8 x+\cos^8 x}\,dx=\int\frac{2\sin^2 2x\,dx}{1+6\cos^2 2x+\cos^4 2x}=$$

$$=\int\frac{1}{\frac{1}{\cos^4 2x}+\frac{6}{\cos^2 2x}+1}\cdot\mathrm{tg}^2 2x\cdot\frac{2\,dx}{\cos^2 2x}=\left|\begin{array}{c}t=\mathrm{tg}\,2x\\ dt=\dfrac{2\,dx}{\cos^2 2x}\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^2+6(t^2+1)+1}=\int\frac{t^2\,dt}{t^4+8t^2+8}=\int\frac{t^2\,dt}{(t^2+4)^2-8}=$$

$$=\int\frac{t^2\,dt}{(t^2+4+2\sqrt{2})(t^2+4-2\sqrt{2})}.$$

Získanou racionální funkci rozložíme na součet parciálních zlomků (označme $u=t^2$).

$$\frac{u}{u^2+8u+8}=\frac{A}{u+4+2\sqrt{2}}+\frac{B}{u+4-2\sqrt{2}};\quad u=A(u+4-2\sqrt{2})+B(u+4+2\sqrt{2}).$$

Dosazením $u=-4-2\sqrt{2}$ dostaneme $A=\frac{4+2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$, dosazením $u=-4+2\sqrt{2}$ dostaneme $B=-\frac{4-2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$. Platí tedy

$$\mathcal{I}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\int\frac{dt}{t^2+4+2\sqrt{2}}+\frac{1}{2}(1-\sqrt{2})\int\frac{dt}{t^2+4-2\sqrt{2}}=$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\right)^2 + 1} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} + C =$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ \sqrt{2+\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} - \sqrt{2-\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \right\} + C.$$

(h) Užitím vzorců pro poloviční úhel dostaneme

$$\int \frac{\cos x \, dx}{(1-\cos x)^2} = \frac{1}{4} \int \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^4 \frac{x}{2}} \, dx = \frac{1}{4} \left\{ \int \frac{\operatorname{cotg}^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} \, dx - \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2}} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{3} \operatorname{cotg}^3 \frac{x}{2} + \operatorname{cotg} \frac{x}{2} \right\} + C.$$

Poznámka: Integrály ze součinů goniometrických funkcí tvaru $\sin ax \, \sin bx$, $\sin ax \, \cos bx$, $\cos ax \, \cos bx$ se snadno spočítají úpravou integrandu užitím jednoho z následujících vzorců:

$$\sin ax \, \cos bx = \frac{1}{2} \left\{ \sin(a+b)x + \sin(a-b)x \right\}$$

$$\cos ax \, \cos bx = \frac{1}{2} \left\{ \cos(a+b)x + \cos(a-b)x \right\}$$

$$\sin ax \, \sin bx = \frac{1}{2} \left\{ \cos(a-b)x - \cos(a+b)x \right\}.$$

(i) Použitím předchozí poznámky dostaneme

$$\int \sin ax \, \cos bx \, dx = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\cos(a+b)x}{a+b} + \frac{\cos(a-b)x}{a-b} \right\} + C$$

$$\int \cos ax \, \cos bx \, dx = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin(a+b)x}{a+b} + \frac{\sin(a-b)x}{a-b} \right\} + C$$

$$\int \sin ax \, \sin bx \, dx = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin(a-b)x}{a-b} - \frac{\sin(a+b)x}{a+b} \right\} + C$$

Napište vzorce i pro $b = \pm a \neq 0$.

(j) Užitím vzorců z předchozí poznámky dostaneme

$$\cos x \, \cos 2x \, \cos 3x = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x) \cos 3x = \frac{1}{2} \cos^2 3x + \frac{1}{4}(\cos 4x + \cos 2x) =$$

$$= \frac{1}{4}(1 + \cos 6x + \cos 4x + \cos 2x)$$

a odtud

$$\int \cos x \, \cos 2x \, \cos 3x \, dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{24} \sin 6x + \frac{1}{16} \sin 4x + \frac{1}{8} \sin 2x + C.$$

(k) Integrand nejdříve upravíme do vhodnějšího tvaru. Platí

$$\sin^3 2x \, \cos^2 3x = \sin 2x \, \frac{1-\cos 4x}{2} \cdot \frac{1+\cos 6x}{2} =$$

$$= \frac{1}{4} \sin 2x\{1 - \cos 4x + \cos 6x - \cos 4x \, \cos 6x\} =$$

$$= \frac{1}{4} \sin 2x\{1 - \cos 4x + \cos 6x - \frac{1}{2}(\cos 10x + \cos 2x)\} =$$

$$= \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 6x + \frac{1}{8} \sin 2x + \frac{1}{8} \sin 8x - \frac{1}{8} \sin 4x - \frac{1}{16} \sin 12x + \frac{1}{16} \sin 8x - \frac{1}{16} \sin 4x =$$

$$= \frac{3}{8} \sin 2x - \frac{3}{16} \sin 4x - \frac{1}{8} \sin 6x + \frac{3}{16} \sin 8x - \frac{1}{16} \sin 12x.$$

Odtud plyne, že

$$\int \sin^3 2x \, \cos^2 3x \, dx = -\frac{3}{16} \cos 2x + \frac{3}{64} \cos 4x + \frac{1}{48} \cos 6x - \frac{3}{128} \cos 8x + \frac{1}{192} \cos 12x + C.$$

Poznámka: V příkladech 14(i),(j),(k) spočteme (konečnou) Fourierovu řadu integrované funkce a tu pak integrujeme člen po členu. Každá funkce tvaru $\cos^j kx \cos^l mx$, $\cos^j kx \sin^l mx$, $\sin^j kx \sin^l mx$, $j, k, l, m \in \mathbf{N}$, má konečný Fourierův rozvoj, který lze spočítat postupem z příkladu 14(k). Obecněji: Každá funkce tvaru $P_n(\sin x, \cos x)$, kde P_n je polynom ve dvou proměnných, má konečný Fourierův rozvoj. Co to je Fourierova řada, se dozvíte později.

(l) Je-li $a - b = 2k\pi$ pro $k \in \mathbf{Z}$, potom platí $\sin(x+a) = \sin(x+b)$, a tedy

$$\int \frac{dx}{\sin(x+a)\,\sin(x+b)} = -\mathrm{cotg}(x+a) + C.$$

Analogicky pro $a - b = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, platí $\sin(x+a) = -\sin(x+b)$, a tedy

$$\int \frac{dx}{\sin(x+a)\,\sin(x+b)} = \mathrm{cotg}(x+a) + C.$$

Jestliže je $a - b \neq k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$, potom je

$$\mathrm{cotg}u - \mathrm{cotg}v = \frac{\cos u \, \sin v - \cos v \, \sin u}{\sin u \, \sin v} = \frac{\sin(v-u)}{\sin u \, \sin v}$$

a tedy

$$\mathrm{cotg}(x+a) - \mathrm{cotg}(x+b) = \frac{\sin(b-a)}{\sin(x+a)\,\sin(x+b)}$$

a odtud

$$\int \frac{dx}{\sin(x+a)\,\sin(x+b)} = \frac{1}{\sin(b-a)} \int \{\mathrm{cotg}(x+a) - \mathrm{cotg}(x+b)\}\,dx =$$

$$\frac{1}{\sin(b-a)} \ln \left| \frac{\sin(x+a)}{\sin(x+b)} \right| + C.$$

Poznámka: Na tento integrál lze převézt i integrály

$$\int \frac{dx}{\cos(x+a)\,\cos(x+b)}, \quad \int \frac{dx}{\sin(x+a)\,\cos(x+b)},$$

poněvadž $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ a funkce sin je lichá (viz též návod k příkladům 19(m),(n)).

15. Vypočtěte $\int f(x)\,dx$, je-li

(a) $f(x) = \cos^3 x$, $\quad\left[\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\right]$

(b) $f(x) = \sin^3 x$, $\quad\left[-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\right]$

(c) $f(x) = \sin^2 x$, $\quad\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]$

(d) $f(x) = \cos^2 x$, $\quad\left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right]$

(e) $f(x) = \sin^3 x\,\cos^2 x$, $\quad\left[\frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x\right]$

(f) $f(x) = \sin^3 x\,\cos^4 x$, $\quad\left[\frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{1}{5}\cos^5 x\right]$

(g) $f(x) = \sin^8 x\,\cos^3 x$, $\quad\left[\frac{1}{9}\sin^9 x - \frac{1}{11}\sin^{11} x\right]$

(h) $f(x) = \cos^5 x$, $\quad\left[\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x\right]$

(i) $f(x) = \sin^5 x\,\cos^5 x$,
$\left[\frac{1}{6}\sin^6 x - \frac{1}{4}\sin^8 x + \frac{1}{10}\sin^{10} x = \frac{1}{120} - \frac{1}{64}(\cos 2x - \frac{2}{3}\cos^3 2x + \frac{1}{5}\cos^5 2x)\right]$

(j) $f(x) = \sin^7 2x\,\cos^5 2x$,
$\left[\frac{1}{16}\sin^8 2x - \frac{1}{10}\sin^{10} 2x + \frac{1}{24}\sin^{12} 2x;\right.$ zkuste též substituci $\left. t = \cos 2x\right]$

(k) $f(x) = \sin^6 x$, $\quad\left[\frac{5}{16}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x\right]$

(l) $f(x) = \cos^6 x$, $\quad\left[\frac{5}{16}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x\right]$

(m) $f(x) = \cos^3 x\,\cos 2x$, $\quad\left[\sin x - \sin^3 x + \frac{2}{5}\sin^5 x\right]$

(n) $f(x) = \cos^2 3x\,\sin x$,
$\left[\frac{24}{5}\cos^5 x - \frac{16}{7}\cos^7 x - 3\cos^3 x;\right.$ užijte vyjádření $\left.\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x\right]$

16. Vypočtěte $\int f(x)\,dx$, je-li

(a) $f(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}$, $\quad\left[\frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}\right]$

(b) $f(x) = \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}$, $\quad\left[\frac{1}{2\sin^2 x} - \frac{1}{4\sin^4 x}\right]$

(c) $f(x) = \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}$, $\quad\left[\frac{1}{2}\sin^2 x - \ln\sin^2 x - \frac{1}{2\sin^2 x}\right]$

(d) $f(x) = \frac{\sin^4 x}{\cos x}$, $\quad\left[\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} - \frac{1}{3}\sin^3 x - \sin x\right]$

(e) $f(x) = \frac{1}{\sin x\,\cos^2 x}$, $\quad\left[\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right]$

(f) $f(x) = \frac{1}{\sin x\,\cos^3 x}$, $\quad\left[\frac{1}{2\cos^2 x} + \ln|\mathrm{tg}\,x|\right]$

(g) $f(x) = \frac{1}{\cos x\,\sin^3 x}$, $\quad\left[-\frac{1}{2\sin^2 x} + \ln|\mathrm{tg}\,x|\right]$

(h) $f(x) = \frac{1}{\cos^4 x\,\sin x}$, $\quad\left[\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right]$

(i) $f(x) = \frac{1}{\cos^3 x}$, $\quad\left[\frac{1}{4}\left\{\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + \frac{2\sin x}{\cos^2 x}\right\}\right]$

(j) $f(x) = \frac{1}{\sin^3 x}$, $\quad\left[\frac{1}{4}\left\{\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} - \frac{2\cos x}{\sin^2 x}\right\}\right]$

(k) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x\,\cos^3 x}$, $\quad\left[\frac{3}{4}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} - \frac{1}{\sin x} + \frac{\sin x}{2\cos^2 x}\right]$

(l) $f(x) = \frac{1}{\cos^3 x\,\sin^3 x}$, $\quad\left[2\ln|\mathrm{tg}\,x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2\cos^2 x}\right]$

(m) $f(x) = \frac{1}{\cos^5 x\,\sin^3 x}$,
$\left[3\ln|\mathrm{tg}\,x| + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{4\cos^4 x} - \frac{1}{2\sin^2 x};\right.$ srovnejte substituce $t = \sin x$ a $\left. t = \mathrm{tg}\,x\right]$

(n) $f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos^3 x}$, $\quad\left[\frac{2}{\cos x}\right]$

(o) $f(x) = \frac{\sin 3x}{\cos x}$, $\quad\left[\ln|\cos x| - 2\cos^2 x;\right.$ vyjádřete $\sin 3x$ pomocí $\sin x$ a $\left.\cos x\right]$

(p) $f(x) = \frac{\cos 3x}{\sin^5 x}$, $\quad\left[\frac{3}{2\sin^2 x} - \frac{1}{4}\mathrm{cotg}^4 x;\right.$ vyjádřete $\cos 3x$ pomocí $\sin x$ a $\left.\cos x\right]$

(q) $f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin 4x}$, $\left[\frac{1}{8}\left\{\ln|\operatorname{tg} 2x| + \ln|\operatorname{tg} x|\right\}\right]$

(r) $f(x) = \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}$, $\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(2+\cos x)^2(1-\cos x)}{(1+\cos x)^3}\right]$

17. Vypočtěte $\int f(x)\,dx$, je-li

(a) $f(x) = \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}$, $\left[\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x\right]$

(b) $f(x) = \frac{1}{\sin^4 x}$, $\left[-\frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3 x - \operatorname{cotg} x\right]$

(c) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x\,\cos^4 x}$, $\left[\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + 2\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x\right]$

(d) $f(x) = \frac{\sin^4 x}{\cos^{10} x}$, $\left[\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + \frac{2}{7}\operatorname{tg}^7 x + \frac{1}{9}\operatorname{tg}^9 x\right]$

(e) $f(x) = \frac{1}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}$, $\left[\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3\operatorname{tg} x)\right]$

(f) $f(x) = \frac{1}{1+\sin^2 x}$, $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)\right]$

(g) $f(x) = \operatorname{tg}^5 x$, $\left[\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \ln|\cos x|\right]$

(h) $f(x) = \operatorname{cotg}^4 x$, $\left[x + \operatorname{cotg} x - \frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3 x\right]$

(i) $f(x) = \operatorname{tg}^6 x$, $\left[\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x - x\right]$

(j) $f(x) = \operatorname{cotg}^6 x$, $\left[x - \operatorname{cotg} x + \frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3 x - \frac{1}{5}\operatorname{cotg}^5 x\right]$

(k) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}^8 x}$, $\left[-\frac{1}{7}\operatorname{cotg}^7 x + \frac{1}{5}\operatorname{cotg}^5 x - \frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3 x + \operatorname{cotg} x + x\right]$

(l) $f(x) = \frac{1}{1+\operatorname{tg} x}$, $\left[\frac{1}{2}\{x + \ln|\sin x + \cos x|\}\right]$

(m) $f(x) = \frac{1}{3+5\operatorname{tg} x}$, $\left[\frac{1}{34}\{3x + 5\ln|5\sin x + 3\cos x|\}\right]$

(n) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}$, $\left[x - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)\right]$

Poznámky: (1.) Výsledky příkladů (e) a (f) lze „slepit“ na primitivní funkci v celém **R**. (2.) V příkladech (l) a (m) je výsledek funkce spojitá v bodech $(2k+1)\,\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}$, neboť v těchto bodech lze zadanou funkci spojitě dodefinovat nulou.

18. Vypočtěte $\int f(x)\,dx$, je-li

(a) $f(x) = \frac{1}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$, $ab \neq 0$, $\left[\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg} x\right)\right]$

(b) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x\,\cos 2x}$, $\left[\ln|\sin x| - \frac{1}{2}\ln|\cos 2x|\right]$

(c) $f(x) = \frac{1}{1-\sin^4 x}$, $\left[\frac{1}{2}\operatorname{tg} x + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)\right]$

(d) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x+\operatorname{tg}^2 x}$, $\left[-\frac{1}{2}\operatorname{cotg} x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right]$

(e) $f(x) = \frac{\cos^4 x+\sin^4 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}$, $\left[\frac{1}{4}\left\{\sin 2x + \ln\left|\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|\right\}\right]$

(f) $f(x) = \frac{1}{\cos^4 x+\sin^4 x}$, $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}}\right]$

(g) $f(x) = \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\cos^4 x+\sin^4 x}$, $\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}-\sin 2x}{\sqrt{2}+\sin 2x}\right]$

(h) $f(x) = \frac{1}{\cos^6 x+\sin^6 x}$, $\left[\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} 2x}{2}\right]$

(i) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1-\operatorname{tg} x}$, $\left[\frac{1}{4}\left\{\cos^2 x - \sin x\,\cos x - \ln|\cos x - \sin x|\right\};\right.$
lze též užít identitu $4\sin^2 x\,\cos x = \cos x + \sin x - (\sin 2x + \cos 2x)(\cos x - \sin x)\big]$

(j) $f(x) = \frac{2\sin x+3\cos x}{\sin^2 x\,\cos x+9\cos^3 x}$, $\left[\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{3} + \ln(\operatorname{tg}^2 x + 9)\right]$

(k) $f(x) = \frac{\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}$, $\left[\frac{1}{6}\ln\frac{1-\sin x\,\cos x}{(\sin x+\cos x)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sin x-\cos x}{\sqrt{3}\,\cos x}\right]$

(l) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^3 x - \cos^3 x}$, $\left[\frac{1}{3} \ln \frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{1+\sin x \cos x}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sin x + \cos x}{\sqrt{3}\cos x}\right]$

(m) $f(x) = \frac{1}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2}$, $\left[\frac{1}{8}\left\{3\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} - \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\right\}\right]$

(n) $f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin x \cos 3x}$, $\left[\frac{1}{2} \ln \left|\frac{\sin^2 x \cos x}{\cos 3x}\right|\right]$

(o) $f(x) = \frac{1}{(a \sin x + b \cos x)^2}$, $a \neq 0$, $\left[-\frac{1}{a} \frac{\cos x}{a \sin x + b \cos x}\right]$

19. Vypočtěte $\int f(x)\,dx$, je-li

(a) $f(x) = \sin 5x \cos x$, $[-\frac{1}{12} \cos 6x - \frac{1}{8} \cos 4x]$

(b) $f(x) = \sin 2x \cos 4x$, $[\frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{12} \cos 6x]$

(c) $f(x) = \cos x \cos 4x$, $[\frac{1}{10} \sin 5x + \frac{1}{6} \sin 3x]$

(d) $f(x) = \sin x \sin 3x$, $[\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x]$

(e) $f(x) = \sin(3x+2)\cos(x-1)$, $[-\frac{1}{8} \cos(4x+1) - \frac{1}{4} \cos(2x+3)]$

(f) $f(x) = \sin^2 x \cos(3x+1)$, $[\frac{1}{6} \sin(3x+1) - \frac{1}{20} \cos(5x+1) - \frac{1}{4} \sin(x+1)]$

(g) $f(x) = \cos^2 ax \cos^2 bx$,

$\left[\frac{1}{4}x + \frac{1}{8a} \sin 2ax + \frac{1}{8b} \sin 2bx + \frac{1}{16(a+b)} \sin 2(a+b)x + \right.$

$\left. + \frac{1}{16(a-b)} \sin 2(a-b)x,\ ab(a^2-b^2) \neq 0\right]$

(h) $f(x) = \cos x \cos 3x \cos 5x$, $[\frac{1}{36} \sin 9x + \frac{1}{28} \sin 7x + \frac{1}{12} \sin 3x + \frac{1}{4} \sin x]$

(i) $f(x) = \sin x \sin 2x \sin 3x$, $[-\frac{1}{8} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 4x + \frac{1}{24} \cos 6x]$

(j) $f(x) = \sin x \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{3}$, $[\frac{3}{2} \cos \frac{x}{6} + \frac{3}{22} \cos \frac{11x}{6} - \frac{3}{10} \cos \frac{5x}{6} - \frac{3}{14} \cos \frac{7x}{6}]$

(k) $f(x) = \sin x \sin(x+a) \sin(x+b)$,

$[\frac{1}{12} \cos(3x+a+b) - \frac{1}{2} \cos a \cos(x+b) - \frac{1}{4} \cos(x+a-b)]$

(l) $f(x) = \frac{1}{\sin x + \cos x}$, $\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right|\right]$

(m) $f(x) = \frac{1}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$, $\left[\frac{1}{\cos(a-b)} \ln \left|\frac{\sin(x+a)}{\cos(x+b)}\right|,\ \cos(a-b) \neq 0;\right.$

užijte vztah $\operatorname{tg} u + \operatorname{cotg} u = \frac{\cos(u-v)}{\cos u \sin v}$. Co dostaneme pro $\cos(a-b) = 0$?$\left.\right]$

(n) $f(x) = \frac{1}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$, $\left[\frac{1}{\sin(a-b)} \ln \left|\frac{\cos(x+b)}{\cos(x+a)}\right|,\ \sin(a-b) \neq 0;\right.$

užijte vztah $\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} v = \frac{\sin(u-v)}{\cos u \cos v}$. Jaký je výsledek pro $\sin(a-b) = 0$?$\left.\right]$

(o) $f(x) = \frac{1}{\sin x - \sin a}$, $\left[\frac{1}{\cos a} \ln \left|\frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\cos \frac{x+a}{2}}\right|\right.$, užijte vzorec pro $\sin\alpha - \sin\beta$ a příklad (m).

Vypočtěte též pro $a = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.]

(p) $f(x) = \frac{1}{\cos x + \cos a}$, $\left[\frac{1}{\sin a} \ln \left|\frac{\cos \frac{x-a}{2}}{\cos \frac{x+a}{2}}\right|\right.$, užijte vzorec pro $\cos\alpha + \cos\beta$ a příklad (n).

Vypočtěte též pro $a = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.]

(q) $f(x) = \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+a)$, $\left[\operatorname{cotg} a \ln \left|\frac{\cos x}{\cos(x+a)}\right| - x;\right.$ ukažte, že

$\operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+a) = \frac{\cos a}{\cos x \cos(x+a)} - 1$ a užijte příklad (n). Řešte též pro $a = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.]

(r) $f(x) = \operatorname{cotg} x \operatorname{cotg}(x+a)$, $\left[-\operatorname{cotg} a \ln \left|\frac{\sin(x+a)}{\sin x}\right| - x;\right.$ ukažte, že

$\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg}(x+a) = \frac{\cos a}{\sin x \sin(x+a)} - 1$ a užijte příklad 14(l).

Řešte též pro $a = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.]

20. Vypočtěte $\int f(x)\,dx$, je-li

(a) $f(x) = \frac{1}{a\sin x + b\cos x}$, $ab \neq 0$, (b) $f(x) = \frac{1}{2\sin x - \cos x + 5}$,

(c) $f(x) = \frac{1}{1+\varepsilon\cos x}$, $\varepsilon > 0$, (d) $f(x) = \frac{\alpha\sin x + \beta\cos x}{a\sin x + b\cos x}$, $ab \neq 0$,

(e) $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}$, (f) $f(x) = \frac{\alpha\sin x + \beta\cos x + \gamma}{a\sin x + b\cos x + c}$,

(g) $f(x) = \frac{2\sin x + \cos x}{3\sin x + 4\cos x - 2}$, (h) $f(x) = \frac{\alpha\sin^2 x + \beta\sin x\cos x + \gamma\cos^2 x}{a\sin x + b\cos x}$, $ab \neq 0$,

(i) $f(x) = \frac{\sin^2 x - \sin x\,\cos x + 2\cos^2 x}{\sin x + 2\cos x}$, (j) $f(x) = \frac{\alpha\sin x + \beta\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^2}$, $ab \neq 0$

(k) $f(x) = \frac{1}{(1+\varepsilon\cos x)^2}$, $0 < \varepsilon < 1$, (l) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{2\sin^2 x - 4\sin x\,\cos x + 5\cos^2 x}$.

Řešení:

(a) Do daného integrálu zavedeme substituci $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$. Nyní platí

$$\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = dt \;\Rightarrow\; dx = 2\cos^2\frac{x}{2}\,dt = \frac{2dt}{t^2+1},$$

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{t^2+1} - 1 = \frac{1-t^2}{t^2+1},$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\,\cos\frac{x}{2} = 2\mathrm{tg}\frac{x}{2}\,\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2t}{t^2+1}.$$

Dosazením do integrálu dostaneme

$$\int\frac{dx}{a\sin x + b\cos x} = 2\int\frac{\frac{dt}{t^2+1}}{\frac{2at}{t^2+1} + \frac{b(1-t^2)}{t^2+1}} = 2\int\frac{dt}{-bt^2 + 2at + b}.$$

Položíme-li $bt^2 - 2at - b = 0$, dostaneme kořeny $t_1 = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}$, $t_2 = \frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{b}$, $(t_1t_2 = -1)$, a tedy

$$\frac{2}{-bt^2 + 2at + b} = \frac{-\frac{2}{b}}{t^2 - \frac{2a}{b}t - 1} = \frac{A}{t-t_1} + \frac{B}{t-t_2},$$

neboli

$$-\frac{2}{b} = A(t-t_2) + B(t-t_1)$$

a odtud

$$A + B = 0,\;\; At_2 + Bt_1 = \frac{2}{b} \;\Rightarrow\; A = -\frac{2}{b(t_2-t_1)},\;\; B = \frac{2}{b(t_1-t_2)},$$

tudíž

$$A = -\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad B = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Je tedy

$$\int\frac{dx}{a\sin x + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\ln\left|\frac{t-t_2}{t-t_1}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2} - t_2}{\mathrm{tg}\frac{x}{2} - t_1}\right| + C.$$

Poznámka: Předchozí výpočet je u těchto typů integrálů trochu zdlouhavý. Rychlejší cesta vede přes vyjádření jmenovatele pomocí funkce sin. Platí

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\left\{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right\} = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi),$$

kde

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Tato dvojice rovností určuje φ jednoznačně v množině $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$. Odtud plyne, že

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}\right)\right| + C = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}\right| + C,$$

kde sgn $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ určíme podle kvadrantu, v němž leží úhel φ a

$$\left|\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{\sqrt{a^2+b^2}+a}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{|b|}.$$

Odtud $t_1 = -\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, $t_2 = \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} = -\frac{1}{t_1}$ a

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - t_1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - t_2}\right| + C.$$

(b) Platí

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} = \left| \begin{array}{c} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \\ dx = \frac{2\,dt}{t^2+1} \end{array} \right| = 2\int \frac{\frac{dt}{t^2+1}}{\frac{4t}{t^2+1} - \frac{1-t^2}{t^2+1} + 5} = 2\int \frac{dt}{6t^2+4t+4} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}} = \frac{3}{5}\int \frac{dt}{\left(\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + C.$$

(c) Označme $\mathcal{I} = \int \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$.

i. Je-li $\varepsilon = 1$, potom

$$\mathcal{I} = \int \frac{dx}{1+\cos x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

Pro další hodnoty ε zavedeme substituci $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, takže dostaneme

$$\int \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} = 2\int \frac{\frac{dt}{t^2+1}}{1 + \frac{\varepsilon - \varepsilon t^2}{t^2+1}} = 2\int \frac{dt}{(1-\varepsilon)t^2 + 1 + \varepsilon}.$$

ii. Buď $0 < \varepsilon < 1$. Potom je

$$\mathcal{I} = \frac{2}{1+\varepsilon}\int \frac{dt}{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}t^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

iii. Nechť je $\varepsilon > 1$. Potom užitím vzorce

$$\int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C$$

dostaneme

$$\mathcal{I} = \frac{2}{1+\varepsilon}\int \frac{dt}{1 - \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}t^2} = \frac{1}{1+\varepsilon}\sqrt{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}} \ln\left|\frac{1+t\sqrt{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}}}{1-t\sqrt{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \ln \left| \frac{\sqrt{\varepsilon+1}+t\sqrt{\varepsilon-1}}{\sqrt{\varepsilon+1}-t\sqrt{\varepsilon-1}} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \ln \left| \frac{(\varepsilon+1)+2t\sqrt{\varepsilon^2-1}+(\varepsilon-1)t^2}{\varepsilon+1-(\varepsilon-1)\,t^2} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \ln \left| \frac{\frac{1+\varepsilon}{t^2+1} + \frac{(\varepsilon-1)t^2}{t^2+1} + \sqrt{\varepsilon^2-1}\frac{2t}{t^2+1}}{\frac{1+\varepsilon}{t^2+1} - \frac{(\varepsilon-1)t^2}{t^2+1}} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \ln \left| \frac{\frac{1+\varepsilon}{2}(1+\cos x) + \frac{\varepsilon-1}{2}(1-\cos x) + \sqrt{\varepsilon^2-1}\sin x}{\frac{1+\varepsilon}{2}(1+\cos x) - \frac{\varepsilon-1}{2}(1-\cos x)} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \ln \left| \frac{\varepsilon+\cos x+\sqrt{\varepsilon^2-1}\sin x}{1+\varepsilon\,\cos x} \right| + C$$

Poznámka: Za povšimnutí stojí skutečnost, že daný integrál spojitě závisí na parametru ε, i když se výsledky pro $0 < \varepsilon < 1$ a $\varepsilon > 1$ formálně dosti liší. Ověřte si, že

$$\lim_{\varepsilon\to 1_-} \int \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} = \lim_{\varepsilon\to 1_+} \int \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Integrační konstanty pokládáme všude rovny 0. Analogicky $\lim\limits_{\varepsilon\to 0_+} \int \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} = x$.

(d) Čitatel v integrandu napíšeme nejdříve ve tvaru

$$\alpha\sin x+\beta\cos x = \underbrace{A\{a\sin x+b\cos x\}}_{\text{jmenovatel}} + \underbrace{B\{a\cos x-b\sin x\}}_{\text{derivace čitatele}},$$

kde A a B jsou zatím neznámá čísla. Srovnáním koeficientů u $\sin x$ a $\cos x$, což jsou lineárně nezávislé funkce, dostaneme

$$\begin{array}{llll} \sin x: & \alpha = & Aa & -Bb \\ \cos x: & \beta = & Ab & +Ba. \end{array}$$

Získaná soustava má jediné řešení právě když $a^2+b^2 \neq 0$ (determinant soustavy) a řešení má tvar

$$A = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{vmatrix} \alpha & -b \\ \beta & a \end{vmatrix} = \frac{\alpha a+\beta b}{a^2+b^2}; \quad B = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{vmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{vmatrix} = \frac{\beta a-\alpha b}{a^2+b^2}.$$

Odtud plyne, že

$$\int \frac{\alpha\sin x+\beta\cos x}{a\sin x+b\cos x}\,dx = Ax + B\ln|a\sin x+b\cos x| + K$$

Poznámky: (1.) Výše popsaná úprava ukazuje, že v tomto typu integrálu se můžeme dokonce vyhnout zavedení univerzální substituce $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Pomocí ní dostaneme

$$\int \frac{\alpha\sin x+\beta\cos x}{a\sin x+b\cos x}\,dx = \int \frac{2(\beta t^2-2\alpha t-\beta)\,dt}{(bt^2-2at-b)(t^2+1)} = (*)$$

$$= 2A\operatorname{arctg} t + B\,\ln\frac{|bt^2-2at-b|}{t^2+1} = 2A\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + B\ln|a\sin x+b\cos x|,$$

kde A a B jsou konstanty, vypočtené v řešení příkladu (d). Jediné dva problémy jsou tedy

i. technický, tj. provedení rovnosti označené $(*)$ (zkontrolujte) a

ii. „slepení“ funkce $2A\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)$ (definované v $\mathbf{R}-\{(2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$) na výraz Ax. Je to pochopitelné - integrál z příkladu (d) je formulován tak, aby bylo vhodné použít substituci $t=a\sin x+b\cos x$.

(2.) Přímé použití univerzální substituce $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ může obecně vést ke složitým integrálům z racionální lomené funkce $\frac{P(t)}{Q(t)}$. Je-li tato funkce ryze lomená, lze pomocí Ostrogradského metody psát

$$\int\frac{P(t)}{Q(t)}\,dt=\frac{\widetilde{P}(t)}{\widetilde{Q}(t)}+\int\frac{P_1(t)}{Q_1(t)}\,dt,$$

kde Q_1 je součin všech kořenových činitelů polynomu $Q(t)$, $\widetilde{Q}(t)=\frac{Q(t)}{Q_1(t)}$ a funkce $\frac{\widetilde{P}(t)}{\widetilde{Q}(t)}$, $\frac{P_1(t)}{Q_1(t)}$ jsou ryze lomené. Rozložíme-li $\frac{P_1(t)}{Q_1(t)}$ na součet parciálních zlomků, je třeba vypočítat integrály

$$\int\frac{dt}{t-\alpha}=\left|\begin{array}{l} t=\mathrm{tg}\frac{x}{2} \\ dt=\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}\end{array}\right|=\int\frac{dx}{\sin x-\alpha(1+\cos x)},$$

$$\int\frac{dt}{t^2+pt+q}=\int\frac{dx}{1-\cos x+p\sin x+q(1+\cos x)}.$$

V následujících příkladech se budeme snažit daný integrál vhodnou úpravou a následnou substitucí buď vypočítat přímo nebo alespoň převést na integrál typu $\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x+c}$, kde je užití substituce $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ efektivní - srovnejte s příkladem (f).

(e) Dosadíme-li $\alpha=1,\ \beta=-1,\ a=1,\ b=2$ do vzorce z předchozího příkladu, dostaneme

$$\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}\,dx=\frac{1}{5}\{x+3\ln|\sin x+2\cos x|\}+K.$$

(f) Čitatele v integrandu upravíme nejdříve do tvaru

$$\alpha\sin x+\beta\cos x+\gamma=\underbrace{A\{a\sin x+b\cos x+c\}}_{\text{jmenovatel}}\ \underbrace{+B\{a\cos x-b\sin x\}}_{\text{derivace jmenovatele}}\ +C$$

kde $A,\ B,\ C$ jsou zatím neurčená čísla. Srovnáním koeficientů u funkcí $\sin x$ a $\cos x$ (jde o nezávislé funkce) dostaneme soustavu

$$\begin{array}{rrrrr} \sin x: & \alpha= & Aa & -Bb & \\ \cos x: & \beta= & Ab & +Ba & \\ 1: & \gamma= & Ac & & +C, \end{array}$$

jejíž determinant je

$$\begin{vmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=a^2+b^2\neq 0.$$

pomocí Cramerova pravidla má tedy řešení

$$A=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{vmatrix} \alpha & -b & 0 \\ \beta & a & 0 \\ \gamma & 0 & 1 \end{vmatrix}=\frac{\alpha a+\beta b}{a^2+b^2},\quad B=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{vmatrix} a & \alpha & 0 \\ b & \beta & 0 \\ 0 & \gamma & 1 \end{vmatrix}=\frac{\beta a-\alpha b}{a^2+b^2},$$

$$C = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{vmatrix} a & -b & \alpha \\ b & a & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix} = \gamma - \frac{c(\alpha a + \beta b)}{a^2+b^2}.$$

Daný integrál můžeme nyní přepsat do tvaru

$$\int \frac{\alpha \sin x + \beta \cos x + \gamma}{a \sin x + b \cos x + c}\, dx = Ax + B \ln|a \sin x + b \cos x + c| + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}.$$

Jestliže do zbývajícího integrálu zavedeme substituci $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, dostaneme

$$\mathcal{I} = \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c} = 2 \int \frac{dt}{(c-b)t^2 + 2at + b + c}$$

a výpočet tohoto integrálu při konkrétních hodnotách a, b, c je snadný:

i. je-li $b = c$, $a = 0$, pak $b \neq 0$ a $\mathcal{I} = \frac{1}{b}\operatorname{tg}\frac{x}{2}$,

ii. je-li $b = c$, $a \neq 0$, je $\mathcal{I} = \frac{1}{a} \ln|a\operatorname{tg}\frac{x}{2} + b|$.

iii. Buď nyní $b \neq c$ a $D = a^2 + b^2 - c^2$ diskriminant kvadratického trojčlenu

$$(*) \qquad \frac{c-b}{2}t^2 + at + \frac{b+c}{2}.$$

A. Je-li $D < 0$ (tj. přímka $ax + by + c = 0$ je nesečna jednotkové kružnice $x^2 + y^2 = 1$), pak

$$\mathcal{I} = \frac{2}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{(c-b)\operatorname{tg}\frac{x}{2} + a}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}}.$$

B. Je-li $D = 0$ (tečna), pak $\mathcal{I} = \frac{2}{(c-b)\operatorname{tg}\frac{x}{2} + a}$.

C. Je-li $D > 0$ (sečna) a $t_1 < t_2$ kořeny trojčlenu $(*)$, pak

$$\mathcal{I} = \frac{2}{(c-b)(t_2 - t_1)} \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - t_2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - t_1}\right|.$$

Tuto funkci lze zapsat ve tvaru

$$\mathcal{I} = K \ln\left|\frac{\alpha_1 \sin x + \beta_1 \cos x + \gamma_1}{\alpha_2 \sin x + \beta_2 \cos x + \gamma_2}\right|,$$

ovšem tento zápis je praktický jen tehdy, mají-li dva ze tří polynomů $(t-t_1)^2$, $(t-t_2)^2$, $(t-t_1)(t-t_2)$ "hezké" koeficienty (tj. nejlépe racionální).

(g) Dosadíme-li $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$, $a = 3$, $b = 4$, $c = -2$ do vzorce z předchozího příkladu, dostaneme

$$\int \frac{(2 \sin x + \cos x)\, dx}{3 \sin x + 4 \cos x - 2} = \frac{2}{5}x - \frac{1}{5} \ln|3 \sin x + 4 \cos x - 2| + \frac{4}{5} \int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x - 2}.$$

Dále

$$\int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x - 2} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \\ dx = \frac{2\,dt}{t^2+1} \end{array} \right| = 2 \int \frac{dt}{6t + 4(1-t^2) - 2(t^2+1)} =$$

$$= 2 \int \frac{dt}{-6t^2 + 6t + 2} = -\frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 - t - \frac{1}{3}}.$$

Řešením rovnice $t^2 - t - \frac{1}{3} = 0$ dostaneme dvojici kořenů

$$t_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right), \quad t_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right).$$

Dále platí

$$\frac{-\frac{1}{3}}{t^2 - t - \frac{1}{3}} = \frac{A}{t - t_1} + \frac{B}{t - t_2}.$$

Srovnáním koeficientů u stejných mocnin t dostaneme soustavu

$$\begin{array}{rll} 0 = & A & +B \\ \frac{1}{3} = & At_2 & +Bt_1 \end{array}$$

s řešením $A = -\frac{1}{\sqrt{21}}$, $B = \frac{1}{\sqrt{21}}$. Tedy

$$\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x - 2} = \frac{1}{\sqrt{21}} \ln\left|\frac{t - t_2}{t - t_1}\right| + K =$$

$$\frac{1}{\sqrt{21}} \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right)}\right| + K = \frac{1}{\sqrt{21}} \ln\left|\frac{\sqrt{3}(2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1) + \sqrt{7}}{\sqrt{3}(2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1) - \sqrt{7}}\right| + K$$

a výsledně

$$\int \frac{(2\sin x + \cos x)\,dx}{3\sin x + 4\cos x - 2} =$$

$$= \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}\ln|3\sin x + 4\cos x - 2| + \frac{4}{5\sqrt{21}} \ln\left|\frac{\sqrt{3}(2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1) + \sqrt{7}}{\sqrt{3}(2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1) - \sqrt{7}}\right| + K.$$

Rozmyslete si, že zlomek $\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}$ lze upravit do tvaru $\frac{\alpha_1 \sin x + \beta_1 \cos x + \gamma_1}{\alpha_2 \sin x + \beta_2 \cos x + \gamma_2}$, ale některé koeficienty v tomto zápisu budou "ošklivé".

(h) Čitatel v integrandu se pokusíme rozložit do tvaru

$$\alpha \sin^2 x + \beta \sin x \cos x + \gamma \cos^2 x = A \cos x(a\sin x + b\cos x) + B\sin x(a\sin x + b\cos x) + C.$$

Poněvadž jsou funkce 1, $\sin 2x$, $\cos 2x$ lineárně nezávislé, můžeme obě strany rovnosti pomocí těchto funkcí vyjádřit a srovnat koeficienty. Platí

$$\frac{\alpha}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{\beta}{2}\sin 2x + \frac{\gamma}{2}(1 + \cos 2x) =$$

$$= \frac{Aa + Bb}{2}\sin 2x + \frac{Ab}{2}(1 + \cos 2x) + \frac{Ba}{2}(1 - \cos 2x) + C.$$

Tedy

$$\begin{array}{rrlll} \cos 2x: & -\alpha + \gamma = & Ab & -Ba & \\ \sin 2x: & \beta = & Aa & +Bb & \\ 1: & \alpha + \gamma = & Ab & +Ba & +C. \end{array}$$

Determinant této soustavy algebraických rovnic jhe

$$\begin{vmatrix} b & -a & 0 \\ a & b & 0 \\ b & a & 1 \end{vmatrix} = a^2 + b^2 \neq 0;$$

Tato soustava má tedy řešení

$$A = \frac{1}{a^2 + b^2}\begin{vmatrix} -\alpha + \gamma & -a & 0 \\ \beta & b & 0 \\ \alpha + \gamma & a & 1 \end{vmatrix} = \frac{\beta a + \gamma b - \alpha b}{a^2 + b^2},$$

$$B = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{vmatrix} b & -\alpha+\gamma & 0 \\ a & \beta & 0 \\ b & \alpha+\gamma & 1 \end{vmatrix} = \frac{\beta b + \alpha a - \gamma a}{a^2+b^2},$$

$$C = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{vmatrix} b & -a & -\alpha+\gamma \\ a & b & \beta \\ b & a & \alpha+\gamma \end{vmatrix} = \frac{2(\alpha b^2 - \beta ab + \gamma a^2)}{a^2+b^2}.$$

Platí tedy

$$\int \frac{\alpha \sin^2 x + \beta \sin x\, \cos x + \gamma \cos^2 x}{a \sin x + b \cos x}\, dx = A \sin x - B \cos x + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} =$$

$$= A \sin x - B \cos x + \frac{C}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\varphi}{2}\right)\right| + K,$$

kde $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ podle příkladu 20(a).

(i) Dosazením $\alpha = -\beta = a = 1$, $\gamma = b = 2$ do výsledku příkladu (h) dostaneme

$$\mathcal{I} = \int \frac{\sin^2 x - \sin x\, \cos x + 2\cos^2 x}{\sin x + 2\cos x}\, dx = \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x + \frac{8}{5}\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x} =$$

$$= \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x + \frac{8}{5\sqrt{5}}\int \frac{dx}{\sin(x+\varphi)},$$

kde $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$, tedy $\operatorname{tg}\varphi = 2$ a $\varphi = \operatorname{arctg} 2$. Výsledně dostaneme

$$\mathcal{I} = \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x + \frac{8}{5\sqrt{5}} \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arctg} 2}{2}\right)\right| + K.$$

Poznámka: Jestliže do integrálu $\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x}$ zavedeme substituci $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, dostaneme

$$\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left|\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1 + \sqrt{5}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1 - \sqrt{5}}\right| + C$$

a pro tyto výsledky musí platit

$$\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1 + \sqrt{5}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1 - \sqrt{5}}\right| = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arctg} 2}{2}\right)\right| + K.$$

Užitím součtového vzorce pro funkci tangens lze ukázat, že

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arctg} 2}{2}\right) = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}} \cdot \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1 + \sqrt{5}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1 - \sqrt{5}},$$

pokud $x \neq (2k+1)\pi - \operatorname{arctg} 2$, $x \neq (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Odtud plyne, že $K = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$.

(j) Upravíme-li čitatel integrandu jako v příkladu (d), dostáváme

$$\int \frac{\alpha \sin x + \beta \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^2}\, dx = B \int \frac{a \cos x - b \sin x}{(a \sin x + b \cos x)^2}\, dx + A \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} =$$

$$-\frac{B}{a \sin x + b \cos x} + \frac{A}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\varphi}{2}\right)\right| + K,$$

kde

$$A = \frac{\alpha a + \beta b}{a^2+b^2},\quad B = \frac{\beta a - \alpha b}{a^2+b^2},\quad cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

(Viz příklad (d) a poznámka k příkladu (a)).

(k) Je

$$\mathcal{I}=\int\frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^2}=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\\ dx=\frac{2\,dt}{t^2+1}\end{array}\right|=2\int\frac{\frac{dt}{t^2+1}}{\left\{1+\frac{\varepsilon(1-t^2)}{t^2+1}\right\}^2}=2\int\frac{(t^2+1)dt}{\{(1-\varepsilon)t^2+1+\varepsilon\}^2}.$$

Pro vhodná A, B, C, $D\in\mathbf{R}$ platí

$$\int\frac{2(t^2+1)dt}{\{(1-\varepsilon)t^2+1+\varepsilon\}^2}=\frac{At+B}{(1-\varepsilon)t^2+1+\varepsilon}+\int\frac{Ct+D}{(1-\varepsilon)t^2+1+\varepsilon}\,dt.$$

Odtud zderivováním a vynásobením výrazem $\{(1-\varepsilon)t^2+1+\varepsilon\}^2$ dostaneme

$$2t^2+2=A\{(1-\varepsilon)t^2+1+\varepsilon\}-2(1-\varepsilon)t(At+B)+(Ct+D)\{(1-\varepsilon)t^2+1+\varepsilon\}.$$

porovnáním koeficientů u stejných mocnin t dostaneme

$$\begin{array}{llcccc}
t^3; & 0= & & & C & \\
t^2: & 2= & -(1-\varepsilon)A & & & +(1-\varepsilon)D\\
t^1: & 0= & & B & & \\
t^0: & 2= & (1+\varepsilon)A & & & +(1+\varepsilon)D
\end{array}$$

tj.

$$-A+D=\frac{2}{1-\varepsilon},\quad A+D=\frac{2}{1+\varepsilon}.$$

Odtud $D=\frac{2}{1-\varepsilon^2}$, $A=-\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$ a tedy

$$\mathcal{I}=\int\frac{2(t^2+1)dt}{\{(1-\varepsilon)t^2+1+\varepsilon\}^2}=-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\cdot\frac{2t}{(1-\varepsilon)t^2+1+\varepsilon}+\frac{2}{1-\varepsilon^2}\int\frac{dt}{(1-\varepsilon)t^2+1+\varepsilon}=$$

$$=\frac{2}{(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon)}\cdot\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\,t\right)-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\cdot\frac{2t}{(1-\varepsilon)t^2+1+\varepsilon}+K.$$

Protože

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{(1-\varepsilon)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1+\varepsilon}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\,\cos\frac{x}{2}}{(1-\varepsilon)\sin^2\frac{x}{2}+(1+\varepsilon)\cos^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\sin x}{\frac{1-\varepsilon}{2}(1-\cos x)+\frac{1+\varepsilon}{2}(1+\cos x)}=\frac{\sin x}{1+\varepsilon\cos x},$$

plyne odtud, že

$$\mathcal{I}=\frac{2}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)^3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\cdot\frac{\sin x}{1+\varepsilon\cos x}+K.$$

Primitivní funkci v celém $\mathbf{R}$ získáme „slepováním“.

(l) Jmenovatel v integrandu je možno napsat ve dvou tvarech

$$2\sin^2 x-4\sin x\,\cos x+5\cos^2 x=\gamma+(\alpha\sin x+\beta\cos x)^2=c-(a\sin x+b\cos x)^2$$

kde α, β, γ, a, b, $c\in\mathbf{R}$ jsou zatím neznámé koeficienty. Jestliže použijeme prvého vyjádření, dostaneme

$$2\sin^2 x-4\sin x\,\cos x+5\cos^2 x=\gamma+\alpha^2\sin^2 x+2\alpha\beta\sin x\,\cos x+\beta^2\cos^2 x,$$

neboli

$$1-\cos 2x-2\sin 2x+\frac{5}{2}(1+\cos 2x)=\gamma+\frac{\alpha^2}{2}(1-\cos 2x)+\alpha\beta\sin 2x+\frac{\beta^2}{2}(1+\cos 2x).$$

Srovnáním koeficientů dostaneme soustavu

$$\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\beta^2}{2}+\gamma=\frac{7}{2}; \qquad \alpha\beta=-2; \qquad -\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\beta^2}{2}=\frac{3}{2}.$$

Z druhé rovnice plyne, že $\beta=-\frac{2}{\alpha}$ a dosazením do třetí rovnice dostaneme

$$-\alpha^2+\frac{4}{\alpha^2}=3 \text{ neboli } \alpha^4+3\alpha^2-4=0$$

s řešením $\alpha^2=1$, odtud $\alpha=1$, $\beta=-2$, $\gamma=1$. Platí tedy

$$2\sin^2 x-4\sin x\,\cos x+5\cos^2 x=1+(\sin x-2\cos x)^2.$$

Pro $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=1$ dostaneme stejný výsledek. Užitím druhého vyjádření dostaneme soustavu

$$c-\frac{a^2}{2}-\frac{b^2}{2}=\frac{7}{2}, \qquad ab=2, \qquad \frac{a^2}{2}-\frac{b^2}{2}=\frac{3}{2}$$

s řešením $a=2$, $b=1$, $c=6$. Platí tedy

$$2\sin^2 x-4\sin x\,\cos x+5\cos^2 x=6-(2\sin x+\cos x)^2.$$

V dalším kroku přepíšeme čitatel do tvaru

$$\sin x+\cos x=A(\cos x+2\sin x)+B(2\cos x-\sin x).$$

V závorkách jsou derivace výrazů $\sin x-2\cos x$ a $2\sin x+\cos x$. Srovnáním koeficientů dostaneme soustavu

$$2A-B=1, \qquad A+2B=1$$

s řešením $A=\frac{3}{5}$, $B=\frac{1}{5}$. Platí tedy

$$\int\frac{(\sin x+\cos x)\,dx}{2\sin^2 x-4\sin x\,\cos x+5\cos^2 x}=\frac{3}{5}\int\frac{(\cos x+2\sin x)\,dx}{1+(\sin x-2\cos x)^2}+$$

$$+\frac{1}{5}\int\frac{(2\cos x-\sin x)\,dx}{6-(2\sin x+\cos x)^2}=\frac{3}{5}\operatorname{arctg}(\sin x-2\cos x)+\frac{1}{3}\int\frac{dt}{6-t^2}$$

kde $t=2\sin x+\cos x$. Poněvadž je

$$\frac{1}{6-t^2}=\frac{A}{\sqrt{6}-t}+\frac{B}{\sqrt{6}+t},$$

plyne odtud

$$A-B=0, \qquad A+B=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

s řešením $A=B=\frac{1}{2\sqrt{6}}$. Tedy výsledně

$$\int\frac{(\sin x+\cos x)\,dx}{2\sin^2 x-4\sin x\,\cos x+5\cos^2 x}=$$

$$=\frac{3}{5}\operatorname{arctg}(\sin x-2\cos x)+\frac{1}{10\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}+t}{\sqrt{6}-t}\right|+K=$$

$$=\frac{3}{5}\operatorname{arctg}(\sin x-2\cos x)+\frac{1}{10\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{6}+2\sin x+\cos x}{\sqrt{6}-2\sin x-\cos x}+K.$$

Poznámky: (1.) Předvedený postup výpočtu je poměrně dlouhý. Přímý výpočet pomocí substituce $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ není ovšem kratší.

$$\int \frac{(\sin x + \cos x)\,dx}{2\sin^2 x - 4\sin x\,\cos x + 5\cos^2 x} = \int \frac{-2(t^2 - 2t - 1)\,dt}{5t^4 + 8t^3 - 2t^2 - 8t + 5}.$$

Rovnici

$$(*) \qquad 5t^4 + 8t^3 - 2t^2 - 8t + 5 = 0$$

vydělíme t^2 a dostaneme

$$5\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) + \left(t - \frac{1}{t}\right) - 2 = 0.$$

Substitucí $u = t - \frac{1}{t}$, $u^2 = t^2 - 2 + \frac{1}{t^2}$ dostaneme rovnici $5u^2 + 8u + 8 = 0$ s kořeny $u_{1,2} = \frac{-4\pm 2i\sqrt{6}}{5}$. Dosazením u_1 do substituční rovnice dostaneme $t^2 + \frac{4-2i\sqrt{6}}{5}\,t - 1 = 0$. Pro tuto rovnici je $\frac{D}{4} = \frac{23-4i\sqrt{6}}{25} = \frac{(2\sqrt{6}-i)^2}{25}$ a tedy $t_{1,2} = \frac{-2+i\sqrt{6}}{5} \pm \frac{2\sqrt{6}-i}{5}$. Řešení rovnice $(*)$ je tedy

$$t_1 = \frac{\sqrt{6}-1}{5}(2+i),\ \ t_2 = \frac{\sqrt{6}+1}{5}(-2+i),\ \ t_3 = \overline{t_1} = \frac{\sqrt{6}-1}{5}(2-i),\ \ t_4 = \overline{t_2} = \frac{\sqrt{6}+1}{5}(-2-i).$$

Odtud plyne

$$5t^4+8t^3-2t^2-8t+5 = \left\{t^2 - \frac{4}{5}(\sqrt{6}-1)t + \frac{(\sqrt{6}-1)^2}{5}\right\}\cdot\left\{t^2 + \frac{4}{5}(\sqrt{6}+1)t + \frac{(\sqrt{6}+1)^2}{5}\right\}.$$

Pro vhodná A, B, C, $D \in \mathbf{R}$ platí

$$\frac{-2t^2+4t+2}{5t^4+8t^3-2t^2-8t+5} = \frac{At+B}{t^2 - \frac{4}{5}(\sqrt{6}-1)t + \frac{(\sqrt{6}-1)^2}{5}} + \frac{Ct+D}{t^2 + \frac{4}{5}(\sqrt{6}+1)t + \frac{(\sqrt{6}+1)^2}{5}},$$

$$-\frac{2}{5}t^2 + \frac{4}{5}t + \frac{2}{5} = (At+B)\left\{t^2 + \frac{4}{5}(\sqrt{6}+1)t + \frac{(\sqrt{6}+1)^2}{5}\right\} +$$
$$+(Ct+D)\left\{t^2 - \frac{4}{5}(\sqrt{6}-1)t + \frac{(\sqrt{6}-1)^2}{5}\right\}.$$

porovnáním koeficientů u stejných mocnin t dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{array}{rrlllll}
t^3: & 0 = & A & & +C & \\
t^2: & -2 = & 4(\sqrt{6}+1)A & +5B & -4(\sqrt{6}-1)C & +5D\\
t^1: & 4 = & (\sqrt{6}+1)^2A & +4(\sqrt{6}+1)B & +(\sqrt{6}-1)^2C & -4(\sqrt{6}-1)D\\
t^0: & 2 = & & (\sqrt{6}+1)^2B & & +(\sqrt{6}-1)^2D.
\end{array}$$

Dosadíme-li z první rovnice do druhé a třetí, dostaneme

$$\begin{array}{llll}
8A\sqrt{6} & +5B & +5D & = -2\\
4A\sqrt{6} & +4(\sqrt{6}+1)B & -4(\sqrt{6}-1)D & = \ \ 4
\end{array}$$

a tedy

$$\begin{array}{rll}
(-3-8\sqrt{6})B & +(8\sqrt{6}-3)D & = -6\\
(7+2\sqrt{6})B & +(7-2\sqrt{6})D & = \ \ 2.
\end{array}$$

Protože

$$\begin{vmatrix} -3-8\sqrt{6}, & -3+8\sqrt{6}\\ 7+2\sqrt{6}, & 7-2\sqrt{6}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6, & 8\sqrt{6}\\ 14, & -2\sqrt{6}\end{vmatrix} = -2\cdot 2\sqrt{6}\begin{vmatrix} 3, & 4\\ -7, & -1\end{vmatrix} = -100\sqrt{6},$$

$$\begin{vmatrix} -6, & -3+8\sqrt{6} \\ 2, & 7-2\sqrt{6} \end{vmatrix} = -36-4\sqrt{6}, \qquad \begin{vmatrix} -3-8\sqrt{6}, & -6 \\ 7+2\sqrt{6}, & 2 \end{vmatrix} = 36-4\sqrt{6},$$

máme

$$B = \frac{9+\sqrt{6}}{25\sqrt{6}}, \ D = \frac{-9+\sqrt{6}}{25\sqrt{6}}, \ B+D = \frac{2}{25} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8A\sqrt{6} = -\frac{12}{5} \ \Rightarrow \ A = -\frac{12}{40\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{20} \ \Rightarrow \ C = \frac{12}{40\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{20}.$$

Odtud

$$\int \frac{-2(t^2-2t-1)\,dt}{5t^4+8t^3-2t^2-8t+5} = \frac{\sqrt{6}}{40} \ln \frac{t^2+\frac{4}{5}(\sqrt{6}+1)t+\frac{(\sqrt{6}+1)^2}{5}}{t^2-\frac{4}{5}(\sqrt{6}-1)t+\frac{(\sqrt{6}-1)^2}{5}} +$$

$$+\frac{3+\sqrt{6}}{10} \operatorname{arctg}\left(\frac{5t}{\sqrt{6}-1}-2\right) - \frac{5-\sqrt{6}}{10} \operatorname{arctg}\left(\frac{5t}{\sqrt{6}+1}+2\right) + K.$$

Tedy celkově dostáváme

$$\int \frac{(\sin x+\cos x)\,dx}{2\sin^2 x-4\sin x\,\cos x+5\cos^2 x} = \frac{\sqrt{6}}{40} \ln \frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1+\sqrt{6})^2}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1-\sqrt{6})^2} +$$

$$+\frac{3+\sqrt{6}}{10} \operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2-2\sqrt{6}}{\sqrt{6}-1} - \frac{5-\sqrt{6}}{10} \operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2+2\sqrt{6}}{\sqrt{6}+1} + K.$$

Zkontrolujte správnost vypočtených konstant. Původní výpočet byl určitě jednodušší.

(2.) Oběma způsoby (tj. postupem z řešení příkladu 20(h) i první části této poznámky) lze obecně vypočítat integrál

$$\int \frac{(a\sin x+b\cos x)\,dx}{\alpha\sin^2 x+\beta\sin x\,\cos x+\gamma\cos^2 x},$$

je-li $D=\beta^2-4\alpha\gamma<0$. Je-li $D=0$, je tento integrál vypočítán v příkladu 20(j) (pro jiné označení konstant).

Pro $D>0$ lze jmenovatel $\alpha\sin^2 x+\beta\sin x\,\cos x+\gamma\cos^2 x$ zapsat ve tvaru

$$(\alpha_1\sin x+\beta_1\cos x)(\alpha_2\sin x+\beta_2\cos x) \ \text{ tj.}$$

$$\frac{a\sin x+b\cos x}{\alpha\sin^2 x+\beta\sin x\,\cos x+\gamma\cos^2 x} = \frac{A}{\alpha_1\sin x+\beta_1\cos x} + \frac{B}{\alpha_2\sin x+\beta_2\cos x},$$

$$a\sin x+b\cos x = A(\alpha_2\sin x+\beta_2\cos x)+B(\alpha_1\sin x+\beta_1\cos x).$$

Porovnáním koeficientů vypočteme z této rovnosti čísla A, $B\in\mathbf{R}$ jednoznačně, poněvadž $\alpha_1\beta_2\neq\alpha_2\beta_1$. Výpočet integrálů z obou posledních zlomků se efektivně provádí substitucí $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ a je podrobně popsán v řešení příkladu 20(f). Řešení příkladu 20(h) (tj. výpočet $\int \frac{\alpha\sin^2 x+\beta\sin x\,\cos x+\gamma\cos^2 x}{a\sin x+b\cos x}\,dx$) bylo jednodušší. Co může způsobit záměna čitatele a jmenovatele!

21. Vypočtěte $\int f(x)\,dx$ je-li

(a) $f(x)=\frac{1}{5-3\cos x}$, $\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\right]$

(b) $f(x)=\frac{1}{5+4\sin x}$, $\left[\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}\right]$

(c) $f(x)=\frac{1}{5-4\sin x+3\cos x}$, $\left[\frac{1}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right]$

(d) $f(x)=\frac{1}{3\sin x+4\cos x+5}$, $\left[-\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3}\right]$

(e) $f(x) = \frac{2-\sin x}{2+\cos x}$, $\left[\ln(2+\cos x) + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right]$

(f) $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x - 3\cos x}$, $\left[\frac{1}{10}x + \frac{3}{10}\ln|\sin x - 3\cos x|;\right.$ Užijte postupu z příkladu 20(d)]

(g) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}$, $\left[\frac{1}{2}\left\{x - \ln(\sqrt{2}+\sin x+\cos x) - \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right\}\right.$;
V příkladech (g) a (h) užijte postup z příkladu 20(f)]

(h) $f(x) = \frac{\sin x + 2\cos x - 3}{\sin x - 2\cos x + 3}$, $\left[\frac{4}{5}\ln(\sin x - 2\cos x + 3) - \frac{3}{5}x - \frac{6}{5}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2}\right]$

(i) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2\cos x}$, $\left[-\frac{1}{5}(2\sin x + \cos x) + \frac{4}{5\sqrt{5}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arctg} 2}{2}\right)\right|\right.$;
V příkladech (i)-(k) užijte postupu z příkladu 20(h)]

(j) $f(x) = \frac{\sin x\,\cos x}{\sin x + \cos x}$, $\left[\frac{1}{2}(\sin x - \cos x) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|\right]$

(k) $f(x) = \frac{\sin^2 x - 4\sin x\,\cos x + 3\cos^2 x}{\sin x + \cos x}$, $\left[-\sin x + 3\cos x + 2\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|\right]$

(l) $f(x) = \frac{2\sin x - \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}$, $\left[\frac{1}{4}\ln\frac{2-\sin x}{2+\sin x} - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{\sqrt{3}}\right.$;
Vyjádřete jmenovatele ve tvaru $3+\cos^2 x$ nebo $4-\sin^2 x$ a rozdělte na dva integrály]

(m) $f(x) = \frac{\sin x - 2\cos x}{1+4\sin x\,\cos x}$, $\left[\frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+1}{\sqrt{2}(\sin x - \cos x)-1}\right| + \frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}(\sin x - \cos x)}{\sqrt{3}+\sqrt{2}(\sin x-\cos x)}\right|\right.$;
Užijte postupu z příkladu 20(l)]

Poznámka: V příkladech (a), (b), (e), (h) lze „slepováním“ vytvořit primitivní funkci v celém **R**. V příkladech (c) a (d) lze výsledek rozšířit tak, aby vyšel zlomek s původním jmenovatelem:

$$\frac{1}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \frac{\cos\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}} = \frac{\cos\frac{x}{2}(2\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})}{(2\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})^2} =$$
$$= \frac{1+\cos x - \frac{1}{2}\sin x}{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\cos x - 2\sin x} = \frac{2-\sin x + 2\cos x}{5-4\sin x + 3\cos x}.$$

V příkladu (d) proveďte sami. V příkladu (m) určete definiční obor integrandu i výsledku a ukažte, že se rovnají.

22. Vypočtěte $\int f(x)\,dx$, je-li

(a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$, (b) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x\,\sqrt[3]{\sin^2 x}}$, (c) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}$.

Řešení:

(a) Platí

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ dx = \frac{dt}{t^2+1} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t}(t^2+1)} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{t} = u \\ dt = 2u\,du \end{array} \right| = 2\int \frac{du}{u^4+1}.$$

Podle příkladu 10(d) platí

$$\int \frac{du}{u^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{u^2+u\sqrt{2}+1}{u^2-u\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u\sqrt{2}}{1-u^2} + C$$

a tedy

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\ln\sqrt{\frac{\operatorname{tg} x + \sqrt{2\operatorname{tg} x}+1}{\operatorname{tg} x - \sqrt{2\operatorname{tg} x}+1}} + 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2\operatorname{tg} x}}{1-\operatorname{tg} x}\right\} + C.$$

Poznámka: Funkce $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$ je definována a spojitá v

$$D(f)=\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}\left(k\pi,(2k+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

její primitivní funkce $F(x)$ v

$$D(F)=\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}\left(k\pi,(4k+1)\frac{\pi}{4}\right)\cup\left((4k+1)\frac{\pi}{4},(2k+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Vhodnou volbou konstant lze F „slepit“ v libovolném bodě $k\pi+\frac{\pi}{4}$ (stačí napsat $\operatorname{arctg}(\sqrt{2\operatorname{tg} x}+1)+\operatorname{arctg}(\sqrt{2\operatorname{tg} x}-1)$ místo $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2\operatorname{tg} x}}{1-\operatorname{tg} x}$). Pokud budeme chtít $F(x)$ upravit pomocí vzorce $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$, potom

$$F(x)=\frac{(-1)^k}{2\sqrt{2}}\left\{\ln\sqrt{\frac{\sin x+\sqrt{\sin 2x}+\cos x}{\sin x-\sqrt{\sin 2x}+\cos x}}+2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\sin 2x}}{\cos x-\sin x}\right\},$$

$x\in\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}\left(k\pi,(2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$ (a ještě by bylo třeba „slepit“ uprostřed každého intervalu!). Výsledek příkladu 23(j) platí jen na intervalu $\left(k\pi,(2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, kde k je sudé.

(b) Je

$$\mathcal{I}=\int\frac{dx}{\cos x\sqrt[3]{\sin^2 x}}=3\int\frac{\frac{1}{3}\cos x\,dx}{(1-\sin^2 x)\sqrt[3]{\sin^2 x}}=\left|\begin{array}{l} u=\sqrt[3]{\sin x} \\ du=\dfrac{\cos x\,dx}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}\end{array}\right|=\int\frac{3\,du}{1-u^6}.$$

Poněvadž platí $1-u^6=(1-u^3)(1+u^3)=(1-u)(1+u+u^2)(1+u)(1-u+u^2)$, dostaneme dále, že

$$\frac{3}{1-u^6}=\frac{A}{1-u}+\frac{B}{1+u}+\frac{Cu+D}{1+u+u^2}+\frac{Eu+F}{1-u+u^2}$$

a odtud

$$3=A(1+u+u^2)(1+u^3)+B(1-u+u^2)(1-u^3)+(Cu+D)(1-u^2)(1-u+u^2)+$$
$$+(Eu+F)(1-u^2)(1+u+u^2).$$

Dosazením $u=1$ dostaneme $A=\frac{1}{2}$, dosadíme-li $u=-1$, vyjde $B=\frac{1}{2}$. Protože

$$\frac{3}{1-u^6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right)=\frac{3}{(1-u^2)(1+u^2+u^4)}-\frac{1}{1-u^2}=$$
$$=\frac{3-1-u^2-u^4}{(1-u^2)(1+u^2+u^4)}=\frac{1-u^2+1-u^4}{(1-u^2)(1+u^2+u^4)}=\frac{2+u^2}{1+u^2+u^4}$$

je sudá v proměnné u, platí totéž o $\frac{Cu+D}{1+u+u^2}+\frac{Eu+F}{1-u+u^2}$ a tedy

$$\frac{-Cu+D}{1-u+u^2}+\frac{-Eu+F}{1+u+u^2}=\frac{Cu+D}{1+u+u^2}+\frac{Eu+F}{1-u+u^2}.$$

Odtud plyne $E=-C$ a $F=D$. Tedy $\frac{2+u^2}{1+u^2+u^4}=\frac{Cu+D}{1=u+u^2}-\frac{Cu-D}{1-u+u^2}$. Po vynásobení dostáváme

$$2+u^2=(Cu+D)(1-u+u^2)-(Cu-D)(1+u+u^2)=2D-2(C-D)u^2.$$

Odtud porovnáním koeficientů vyjde $D = 1$, $C = \frac{1}{2}$. Tedy

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + \frac{1}{2}\int\frac{u+2}{u^2+u+1}\,du - \frac{1}{2}\int\frac{u-2}{u^2-u+1}\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + \frac{1}{4}\ln\frac{u^2+u+1}{u^2-u+1} + \frac{3}{4}\int\frac{du}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{3}{4}\int\frac{du}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + \frac{1}{4}\ln\frac{u^2+u+1}{u^2-u+1} + \int\frac{du}{\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} + \int\frac{du}{\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + \frac{1}{4}\ln\frac{u^2+u+1}{u^2-u+1} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left\{\operatorname{arctg}\frac{2u+1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right\} + C.$$

Užijeme-li vzorce z poznámky 2 k řešení příkladu 10(d), můžeme psát dále

$$\mathcal{I} = \frac{1}{4}\ln\frac{(1+u)^2(u^2+u+1)}{(1-u)^2(u^2-u+1)} + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\frac{4u}{\sqrt{3}}}{1-\frac{4u^2-1}{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{(1+u)^3(1-u^3)}{(1-u)^3(1+u^3)} + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{3}(1-u^2)} + C =$$

$$= \frac{1}{4}\left\{3\ln\frac{1+\sqrt[3]{\sin x}}{1-\sqrt[3]{\sin x}} + \ln\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right\} + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[3]{\sin x}}{\sqrt{3}(1-\sqrt[3]{\sin^2 x})} + C.$$

Poznámka: Integrály z příkladů 22(a),(b) jsou speciální případy integrálu

$$\int \sin^\alpha x\,\cos^\beta x\,dx,$$

kde α a β jsou racionální čísla. Jsou-li čísla α a β celá, umíme tyto integrály spočítat (viz příklady 14-17). Jestliže alespoň jedno z racionálních čísel α a β není celé, je situace komplikovanější:

(i) Je-li α celé liché (resp. β celé liché), spočteme integrál $\int \sin^\alpha x\,\cos^\beta x\,dx$ substitucí $t = \cos x$ (resp. $t = \sin x$; viz 22(b)).

(ii) Jestliže žádné z racionálních čísel α, β není celé liché, lze daný integrál spočítat v případě, že $\alpha + \beta = 0, -2, -4, \ldots$ (viz 22(a) pro $\alpha + \beta = 0$), 23(c)-(f) má řešení ve tvaru $K\operatorname{tg}^r x$ (resp. $K\operatorname{cotg}^r x$), kde r je racionální, neboť $\alpha + \beta = -2$ (návod k řešení 23(g) lze užít nejen k řešení případu $\alpha + \beta = -4$, ale i pro další sudá $\alpha + \beta < -4$).

Obecně substitucí $t = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, lze daný integrál upravit na tvar

$$\int \sin^\alpha x\,\cos^\beta x\,dx = \int t^\alpha (1+t^2)^{-1-\frac{\alpha+\beta}{2}}\,dt.$$

To je t.zv. binomický integrál, který lze vyjádřit pomocí elementárních funkcí právě tehdy, když alespoň jedno z čísel $\frac{\alpha+\beta}{2}$, $\frac{\alpha+1}{2}$, $\frac{\beta+1}{2}$ je celé (viz paragraf 1.5). Substitucí $t = \sin^2 x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, dostaneme

$$\int \sin^\alpha x\,\cos^\beta x\,dx = \frac{1}{2}\int t^{\frac{\alpha-1}{2}}(1-t)^{\frac{\beta-1}{2}}\,dt,$$

takže alespoň hodnotu

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x\,\cos^\beta x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{\alpha-1}{2}}(1-t)^{\frac{\beta-1}{2}}\,dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right)$$

můžeme pro $\alpha > 0$, $\beta > 0$ najít v tabulce hodnot t.zv. beta funkce. O ní se zmíníme v další kapitole, věnované určitému integrálu.

(c) Jestliže využijeme postupu z příkladu 20(l), můžeme výraz pod odmocninou napsat ve tvaru $2 + \sin 2x = 3 - (\sin x - \cos x)^2$ nebo $2 + \sin 2x = 1 + (\sin x + \cos x)^2$ a daný integrál přepíšeme do tvaru

$$\int \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{2 + \sin x}} = \frac{1}{2} \int \frac{(\cos x + \sin x)\, dx}{\sqrt{3 - (\sin x - \cos x)^2}} - \frac{1}{2} \int \frac{(\cos x - \sin x)\, dx}{\sqrt{1 + (\sin x + \cos x)^2}}.$$

Po substitucích $\sin x - \cos x = t$ a $\sin x + \cos x = u$ dostaneme

$$\int \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{2 + \sin 2x}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{3 - t^2}} - \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{t}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \ln(u + \sqrt{1 + u^2}) + C =$$

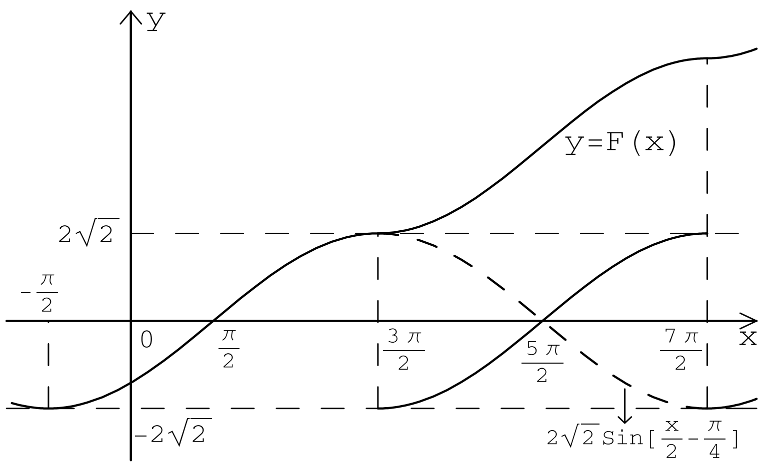
$$= \frac{1}{2} \left\{ \arcsin \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{3}} - \ln\left(\sin x + \cos x + \sqrt{2 + \sin 2x} \right) \right\} + C.$$

23. Vypočtěte $\int f(x)\, dx$, je-li

(a) $f(x) = \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x}$, $\quad$ $\left[\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sin^2 x\right]$

(b) $f(x) = \sqrt{1 + \sin x}$, $\quad$ $\left[2\sqrt{2} \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right);\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)\right]$

Poznámka: Na jiných intervalech lze primitivní funkci „slepit“ následujícím způsobem: Položme $F(x) = G(x) + \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, $x \in \mathbf{R}$, kde G je 2π−periodické rozšíření funkce $g(x) = 2\sqrt{2} \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\rangle$. Situaci je vidět na obrázku.



(c) $f(x) = \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sin x \cos x}$, $\quad$ $[2\sqrt{\operatorname{tg} x}]$

(d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}}$, $\quad$ $[4\sqrt[4]{\operatorname{tg} x}]$

(e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{\sin^5 x \cos x}}$, $\quad$ $\left[-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\operatorname{cotg}^2 x}\right]$

(f) $f(x) = \frac{\sqrt{\sin^3 2x}}{\sin^5 x}$, $\quad$ $\left[-\frac{4\sqrt{2}}{5} \operatorname{cotg}^2 x \sqrt{\operatorname{cotg} x}\right]$

(g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}$, $\quad$ $\left[\frac{2}{3} \operatorname{tg} x \sqrt{\operatorname{tg} x} - 2\sqrt{\operatorname{cotg} x};\right.$
vyjádřete čitatel integrandu ve tvaru $\left.\sin^2 x + \cos^2 x\right]$

(h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}$, $\quad$ $\left[\frac{1}{2} \ln\left(\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x} + 1\right) - \frac{1}{4} \ln\left(\sqrt[3]{\operatorname{tg}^4 x} - \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x} + 1\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x} - 1}{\sqrt{3}}\right]$

(i) $f(x)=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x}}$, $\left[2\sqrt{\operatorname{tg} x}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\operatorname{tg} x+\sqrt{2\operatorname{tg} x}+1}{\operatorname{tg} x-\sqrt{2\operatorname{tg} x}+1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2\operatorname{tg} x}}{1-\operatorname{tg} x}\right]$

(j) $f(x)=\sqrt{\operatorname{tg} x}$, $\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\ln\sqrt{\frac{\sin x-\sqrt{\sin 2x}+\cos x}{\sin x+\sqrt{\sin 2x}+\cos x}}+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\sin 2x}}{\cos x-\sin x}\right\},\ x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right);\right.$ viz poznámku za řešením příkladu 22(a)]

(k) $f(x)=\frac{\sqrt[3]{\cos^2 x}}{\sin x}$, $\left[-\frac{1}{4}\left\{3\ln\frac{1+\sqrt[3]{\cos x}}{1-\sqrt[3]{\cos x}}+\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right\}+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[3]{\cos x}}{\sqrt{3}(1-\sqrt[3]{\sin^2 x})}\right]$

(l) $f(x)=\frac{\sqrt[3]{\cos x}}{\sin x}$, $\left[\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt[3]{\cos^2 x}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{\cos^2 x}+\sqrt[3]{\cos^4 x}}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}(1-2\sqrt[3]{\cos^2 x})}\right]$

(m) $f(x)=\frac{1}{\cos x\sqrt[3]{\sin x}}$, $\left[\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt[3]{\sin^2 x}}{\sqrt{1-\sqrt[3]{\sin^2 x}+\sqrt[3]{\sin^4 x}}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{\sin^2 x}+1}{\sqrt{3}}\right]$

(n) $f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin 2x}}$, $\left[\frac{1}{2}\left\{\arcsin\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}+\ln\left(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x}\right)\right\}\right]$

24. Vypočtěte $\int f(x)\,dx$, je-li

(a) $f(x)=\operatorname{th}^4 x$, (b) $f(x)=\operatorname{ch}^4 x$, (c) $f(x)=\operatorname{sh}^4 x\operatorname{ch}\frac{x}{2}$,

(d) $f(x)=\frac{1}{\operatorname{sh}^3 x\operatorname{ch}^2 x}$, (e) $f(x)=\operatorname{sh} x\operatorname{sh} 2x\operatorname{sh} 3x$, (f) $f(x)=\frac{2\operatorname{sh} x+3\operatorname{ch} x}{4\operatorname{sh} x+5\operatorname{ch} x}$,

(g) $f(x)=\frac{\operatorname{sh} 2x+3\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x+2\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}$, (h) $f(x)=\frac{1}{2\operatorname{sh} x-\operatorname{ch} x}$, (i) $f(x)=\frac{1}{\operatorname{ch} x+5\operatorname{sh} x+3}$,

(j) $f(x)=\frac{\operatorname{ch} x+2\operatorname{sh} x+3}{4\operatorname{ch} x+5\operatorname{sh} x+6}$.

Poznámka: Všechny uvedené integrály patří do třídy integrálů $\int R(\operatorname{sh} x,\operatorname{ch} x)\,dx$, kde R je racionální funkce. Počítají se stejnými metodami jako integrály typu $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$, které jsme probrali v příkladech 14-21. Vyžadují však znalost vzorců pro hyperbolické funkce. Poněvadž se tyto vzorce nevyskytují tak často, uvedeme alespoň hlavní z nich. Základní identita, od které se odvíjejí odlišnosti ve srovnání se vzorci goniometrickými, je

$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1.$$

dále platí

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}(x+y)&=\operatorname{sh} x\operatorname{ch} y+\operatorname{sh} y\operatorname{ch} x, & \operatorname{sh}(x-y)&=\operatorname{sh} x\operatorname{ch} y-\operatorname{sh} y\operatorname{ch} x,\\ \operatorname{ch}(x+y)&=\operatorname{ch} x\operatorname{ch} y+\operatorname{sh} x\operatorname{sh} y, & \operatorname{ch}(x-y)&=\operatorname{ch} x\operatorname{ch} y-\operatorname{sh} x\operatorname{sh} y.\end{aligned}$$

Odtud dále dostaneme

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} 2x&=2\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x, & \operatorname{sh}^2\tfrac{x}{2}&=\tfrac{\operatorname{ch} x-1}{2},\\ \operatorname{ch} 2x&=\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x, & \operatorname{ch}^2\tfrac{x}{2}&=\tfrac{\operatorname{ch} x+1}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} x+\operatorname{sh} y&=2\operatorname{sh}\tfrac{x+y}{2}\operatorname{ch}\tfrac{x-y}{2}, & \operatorname{sh} x-\operatorname{sh} y&=2\operatorname{sh}\tfrac{x-y}{2}\operatorname{ch}\tfrac{x+y}{2},\\ \operatorname{ch} x+\operatorname{ch} y&=2\operatorname{ch}\tfrac{x+y}{2}\operatorname{ch}\tfrac{x-y}{2}, & \operatorname{ch} x-\operatorname{sh} y&=2\operatorname{sh}\tfrac{x+y}{2}\operatorname{sh}\tfrac{x-y}{2}.\end{aligned}$$

Pro potřeby substitucí $\operatorname{th} x=t$ resp $\operatorname{th}\frac{x}{2}=t$ uvedeme ještě vzorce

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}^2 x&=\tfrac{\operatorname{th}^2 x}{1-\operatorname{th}^2 x}, & \operatorname{ch}^2 x&=\tfrac{1}{1-\operatorname{th}^2 x},\\ \operatorname{sh} x&=\tfrac{2\operatorname{th}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{th}^2\frac{x}{2}}, & \operatorname{ch} x&=\tfrac{1+\operatorname{th}^2\frac{x}{2}}{1-\operatorname{th}^2\frac{x}{2}}.\end{aligned}$$

Řešení:

(a) Platí

$$\int \operatorname{th}^4 x\,dx = \int \frac{\operatorname{sh}^4 x}{\operatorname{ch}^4 x}\,dx = \int \frac{(\operatorname{ch}^2 x - 1)^2}{\operatorname{ch}^4 x}\,dx = x - 2\operatorname{th} x + \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^4 x} =$$

$$= x - 2\operatorname{th} x + \int \frac{(\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x)dx}{\operatorname{ch}^4 x} = x - \operatorname{th} x - \frac{1}{3}\operatorname{th}^3 x + C.$$

(b) Je

$$\int \operatorname{ch}^4 x\,dx = \frac{1}{4}\int (\operatorname{ch} 2x + 1)^2 dx = \frac{1}{4}\int (\operatorname{ch}^2 2x + 2\operatorname{ch} 2x + 1)\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (\operatorname{ch} 4x + 1)\,dx + \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x + \frac{1}{4}x = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x + \frac{1}{32}\operatorname{sh} 4x + C.$$

(c) Užitím vzorce pro $\operatorname{sh} 2\alpha$ dostaneme

$$\int \operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch}\frac{x}{2}\,dx = 16\int \operatorname{sh}^4\frac{x}{2}\operatorname{ch}^5\frac{x}{2}\,dx = 16\int \operatorname{sh}^4\frac{x}{2}\left(1 + \operatorname{sh}^2\frac{x}{2}\right)^2 \operatorname{ch}\frac{x}{2}\,dx =$$

$$= 32\left\{\frac{1}{5}\operatorname{sh}^5\frac{x}{2} + \frac{2}{7}\operatorname{sh}^7\frac{x}{2} + \frac{1}{9}\operatorname{sh}^9\frac{x}{2}\right\} + C.$$

(d) Platí

$$\mathcal{I} = \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch}^2 x} = \int \frac{\operatorname{sh} x\,dx}{(\operatorname{ch}^2 x - 1)^2 \operatorname{ch}^2 x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{ch} x = t \\ \operatorname{sh} x\,dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2(t^2-1)^2}.$$

Rozklad dané racionální funkce na parciální zlomky dává

$$\frac{1}{t^2(t^2-1)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t-1} + \frac{D}{t+1} + \frac{E}{(t-1)^2} + \frac{F}{(t+1)^2}$$

neboli

$$1 = At(t^2-1)^2 + B(t^2-1)^2 + C(t^3+t^2)(t^2-1) + D(t^3-t^2)(t^2-1) + Et^2(t+1)^2 + Ft^2(t-1)^2.$$

Využitím postupu z příkladu 10(a) dostaneme: pro $t = 0$ je $B = 1$, pro $t = 1$ je $E = \frac{1}{4}$ a pro $t = -1$ je $F = \frac{1}{4}$. Protože $\frac{1}{t^2(t^2-1)^2}$ je sudá v t, máme $A = 0$, $D = -C$. Dále

$$\frac{C}{t-1} + \frac{D}{t+1} = \frac{2C}{t^2-1} = \frac{1}{t^2(t^2-1)^2} - \frac{1}{t^2} - \frac{t^2+1}{2(t^2-1)^2} =$$

$$= \frac{2 - 2(t^2-1)^2 - t^2(t^2+1)}{2t^2(t^2-1)^2} = \frac{3t^2 - 3t^4}{2t^2(t^2-1)^2} = \frac{-\frac{3}{2}}{t^2-1},$$

t.j. $C = -\frac{3}{4}$, $D = \frac{3}{4}$. [Je samozřejmě možné též porovnat koeficienty a dostaneme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rlcccccc} t^5: & 0 = & A & & +C & +D & & \\ t^3: & 0 = & -2A & & -C & -D & +2E & -2F \\ t^2: & 0 = & & -2B & -C & -D & +E & +F \end{array}$$

se stejným řešením.] Platí tedy

$$\mathcal{I} = -\frac{1}{t} + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1}\right\} + C = -\frac{1}{\operatorname{ch} x} + \frac{3}{4}\ln\frac{\operatorname{ch} x + 1}{\operatorname{ch} x - 1} - \frac{1}{2}\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^2 x - 1} + C =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{cth}\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{\operatorname{ch} x} - \frac{\operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh}^2 x} + C.$$

(e) Užijeme-li vzorce pro $\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch}\beta$ a položíme $\frac{\alpha+\beta}{2} = 2x$, $\frac{\alpha-\beta}{2} = x$, dostaneme $\operatorname{sh}x \operatorname{sh}2x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}3x - \operatorname{ch}x)$, neboli

$$\mathcal{I} = \int \operatorname{sh}x \operatorname{sh}2x \operatorname{sh}3x \, dx = \frac{1}{2}\int (\operatorname{ch}3x - \operatorname{ch}x)\operatorname{sh}3x \, dx = \frac{1}{4}\int \operatorname{sh}6x \, dx - \frac{1}{2}\int \operatorname{ch}x \operatorname{sh}3x \, dx.$$

Využitím vzorce pro $\operatorname{sh}\alpha + \operatorname{sh}\beta$ dostaneme dále

$$\mathcal{I} = \frac{1}{24}\operatorname{ch}6x - \frac{1}{4}\int (\operatorname{sh}4x + \operatorname{sh}2x)\, dx = \frac{1}{24}\operatorname{ch}6x - \frac{1}{16}\operatorname{ch}4x - \frac{1}{8}\operatorname{ch}2x + C.$$

(f) Podle postupu z příkladu 20(d) dostaneme

$$2\operatorname{sh}x + 3\operatorname{ch}x = A(4\operatorname{sh}x + 5\operatorname{ch}x) + B(4\operatorname{ch}x + 5\operatorname{sh}x).$$

Srovnání koeficientů dává soustavu

$$\begin{array}{lrll} \operatorname{sh}x: & 2 = & 4A & +5B \\ \operatorname{ch}x: & 3 = & 5A & +4B \end{array}$$

s řešením $A = \frac{7}{9}$, $B = -\frac{2}{9}$ a tedy

$$\int \frac{2\operatorname{sh}x + 3\operatorname{ch}x}{4\operatorname{sh}x + 5\operatorname{ch}x}\, dx = \frac{7}{9}x - \frac{2}{9}\ln(4\operatorname{sh}x + 5\operatorname{ch}x) + C.$$

(g) Jestliže si uvědomíme, že $\frac{d}{dx}\left\{\operatorname{ch}^2 x\right\} = \operatorname{sh}2x$, můžeme psát

$$\int \frac{\operatorname{sh}2x + 3\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^2 x + 2\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}\, dx = \int \frac{\operatorname{sh}2x + \operatorname{sh}x + 2\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{ch}x + 1}\, dx = \ln(\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{ch}x + 1) +$$

$$+2\int \frac{\operatorname{sh}x\, dx}{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{ch}x + 1} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{ch}x = t \\ \operatorname{sh}x\, dx = dt \end{array} \right| = \ln(\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{ch}x + 1) + 2\int \frac{dt}{t^2 + t + 1} =$$

$$= \ln(\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{ch}x + 1) + 2\int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \ln(\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{ch}x + 1) + \frac{8}{3}\int \frac{dt}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} =$$

$$= \ln(\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{ch}x + 1) + \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{ch}x + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

(h) Platí

$$\mathcal{I} = \int \frac{dx}{2\operatorname{sh}x - \operatorname{ch}x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{th}\frac{x}{2} = t \\ dx = \frac{2\, dt}{1-t^2} \end{array} \right| = 2\int \frac{\frac{dt}{1-t^2}}{\frac{4t-1-t^2}{1-t^2}} = -2\int \frac{dt}{t^2 - 4t + 1}.$$

Položíme-li $t^2 - 4t + 1 = 0$, dostaneme dva kořeny $t_1 = 2 + \sqrt{3}$ a $t_2 = 2 - \sqrt{3}$, tedy

$$\frac{-2}{t^2 - 4t + 1} = \frac{A}{t - t_1} + \frac{B}{t - t_2} \text{ a odtud } A + B = 0, \quad At_2 + Bt_1 = 2$$

s řešením $A = \frac{2}{t_2 - t_1} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $B = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Tedy

$$\mathcal{I} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t - t_2}{t - t_1}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\operatorname{th}\frac{x}{2} - 2 + \sqrt{3}}{\operatorname{th}\frac{x}{2} - 2 - \sqrt{3}}\right| + C.$$

(i) Je

$$\int \frac{dx}{3\operatorname{ch} x + 5\operatorname{sh} x + 3} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{th}\frac{x}{2} = t \\ dx = \frac{2\,dt}{1-t^2} \end{array} \right| = 2\int \frac{\frac{dt}{1-t^2}}{\frac{3+3t^2}{1-t^2} + \frac{10t}{1-t^2} + 3} = \int \frac{dt}{5t+3} =$$

$$= \frac{1}{5}\ln|5t+3| + C = \frac{1}{5}\ln\left|5\operatorname{th}\frac{x}{2} + 3\right| + C.$$

(j) Podle postupu z příkladu 20(f) dostaneme

$$\operatorname{ch} x + 2\operatorname{sh} x + 3 = A(4\operatorname{ch} x + 5\operatorname{sh} x + 6) + B(4\operatorname{sh} x + 5\operatorname{ch} x) + C.$$

Srovnáním koeficientů získáme soustavu

$$4A + 5B = 1, \qquad 5A + 4B = 2, \qquad 6A + C = 3.$$

s řešením $A = \frac{2}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = -1$. Tedy

$$\mathcal{I} = \int \frac{\operatorname{ch} x + 2\operatorname{sh} x + 3}{4\operatorname{ch} x + 5\operatorname{sh} x + 6}\,dx = \frac{2}{3}\,x - \frac{1}{3}\ln|4\operatorname{ch} x + 5\operatorname{sh} x + 6| - \int \frac{dt}{4\operatorname{ch} x + 5\operatorname{sh} x + 6} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \operatorname{th}\frac{x}{2} = t \\ dx = \frac{2\,dt}{1-t^2} \end{array} \right| = \frac{2}{3}\,x - \frac{1}{3}\ln|4\operatorname{ch} x + 5\operatorname{sh} x + 6| - 2\int \frac{\frac{dt}{1-t^2}}{\frac{4+4t^2}{1-t^2} + \frac{10t}{1-t^2} + 6} =$$

$$= \frac{2}{3}\,x - \frac{1}{3}\ln|4\operatorname{ch} x + 5\operatorname{sh} x + 6| + \int \frac{dt}{t^2 - 5t - 5}.$$

Jestliže položíme $t^2 - 5t - 5 = 0$, dostaneme dvojici kořenů $t_1 = \frac{1}{2}(5 + 3\sqrt{5})$, $t_2 = \frac{1}{2}(5 - 3\sqrt{5})$ a platí

$$\frac{1}{t^2 - 5t - 5} = \frac{A}{t - t_1} + \frac{B}{t - t_2}; \quad \text{odtud} \quad A + B = 0 \quad -At_2 - Bt_1 = 1$$

s řešením $A = \frac{1}{t_1 - t_2} = \frac{1}{3\sqrt{5}}$, $B = -\frac{1}{3\sqrt{5}}$. Tedy

$$\mathcal{I} = \frac{2}{3}\,x - \frac{1}{3}\ln|4\operatorname{ch} x + 5\operatorname{sh} x + 5| + \frac{1}{3\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2\operatorname{th}\frac{x}{2} - 5 - 3\sqrt{5}}{2\operatorname{th}\frac{x}{2} - 5 + 3\sqrt{5}}\right| + K.$$

25. Vypočtěte $\int f(x)\,dx$, je-li

(a) $f(x) = \frac{e^x}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}$, $\quad [x]$

(b) $f(x) = \operatorname{ch}^2 ax + \operatorname{sh}^2 ax$; $(a \neq 0)$, $\quad \left[\frac{1}{2a}\operatorname{sh} 2ax\right]$

(c) $f(x) = \operatorname{sh}^2 x$, $\quad \left[\frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x - \frac{1}{2}\,x\right]$

(d) $f(x) = \operatorname{sh}^3 x$, $\quad \left[\frac{1}{3}\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{ch} x\right]$

(e) $f(x) = \operatorname{ch}^3 x$, $\quad \left[\frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x + \operatorname{sh} x\right]$

(f) $f(x) = \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^3 x$, $\quad \left[\frac{1}{5}\operatorname{sh}^5 x + \frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x\right]$

(g) $f(x) = \operatorname{ch}^3 x \operatorname{sh}^8 x$, $\quad \left[\frac{1}{11}\operatorname{sh}^{11} x + \frac{1}{9}\operatorname{sh}^9 x\right]$

(h) $f(x) = \frac{\operatorname{sh}^4 x}{\operatorname{ch}^6 x}$, $\quad \left[\frac{1}{5}\operatorname{th}^5 x\right]$

(i) $f(x) = \operatorname{cth}^5 x$, $\quad \left[\ln|\operatorname{sh} x| - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} - \frac{1}{4\operatorname{sh}^4 x}\right]$

(j) $f(x) = \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x$, $\quad \left[\frac{1}{32}\operatorname{sh} 4x - \frac{1}{8}\,x\right]$

(k) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x}$, $\quad [\operatorname{arctg}\operatorname{th} x]$

(l) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}$, $\quad [\ln|\operatorname{th} x|]$

(m) $f(x) = \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch} 2x$, $\quad \left[\frac{2}{5}\operatorname{ch}^5 x - \operatorname{ch}^3 x + \operatorname{ch} x\right]$

(n) $f(x) = \frac{\operatorname{ch}^5 x}{\operatorname{sh} x}$, $\quad \left[\frac{1}{4}\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{sh}^2 x + \ln|\operatorname{sh} x|\right]$

(o) $f(x) = \frac{1}{(1+\operatorname{ch} x)^2}$, $\quad \left[\frac{1}{2}\operatorname{th}\frac{x}{2} - \frac{1}{6}\operatorname{th}^3\frac{x}{2}\right]$

(p) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch}^2 x}$, $\quad \left[\operatorname{th} x + 2\operatorname{cth} x - \frac{1}{3}\operatorname{cth}^3 x\right]$

(q) $f(x) = \operatorname{th}^3 x$, $\quad \left[\ln \operatorname{ch} x - \frac{1}{2}\operatorname{th}^2 x\right]$

(r) $f(x) = \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^4 x$, $\quad \left[\frac{1}{48}\operatorname{sh}^3 2x + \frac{1}{64}\operatorname{sh} 4x - \frac{1}{16}x\right]$

26. Vypočtěte $\int f(x)\,dx$, je-li

(a) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^2 x}$, $\quad \left[\frac{1}{\operatorname{ch} x} + \ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|\right]$

(b) $f(x) = \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^3 x}$, $\quad \left[\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right| - \frac{\operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh}^2 x}\right]$

(c) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^5 x}$, $\quad \left[\frac{\operatorname{sh} x}{4\operatorname{ch}^4 x} + \frac{3\operatorname{sh} x}{8\operatorname{ch}^2 x} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg}\operatorname{sh} x\right]$

(d) $f(x) = \frac{\operatorname{sh}^4 x}{\operatorname{ch}^3 x}$, $\quad \left[\operatorname{sh} x - \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\operatorname{sh} x + \frac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch}^2 x}\right]$

(e) $f(x) = \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 7x$, $\quad \left[\frac{1}{16}\operatorname{sh} 8x - \frac{1}{12}\operatorname{sh} 6x\right]$

(f) $f(x) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} 2x \operatorname{ch} 3x$, $\quad \left[\frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\operatorname{sh} 2x + \frac{1}{16}\operatorname{sh} 4x + \frac{1}{24}\operatorname{sh} 6x\right]$

(g) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x - 4\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + 9\operatorname{ch}^2 x}$, $\quad \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{th} x - 2}{\sqrt{5}}\right]$

(h) $f(x) = \frac{1}{10\operatorname{ch}^2 x - 2\operatorname{sh} 2x - 1}$, $\quad \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{th} x - 2}{\sqrt{5}};\right.$
ukažte, že $\left.\operatorname{sh}^2 x - 4\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + 9\operatorname{ch}^2 x = 10\operatorname{ch}^2 x - 2\operatorname{sh} 2x - 1\right]$

(i) $f(x) = \frac{1}{3\operatorname{sh}^2 x - 7\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + 2\operatorname{ch}^2 x}$, $\quad \left[\frac{1}{5}\ln\frac{2\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{|3\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x|}\right]$

(j) $f(x) = \frac{1}{4 + 3\operatorname{sh}^2 x}$, $\quad \left[\frac{1}{4}\ln\frac{2 + \operatorname{th} x}{2 - \operatorname{th} x}\right]$

(k) $f(x) = \frac{1}{1 - \operatorname{th} x}$, $\quad \left[\frac{1}{2}\left\{x + \frac{1}{1 - \operatorname{th} x}\right\}\right]$

(l) $f(x) = \frac{4\operatorname{ch} x - 3\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}$, $\quad \left[\frac{5}{3}x - \frac{2}{3}\ln(2\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)\right]$

(m) $f(x) = \frac{\operatorname{ch} x}{3\operatorname{sh} x - 4\operatorname{ch} x}$, $\quad \left[-\frac{4}{7}x - \frac{3}{7}\ln|3\operatorname{sh} x - 4\operatorname{ch} x|;\right.$
v příkladech (l) a (m) použijte postup z příkladu 24(f)]

(n) $f(x) = \frac{\operatorname{sh} 2x + 4\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x - 3\operatorname{ch} x}$, $\quad \left[\ln|\operatorname{ch}^2 x - 3\operatorname{ch} x| + \frac{7}{3}\ln\frac{|\operatorname{ch} x - 3|}{\operatorname{ch} x};\right.$ užijte příklad 24(g)]

(o) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{sh} x + 2\operatorname{ch} x}$, $\quad \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{th}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}}\right]$

(p) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x + 2}$, $\quad \left[\frac{1}{2}\ln\frac{1 + \operatorname{th}\frac{x}{2}}{3 - \operatorname{th}\frac{x}{2}}\right]$

(q) $f(x) = \frac{\operatorname{sh} x + 2\operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x - 1}$, $\quad \left[\frac{4}{5}x + \frac{5}{3}\ln|2\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x - 1| + \frac{2}{3}\ln\left|2\operatorname{th}\frac{x}{2} - 1\right|;\right.$
užijte postupu z příkladu 24(j)]

1.4 Integrály typu $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,dx$.

Poznámky: (1.) Každý integrál uvedeného typu lze (doplněním na čtverec a lineární substitucí) převést na jeden ze tří následujících integrálů:

(a) $\displaystyle\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\,dx$, (b) $\displaystyle\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})\,dx$, (c) $\displaystyle\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})\,dx$, kde $a > 0$ a $R(x,y)$ je racionální lomená funkce v proměnných x, y. Je-li $R(x,y) = \frac{1}{y}$, umíme tyto integrály bez problémů vypočítat (výsledky jsou uvedeny v tabulce primitivních funkcí, jejich odvození viz př. 6(e)). Výpočet integrálů metodou per partes pro případ $R(x,y) = y$ lze nalézt v příkladech 8(f) a 9(x). Substituce uvedené v příkladu 6(e) lze snadno zobecnit. Integrály typu (a) je možno převést substitucí $x = a\sin t,\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, (resp. $x = a\cos t,\ t \in (0,\pi)$), na integrál $\int R(\sin t, \cos t)\,dt$, který umíme řešit podle odstavce 1.3. U typu (b) ke stejnému účelu slouží substituce $x = a\,\mathrm{tg}\,t,\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, (resp. $x = a\,\mathrm{cotg}\,t,\ t \in (0,\pi)$), u typu (c) je to $x = \frac{a}{\sin t},\ t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pro $x \in (a, +\infty)$ a $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ pro $x \in (-\infty, -a)$ (resp. $x = \frac{a}{\cos t},\ t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pro $x \in (a, +\infty)$ a $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ pro $x \in (-\infty, 0)$). Pokud umíte dobře počítat integrály typu $\int R(\mathrm{sh} x, \mathrm{ch}\,x)\,dx$ (příklady 24-26), můžete na ně převádět integrály typu (a) substitucí $x = \frac{a}{\mathrm{ch}\,t},\ t \in (0, +\infty)$, typ (b) substitucí $x = a\,\mathrm{sh}\,t$, $t \in \mathbf{R}$ a typ (c) substitucí $x = a\,\mathrm{ch}\,t,\ t \in (0, +\infty)$ pro $x \in (a, +\infty)$, a $x = -a\,\mathrm{ch}\,t$, $t \in (0, +\infty)$ pro $x \in (-\infty, -a)$. Používejte raději goniometrické substituce s funkcemi sin a tg, jen v případě (b) může být užitečná i hyperbolická substituce.

(2.) Upravit výsledek, získaný postupem z poznámky (1.) může být ovšem dosti obtížné. Vyhnout se goniometrickým i hyperbolickým funkcím umožňují t.zv. Eulerovy substituce:
1. skupina: Pokud je $a > 0$, lze zavést substituci $\sqrt{ax^2 + bx + c} = x\sqrt{a} + t$. Ta nám převede daný integrál na integrál z racionální funkce v proměnné t. Podle konkrétního tvaru integrandu můžeme zavést jednu z variant $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm x\sqrt{a} \pm t$.
2. skupina: Je-li $c > 0$, lze substituovat $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$, nebo některou variantu $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm xt \pm \sqrt{c}$. Všechny tyto varianty dávají opět integrál z racionální funkce.

Je-li $D = b^2 - 4ac > 0$, tedy polynom $ax^2 + bx + c$ má dvojici reálných různých kořenů $x_1,\ x_2$, můžeme použít substituce

$$t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{|x - x_1|} = \sqrt{\frac{a(x - x_1)(x - x_2)}{(x - x_1)^2}} = \sqrt{a \cdot \frac{x - x_2}{x - x_1}}.$$

(3.) Otázka, která zákonitě vzniká, je, kterou z těchto možných substitucí použít, abychom získali co možno nejjednodušší integrál. Odpověď na tuto otázku není jednoznačná a ani jednoduchá. Velmi často je třeba zkusit 2 nebo 3 varianty a pak si vybrat. O trochu systematičtější postup se pokusíme v příkladu 31. Budeme však potřebovat další skutečnosti.

27. Vypočtěte $\int f(x)\,dx$, je-li

(a) $f(x) = \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$,

(b) $f(x) = \left\{\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\right\}^2 \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}$,

(c) $f(x) = \frac{1}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$,

(d) $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$,

(e) $f(x) = \sqrt{1 - 4x - x^2}$,

(f) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x-3}}$,

(g) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}$,

(h) $f(x) = \frac{1}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$,

(i) $f(x) = \frac{x^2}{(x^2-2x+4)\sqrt{2+2x-x^2}}$,

(j) $f(x) = \frac{1}{\left\{1+\sqrt{x(1+x)}\right\}^2}$,

(k) $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}$.

Řešení:

(a) Položme $\sqrt{x^2+x+1} = x+t$. Potom je $t > \frac{1}{2}$ a $x^2+x+1 = x^2+2xt+t^2$, neboli $x(1-2t) = t^2-1$ a odtud

$$x = \frac{t^2-1}{1-2t};\ \ x-1 = \frac{t^2+2t-2}{1-2t};\ \ x+t = \frac{t^2-t+1}{2t-1};\ \ dx = \frac{-2(t^2-t+1)\,dt}{(2t-1)^2}.$$

Tedy

$$\mathcal{I} = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}} = -2\int \frac{\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}\,dt}{\frac{t^2+2t-2}{1-2t}\cdot\frac{t^2-t+1}{2t-1}} = 2\int \frac{dt}{t^2+2t-2}.$$

Položíme-li $t^2+2t-2=0$, dostaneme dvojici kořenů $t_1 = -1+\sqrt{3} > \frac{1}{2}$ a $t_2 = -1-\sqrt{3}$ a tedy platí

$$\frac{2}{t^2+2t-2} = \frac{A}{t-t_1} + \frac{B}{t-t_2}.\ \text{Odtud}\ \ A+B=0,\quad -At_2-Bt_1 = 2$$

s řešením $A = \frac{2}{t_1-t_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\ B = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Tudíž

$$\mathcal{I} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-t_1}{t-t_2}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{|\sqrt{x^2+x+1}-x+1-\sqrt{3}\,|}{\sqrt{x^2+x+1}-x+1+\sqrt{3}} + C.$$

Poznámka: Jestliže položíme $\sqrt{x^2+x+1} = x-t$ nebo $t-x$, dostaneme podobný integrál. Zkuste též užít substituce z příkladů(b) a (g).

(b) Jestliže zavedeme do integrálu

$$\mathcal{I} = \int\left\{\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\right\}^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$$

substituci $\sqrt{x^2+x+1} = xt+1$, dostaneme (t je rostoucí funkce proměnné x a v bodě $x=0$ ji lze spojitě dodefinovat hodnotou $\frac{1}{2}$, t.j. $t\in(-1,1)$).

$$\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} = t;\ \ x^2+x+1 = x^2t^2+2xt+1;\ \ x+1 = xt^2+2t;\ \ x = \frac{2t-1}{1-t^2};$$

$$xt+1 = \frac{2t^2-t+1-t^2}{1-t^2} = \frac{t^2-t+1}{1-t^2};\ \ dx = \frac{2(1-t^2)+2t(2t-1)}{(1-t^2)^2}\,dt = 2\frac{t^2-t+1}{(1-t^2)^2}\,dt.$$

Dosazením do daného integrálu dostáváme

$$\mathcal{I} = 2\int t^2\,\frac{\frac{t^2-t+1}{(1-t^2)^2}\,dt}{\frac{t^2-t+1}{1-t^2}} = 2\int\frac{t^2\,dt}{1-t^2} = -2\int\frac{(1-t^2-1)\,dt}{1-t^2} = -2t+2\int\frac{dt}{1-t^2} =$$

$$= \frac{2(1-\sqrt{1+x+x^2})}{x} + \ln\frac{1+t}{1-t} + C = \frac{2(1-\sqrt{1+x+x^2})}{x} +$$

$$+\ln\frac{x-1+\sqrt{1+x+x^2}}{x+1-\sqrt{1+x+x^2}} + C = F(x)+C.$$

Ukažte, že když dodefinujete $F(0) = \ln 3 - 1$, potom je $F'(0) = \frac{1}{4}$. Zkuste daný integrál vypočítat též substitucí z příkladu (a) nebo (g) pro $x\in(0,4)$.

(c) Integrál si nejdříve upravíme. Pro $x \in (0,4)$ platí

$$\frac{1}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}} = \frac{1}{(2x-3)x\sqrt{\frac{4-x}{x}}} = \frac{\sqrt{\frac{x}{4-x}}}{x(2x-3)},$$

neboli

$$\mathcal{I} = \int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}} = \int \frac{\sqrt{\frac{x}{4-x}}\,dx}{x(2x-3)} = \left| \begin{array}{ll} \dfrac{x}{4-x} = t^2; & x = \dfrac{4t^2}{t^2+1} \\ 2x-3 = \dfrac{5t^2-3}{t^2+1}; & dx = \dfrac{8t\,dt}{(t^2+1)^2} \end{array} \right| =$$

$$= 2\int \frac{\frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^2}}{\frac{t^2}{t^2+1}\cdot\frac{5t^2-3}{t^2+1}} = 2\int \frac{dt}{5t^2-3}.$$

Dále je $\frac{2}{5t^2-3} = \frac{A}{\sqrt{5}t-\sqrt{3}} + \frac{B}{\sqrt{5}t+\sqrt{3}}$ a srovnáním koeficientů u stejných mocnin t dostaneme soustavu rovnic

$$A+B=0; \quad A-B=\frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{s řešením} \quad A=\frac{1}{\sqrt{3}},\ B=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Odtud plyne, že

$$\mathcal{I} = \frac{1}{\sqrt{15}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}t-\sqrt{3}}{\sqrt{5}t+\sqrt{3}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{15}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}\sqrt{\frac{x}{4-x}}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}\sqrt{\frac{x}{4-x}}+\sqrt{3}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{15}}\ln\frac{\left|\sqrt{5x}-\sqrt{3(4-x)}\right|}{\sqrt{5x}+\sqrt{3(4-x)}} + C.$$

Jinou Eulerovu substituci nelze použít. Zkuste však $\frac{x-2}{2} = \sin t$.

(d) Poněvadž je $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$, zavedeme substituci $x+1 = \operatorname{tg} t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$. Platí tedy

$$\mathcal{I} = \int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{1+\sqrt{\operatorname{tg}^2 t+1}} = \int \frac{dt}{\cos t(\cos t+1)} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{t}{2} = u \\ dt = \frac{2\,du}{1+u^2} \\ u \in (-1,1) \end{array} \right| = 2\int \frac{\frac{du}{1+u^2}}{\frac{1-u^2}{1+u^2}\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}+1\right)} = \int \frac{(1+u^2)\,du}{1-u^2} = -\int \frac{(1-u^2-2)\,du}{1-u^2} =$$

$$= -u + 2\int \frac{du}{1-u^2} = -u + \ln\frac{1+u}{1-u} + C.$$

Dále platí

$$u = \operatorname{tg}\frac{t}{2} = \frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}} = \frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} = \frac{1-\cos t}{\sin t} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 t+1}}}{\frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 t+1}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 t+1}-1}{\operatorname{tg} t} = \frac{\sqrt{x^2+2x+2}-1}{x+1}, \qquad \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+2x+2}-1}{x+1} = 0$$

a tedy

$$\mathcal{I} = \frac{1-\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1} + \ln \frac{1+\frac{\sqrt{x^2+2x+2}-1}{x+1}}{1-\frac{\sqrt{x^2+2x+2}-1}{x+1}} + C =$$

$$= \frac{1-\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1} + \ln \frac{x+\sqrt{x^2+2x+2}}{x+2-\sqrt{x^2+2x+2}} + C = F(x) + C.$$

Poznámky: (1.) Dodefinujeme-li $F(-1) = 0$, je $F'(-1) = \frac{1}{2}$.

(2.) Podle tvaru výsledku lze s úspěchem použít i substituce $\sqrt{x^2+2x+2} = \pm(x-t)$.

(e) Platí $1 - 4x - x^2 = 5 - (x+2)^2$ a zavedeme tedy substituci

$$x + 2 = \sqrt{5}\sin t;\ \ t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);\ \ dx = \sqrt{5}\cos t;\ \ t = \arcsin\frac{x+2}{\sqrt{5}}.$$

Tedy

$$\int \sqrt{1-4x-x^2}\,dx = \sqrt{5}\int \sqrt{5(1-\sin^2 t)}\cos t\,dt = 5\int \cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{5}{2}\left\{t + \frac{1}{2}\sin 2t\right\} + C = \frac{5}{2}\left\{\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{5}} + \sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\right\} + C =$$

$$= \frac{5}{2}\left\{\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{5}} + \frac{x+2}{\sqrt{5}}\sqrt{1-\frac{(x+2)^2}{5}}\right\} + C =$$

$$= \frac{5}{2}\left\{\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{5}} + \frac{x+2}{5}\sqrt{1-4x-x^2}\right\} + C,\ \ x \in (-2-\sqrt{5}, -2+\sqrt{5}).$$

(f) Poněvadž je $x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$, zavedeme substituci $x + 1 = \frac{2}{\sin t}$, $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Potom platí $dx = -\frac{2\cos t\,dt}{\sin^2 t}$ a tedy

$$\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x-3}} = -\int \frac{\frac{2\cos t\,dt}{\sin^2 t}}{\frac{8}{\sin^3 t}\sqrt{4\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)}} = -\frac{1}{8}\int \sin^2 t\,dt =$$

$$= -\frac{1}{16}\left\{t - \frac{1}{2}\sin 2t\right\} + C = \frac{1}{16}\left\{\frac{2}{x+1}\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}} - \arcsin\frac{2}{x+1}\right\} + C$$

pro $x > 1$. Protože je funkce $f(x) = \frac{1}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x-3}}$ lichá v proměnné $x+1$, je funkce $F(x)$ k ní primitivní v této proměnné sudá a tedy

$$\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x-3}} = \frac{1}{16}\left\{\frac{2\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+1)^2} \mp \arcsin\frac{2}{|x+1|}\right\} + C,\ \ x > 1;\ \ x < -3.$$

Poznámka: Rozmyslete si, že lze užít Eulerovy substituce $\sqrt{x^2+2x-3} = x + t$ nebo $t = \sqrt{\frac{x+3}{x-1}}$ a použijte je.

(g) Platí $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ a zavedeme substituci $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sh} t$; $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch} t\,dt$. Odtud $\operatorname{sh} t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ a tedy

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x+x^2}} = \int \frac{\frac{1}{4}(\sqrt{3}\operatorname{sh} t - 1)^2\,\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch} t\,dt}{\sqrt{\frac{3}{4}(\operatorname{sh}^2 t + 1)}} = \frac{1}{4}\int (3\operatorname{sh}^2 t - 2\sqrt{3}\operatorname{sh} t + 1)\,dt =$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\frac{3}{4}\operatorname{sh}2t - \frac{3}{2}t - 2\sqrt{3}\operatorname{ch}t + t\right\} + C = \frac{3}{8}\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch}t - \frac{1}{8}t + C =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\,(2x+1)}{8}\sqrt{\frac{(2x+1)^2}{3}+1} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{(2x+1)^2}{3}+1} - \frac{1}{8}\operatorname{argsh}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \left\{\frac{1}{8}(2x+1) - \frac{1}{2}\right\}\sqrt{4x^2+4x+4} - \frac{1}{8}\ln\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{(2x+1)^2}{3}+1}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{4}(2x-3)\sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{8}\ln\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}\right) + K,$$

kde $K = C + \frac{1}{16}\ln 3$.

(h) Je $x^2+x-1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$, tedy $D(f) = \mathbf{R} - \left\langle \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\rangle$ a pro $x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ použijeme substituci $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\mathrm{ch}t, t > 0$. Odtud plyne $dx = \frac{\sqrt{5}}{2}\mathrm{sh}t\,dt$; $\mathrm{ch}t = \frac{2x+1}{\sqrt{5}}$ a tedy

$$\mathcal{I} = \int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}} = \int \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}\mathrm{sh}t\,dt}{\frac{1}{4}(5\mathrm{ch}^2t+3)\sqrt{\frac{5}{4}(\mathrm{ch}^2t-1)}} = 4\int \frac{dt}{5\mathrm{ch}^2t+3} =$$

$$= 4\int \frac{dt}{\left(5+\frac{3}{\mathrm{ch}^2t}\right)\mathrm{ch}^2t} = \left| \begin{array}{ll} \mathrm{th}t = u & \dfrac{dt}{\mathrm{ch}^2t} = du \\ 1-u^2 = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2t} & \end{array} \right| = 4\int \frac{du}{8-3u^2}.$$

Poněvadž

$$\frac{4}{8-3u^2} = \frac{A}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}u} + \frac{B}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}u},\quad u \in (0,1),$$

dostaneme soustavu rovnic $A - B = 0,\ \ A + B = \sqrt{2}$ s řešením $A = B = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Tedy

$$\mathcal{I} = \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}u}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}u} + C = \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}\mathrm{th}t}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}\mathrm{th}t} + C = \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\frac{2\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}\sqrt{\frac{(2x+1)^2}{5}-1}}{\frac{2x+1}{\sqrt{5}}}}{2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}\sqrt{\frac{(2x+1)^2}{5}-1}}{\frac{2x+1}{\sqrt{5}}}} + C =$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{2}(2x+1)+\sqrt{3(x^2+x-1)}}{\sqrt{2}(2x+1)-\sqrt{3(x^2+x-1)}} + C = F(x) + C.$$

Zkontrolujte sami, že $D(F) = \mathbf{R} - \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$, že $F\left(-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) = -F\left(x+\frac{1}{2}\right)$ (tj. F je lichá v proměnné $x + \frac{1}{2}$) a že $F'(x) = f(x)$ pro $x \in D(f)$.

(i) Část integrandu nejdříve upravíme na tvar

$$\frac{x^2}{x^2-2x+4} = \frac{x^2-2x+4+2x-4}{x^2-2x+4} = 1 + \frac{2x-4}{x^2-2x+4}.$$

Nyní platí

$$\mathcal{I} = \int \frac{x^2\,dx}{(x^2-2x+4)\sqrt{2+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2+2x-x^2}} +$$

$$+ \int \frac{(2x-4)\,dx}{(x^2-2x+4)\sqrt{2+2x-x^2}} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2.$$

Dále

$$\mathcal{I}_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{3-(x-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}} = \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C$$

pro $x \in (1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}) = D(f)$.

$$\mathcal{I}_2 = 2\int \frac{(x-1)\,dx}{\{(x-1)^2+3\}\sqrt{3-(x-1)^2}} - 2\int \frac{dx}{\{(x-1)^2+3\}\sqrt{3-(x-1)^2}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x-1 = \sqrt{3}\,\sin t \\ dx = \sqrt{3}\,\cos t\,dt \\ x \in D(f), t \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right| = 2\int \frac{\sqrt{3}\,\sin t\,dt}{3(\sin^2 t+1)} - 2\int \frac{dt}{3(\sin^2 t+1)} = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathcal{K}_1 - \frac{2}{3}\mathcal{K}_2,$$

$$\mathcal{K}_1 = \int \frac{\sin t\,dt}{\sin^2 t+1} = \int \frac{\sin t\,dt}{2-\cos^2 t} = \left| \begin{array}{l} \cos t = u \in (0,1\rangle \\ \sin t\,dt = -du \end{array} \right| = \int \frac{du}{u^2-2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2}+u} + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}-\cos t}{\sqrt{2}+\cos t} + C,$$

$$\mathcal{K}_2 = \int \frac{dt}{\sin^2 t+1} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} t = u \\ dt = \frac{du}{u^2+1} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{du}{u^2+1}}{\frac{u^2}{u^2+1}+1} = \int \frac{du}{2u^2+1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,u) + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} t) + C.$$

Jestliže tyto výsledky shrneme, dostaneme

$$\mathcal{I}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \frac{\sqrt{2}-\cos t}{\sqrt{2}+\cos t} - \frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} t) + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1-\frac{(x-1)^2}{3}}}{\sqrt{2}+\sqrt{1-\frac{(x-1)^2}{3}}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arctg} \frac{\frac{\sqrt{2}(x-1)}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1-\frac{(x-1)^2}{3}}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}(x-1)}{\sqrt{2+2x-x^2}} + C, \quad x \in D(f),$$

a tedy

$$\mathcal{I} = \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}} -$$

$$- \frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}(x-1)}{\sqrt{2+2x-x^2}} + C = F(x) + C, x \in D(f).$$

Ukažte, že $\lim\limits_{x \to 1+\sqrt{3}_-} F(x) = \frac{\pi}{6}(3-\sqrt{2})$, $\lim\limits_{x \to 1-\sqrt{3}_+} F(x) = \frac{\pi}{6}(3+\sqrt{2})$.

(j) Protože $D(f) = \mathbf{R} - (-1,0)$, budeme primitivní funkci F počítat na jejím vnitřku, t.j. pro $x \in (-\infty,-1) \cup (0,+\infty)$. Do integrálu $\mathcal{I} = \int \frac{dx}{\left\{1+\sqrt{x(1+x)}\right\}^2}$ zavedeme substituci

$$t = \sqrt{\frac{1+x}{x}}, \quad dx = \frac{-2t\,dt}{(t^2-1)^2}, \quad x = \frac{1}{t^2-1}, \quad \sqrt{x(1+x)} = |x|\,t = \frac{t}{|t^2-1|}$$

Poněvadž je $t \in (0,1) \Leftrightarrow x \in (-\infty,-1)$ a $t \in (1,+\infty) \Leftrightarrow x \in (0,+\infty)$, dostaneme dále

$$1+\sqrt{x(1+x)} = 1 + \frac{t}{|t^2-1|} = \begin{cases} \frac{t^2+t-1}{t^2-1} & \text{pro } t \in (1,+\infty) \\ \frac{t^2-t-1}{t^2-1} & \text{pro } t \in (0,1). \end{cases}$$

Tedy

$$\mathcal{I} = \int \frac{\frac{-2t\,dt}{(t^2-1)^2}}{\left\{\frac{t^2 \pm t-1}{t^2-1}\right\}^2} = -2 \int \frac{t\,dt}{(t^2 \pm t - 1)^2}.$$

Rovnice $t^2+t-1=0$ (resp. $t^2-t-1=0$) má dva reálné různé kořeny $t_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$ (resp. $t_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$) a tedy

$$\frac{-2t}{(t^2 \pm t - 1)^2} = \frac{A}{t-t_1} + \frac{B}{t-t_2} + \frac{C}{(t-t_1)^2} + \frac{D}{(t-t_2)^2};$$

$$-2t = A(t-t_2)(t^2 \pm t - 1) + B(t-t_1)(t^2 \pm t - 1) + C(t-t_2)^2 + D(t-t_1)^2.$$

Pro $t = t_1$ dostaneme $-2t_1 = C(t_1 - t_2)^2 \Rightarrow C = \frac{\pm 1 - \sqrt{5}}{5}$;
pro $t = t_2$ dostaneme $-2t_2 = D(t_2 - t_1)^2 \Rightarrow D = \frac{\pm 1 + \sqrt{5}}{5}$.
Srovnáním koeficientů u nejvyšší a nejnižší mocniny t dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{array}{llllll} t^3: & 0 = & A & +B & & \\ t^0: & 0 = & At_2 & +Bt_1 & +Ct_2^2 & +Dt_1^2. \end{array}$$

Poněvadž je $Ct_2^2 = \frac{2}{5}\,t_2,\ \ Dt_1^2 = \frac{2}{5}\,t_1,\ \ Ct_2^2 + Dt_1^2 = \mp\frac{2}{5}$, má daná soustava tvar

$$A + B = 0 \qquad\qquad At_2 + Bt_1 = \pm\frac{2}{5}$$

s řešením $A = \mp\frac{2}{5\sqrt{5}},\ \ B = \pm\frac{2}{5\sqrt{5}}$. Odtud nyní dostaneme:
(i) Pro $x > 0$ je

$$\mathcal{I} = -2\int \frac{t\,dt}{(t^2+t-1)^2} = \frac{2}{5\sqrt{5}} \ln\left|\frac{t-t_2}{t-t_1}\right| + \frac{1}{5}\left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{t-t_1} - \frac{1+\sqrt{5}}{t-t_2}\right\} + C =$$

$$= \frac{2}{5\sqrt{5}} \ln\frac{t-t_2}{t-t_1} + \frac{-2t+4}{5(t^2+t-1)} + C = \frac{2}{5\sqrt{5}} \ln\frac{2\sqrt{x(1+x)} + (1+\sqrt{5})\,x}{2\sqrt{x(1+x)} + (1-\sqrt{5})\,x} +$$

$$+\frac{2}{5}\cdot\frac{2x - \sqrt{x(1+x)}}{1+\sqrt{x(1+x)}} + C = F(x) + C.$$

(ii) Pro $x < -1$ je

$$\mathcal{I} = -2\int \frac{t\,dt}{(t^2-t-1)^2} = -\frac{2}{5\sqrt{5}} \ln\left|\frac{t-t_2}{t-t_1}\right| + \frac{1}{5}\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{t-t_1} + \frac{1-\sqrt{5}}{t-t_2}\right\} + C =$$

$$= -\frac{2}{5\sqrt{5}} \ln\frac{t-t_2}{t_1-t} + \frac{2t+4}{5(t^2-t-1)} + C = -\frac{2}{5\sqrt{5}} \ln\frac{2\sqrt{x(1+x)} + (1-\sqrt{5})\,x}{-[2\sqrt{x(1+x)} + (1+\sqrt{5})\,x]} +$$

$$+\frac{2}{5}\cdot\frac{2x - \sqrt{x(1+x)}}{1+\sqrt{x(1+x)}} + C = G(x) + C.$$

Poznámky: 1. Výpočty pro $x \in (-\infty, -1)$ nebylo třeba provádět. Protože funkce $f(x) = \frac{1}{\left\{1+\sqrt{x(1+x)}\right\}^2}$ je sudá vzhledem k proměnné $x + \frac{1}{2}$ (tj. $f(x) = f(-x-1)$,

$x \in D(f)$), existuje primitivní funkce F k funkci f, která je lichá vzhledem k proměnné $x + \frac{1}{2}$. Funkci F v bodu (i) lze rozšířit liše i pro $x \in (-\infty, -1)$ předpisem $F(x) = -F(-x-1)$. Pak

$$-\frac{d}{dx}F(-x-1) = f(-x-1) = \frac{1}{\left\{1+\sqrt{-x(-1-x)}\right\}^2} = \frac{1}{\left\{1+\sqrt{x(1+x)}\right\}^2} = f(x),$$

t.j. $-F(-x-1)$ je primitivní funkce k funkci f v intervalu $(-\infty, -1)$. V bodě (ii) jsme již jednu primitivní funkci G k f spočetli. Tedy $G(x) + F(-x-1) = K$ je konstanta pro $x \in (-\infty, -1)$. Nyní tuto konstantu určíme.

$$K = G(-1_-) + F(0_+) = \frac{2}{5\sqrt{5}} \ln \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} - \frac{4}{5} = \frac{4}{5\sqrt{5}} \ln \frac{1+\sqrt{5}}{4} - \frac{4}{5}$$

2. Použijeme-li některé z Eulerových substitucí $\sqrt{x(1+x)} = x + t$ (resp. $x - t$, resp. $t - x$) nebo $x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sin t}$, po případě $x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{ch} t$, nebude výpočet kratší, spíš naopak.

(k) Platí

$$\mathcal{I} = \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+2}\,dx = \int \frac{(x^2+1)\,dx}{(x^2+2)\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{(x^2+2-1)\,dx}{(x^2+2)\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} -$$

$$-\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{x^2+1}} = \left| \begin{array}{l} x = \operatorname{sh} t \\ dx = \operatorname{ch} t\,dt \end{array} \right| = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \int \frac{dt}{\operatorname{sh}^2 t + 2} =$$

$$= \ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \int \frac{dt}{\left(\operatorname{th}^2 t + \frac{2}{\operatorname{ch}^2 t}\right)\operatorname{ch}^2 t} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{th} t = u \\ \dfrac{dt}{\operatorname{ch}^2 t} = du \\ \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t} = 1 - u^2 \end{array} \right| =$$

$$= \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + \int \frac{du}{u^2-2}.$$

Označme $\mathcal{K} = \int \frac{du}{u^2-2}$ a pišme $\frac{1}{u^2-2} = \frac{A}{u-\sqrt{2}} + \frac{B}{u+\sqrt{2}}$. Potom je

$$A + B = 0, \quad A - B = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{s řešením } A = -B = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Tedy $\mathcal{K} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}} \right| + C_1$. Protože je $u = \operatorname{th} t = \frac{\operatorname{sh} t}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \in (-1, 1)$, dostaneme celkově

$$\mathcal{I} = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2(x^2+1)} - x}{\sqrt{2(x^2+1)} + x} + C.$$

Poznámka: Z výsledku je patrno, že jsme si mohli ušetřit dvojici hyperbolických substitucí, kdybychom rovnou zavedli substituci $u = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. To je tzv. Abelova substituce a více si o ní řekneme v příkladu 31.

28. Vypočtěte $\int f(x)\,dx$, je-li

(a) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}$ $\left[\ln \frac{|\sqrt{x^2+x+1}-x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}-x+1}\right]$

(b) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$ $\left[\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+4x-4}-x}{2} \text{ nebo } \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} \left|\frac{x-2}{x}\right|\right]$

(c) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$ $\left[2\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2+2x-1}-x) \text{ nebo } \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{x-1}{x}\right|\right]$

(d) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2+x-x^2}}$ $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{x+4-2\sqrt{2}\sqrt{2+x-x^2}}{|x|}\right]$

Poznámka: V příkladech (a)-(d) zkuste též substituci $t = \frac{1}{x}$ a porovnejte výsledky.

(e) $f(x) = \frac{1}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$

$\left[2\ln|x-\sqrt{x^2-x+1}| - \frac{3}{2}\ln(2\sqrt{x^2-x+1}+1-2x) - \frac{3}{2(2x-2\sqrt{x^2-x+1}-1)}\right]$

(f) $f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$

$\left[2\ln|x+\sqrt{x^2+x+1}| - \frac{3}{2}\ln(2\sqrt{x^2+x+1}+1+2x) - \frac{3}{2(2x+2\sqrt{x^2+x+1}+1)}\right]$

(g) $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$ $\left[\ln\frac{1-x+\sqrt{1-2x-x^2}}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} - 2\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}\right]$

(h) $f(x) = \frac{x}{(2x^2+1)\sqrt{3x^2+5}}$ $\left[\frac{1}{2\sqrt{14}}\ln\frac{\sqrt{2(3x^2+5)}-\sqrt{7}}{\sqrt{2(3x^2+5)}+\sqrt{7}};\ \text{zaveďte substituci } 3x^2+5=t^2.\right]$

(i) $f(x) = \frac{1-\sqrt{x^2+x+1}}{x\sqrt{x^2+x+1}}$ $\left[\ln\frac{2\sqrt{x^2+x+1}-x-2}{x^2}\right]$

(j) $f(x) = \frac{\sqrt{2x+x^2}}{x^2}$ $\left[\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x}| - \frac{2}{x}\sqrt{x^2+2x}\right]$

(k) $f(x) = \frac{x-1}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}$ $\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{2x^2-2x+1}-1}{x} + \frac{x}{\sqrt{2x^2-2x+1}-1+x}\right\}\right]$

(l) $f(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$ $\left[\ln\frac{|\sqrt{x^2+x+1}-x-2|}{\sqrt{x^2+x+1}-x}\right]$

(m) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}$ $\left[\frac{(2-x)\sqrt{1-x^2}}{3(1-x)^2}\right]$

(n) $f(x) = \sqrt{x^2-2x-1}$ $\left[\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x-1} - \ln|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}|\right]$

Poznámka: Méně vhodný postup dává $\ln|\sqrt{x^2-2x-1}-x+1| + \frac{1}{2(\sqrt{x^2-2x-1}-x+1)^2} - -\frac{1}{8}(\sqrt{x^2-2x-1}-x)^2 - \frac{1}{4}(\sqrt{x^2-2x-1}-x)$. Ukažte, že jsou oba výsledky správně.

(o) $f(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}$ $\left[\frac{\frac{4}{9}t+\frac{5}{8}}{(2t+3)^2} - \frac{16}{27}\ln|t| - \frac{17}{108}\ln|2t+3|,\ \text{kde } t = x+\sqrt{x^2+3x+2}\right]$

29. Vypočtěte $\int f(x)\,dx$, je-li

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2(x+\sqrt{1+x^2})}$ $\left[\ln\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{|x|} - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right]$

(b) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}$ $\left[2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{3-x}{2}\sqrt{1-2x-x^2}\right]$

(c) $f(x) = \frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ $\left[14\arcsin\frac{x+1}{2} - \frac{3x-19}{2}\sqrt{3-2x-x^2}\right]$

(d) $f(x) = \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}$ $\left[\frac{11}{8}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}} - \frac{2x-1}{4}\sqrt{1+x-x^2}\right]$

(e) $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$ $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{2}+\sqrt{1+2x-x^2}} - \frac{\sqrt{1+2x-x^2}}{2(x-1)}\right]$

(f) $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}$ $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

(g) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}$ $\left[\ln(x+\sqrt{x^2+2}) + \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\right]$

(h) $f(x) = \frac{1}{(x^2+x+1)^{5/2}}$ $\left[\frac{8}{9}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} - \frac{2}{27}\left\{\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\right\}^3\right]$

(i) $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^{7/2}}$ $\left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{2}{3}\left\{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right\}^3 + \frac{1}{5}\left\{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right\}^5\right]$

(j) $f(x) = \frac{1}{x^4\sqrt{x^2-1}}$ $\left[\frac{2x^2+1}{3x^3}\sqrt{x^2-1}\right]$

(k) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}$ $\left[\frac{3x^2+6x+5}{8(x+1)^4}\sqrt{x^2+2x} - \frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{|x+1|}\right]$

(l) $f(x) = \frac{x}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}$ $\left[\operatorname{sgn}(3-x)\left\{\frac{1-x+\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1} + 2\arcsin\frac{1}{x-2}\right\}\right]$

30. Vypočtěte $\int f(x)\,dx$, je-li

(a) $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^2\sqrt{4x^2+4x+5}}$ $\left[-\frac{\sqrt{4x^2+4x+5}}{8(2x+1)}\right]$

(b) $f(x) = x\sqrt{x^2+2x+2}$ $\left[\frac{1}{6}(2x^2+x+1)\sqrt{x^2+2x+2} - \frac{1}{2}\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})\right]$

(c) $f(x) = \frac{1}{(x^2+4x+7)^{3/2}}$ $\left[\frac{x+2}{3\sqrt{x^2+4x+7}}\right]$

(d) $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$ $\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}\,x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{2}\,x-\sqrt{x^2-1}}\right]$

(e) $f(x) = \frac{1}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}}$ $\left[\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}\,x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}\,x}\right|\right]$

(f) $f(x) = \frac{x+1}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$ $\left[\frac{2}{3}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}\right]$

(g) $f(x) = \sqrt{3-4x+4x^2}$ $\left[\frac{1}{4}(2x-1)\sqrt{4x^2-4x+3} + \frac{1}{2}\ln(2x-1+\sqrt{4x^2-4x+3})\right]$

(h) $f(x) = \sqrt{3x^2-3x+1}$

$\left[\frac{1}{4}(2x-1)\sqrt{3x^2-3x+1} + \frac{1}{8\sqrt{3}}\ln\left\{\sqrt{3}(2x-1)+2\sqrt{3x^2-3x+1}\right\}\right]$

(i) $f(x) = \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}$ $\left[x\sqrt{x^2-2x+5} - 5\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+5})\right]$

(j) $f(x) = x^2\sqrt{x^2+4}$ $\left[\frac{1}{4}x(x^2+2)\sqrt{x^2+4} - 2\ln(x+\sqrt{x^2+4})\right]$

(k) $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{3x^2+1}}$ $\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{2}\,x}{\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{2}\,x}\right]$

Poznámky: 1. Užití Eulerových, goniometrických, po případě hyperbolických substitucí do integrálu tvaru $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ vede velmi často k nepříjemně komplikovaným výpočtům. Navíc bývá obtížné odhadnout, která z 15 možných substitucí je ta nejvhodnější. Tyto problémy do jisté míry odstraňuje postup, který jako první popsal norský matematik Niels Henrik Abel (1802-1829), a nyní se s ním stručně seznámíme. Tento postup sice dovoluje jednotnou metodu řešení, ale výpočty nejsou o nic kratší. Z toho důvodu postupy, uvedené v příkladech 27–30 mají své opodstatnění a jsou také prakticky používány.

2. Jestliže označíme $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$, potom lze funkci $R(x,y)$ psát ve tvaru

$$R(x,y) = \frac{P_1(x) + P_2(x)\,y}{P_3(x) + P_4(x)\,y}, \text{ kde } P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4 \text{ jsou polynomy.}$$

Skutečně, každá mocnina y^n je buďto polynom v x nebo polynom v x, násobený y. Jestliže předchozí zlomek rozšíříme výrazem $P_3(x) - P_4(x)\,y$, dostaneme $R(x,y)$ ve tvaru

$$R(x,y) = R_1(x) + R_2(x)\cdot y,$$

kde R_1 a R_2 jsou racionální funkce. Integrál $\int R_1(x)\,dx$ se vypočte standardním způsobem a zbývá tedy problém výpočtu

$$\int R_2(x)\,y\,dx = \int \frac{R^*(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \text{ kde } R^*(x) = R_2(x)(ax^2+bx+c)$$

je opět racionální funkce. Rozložíme-li $R^*(x)$ na součet polynomu a parciálních zlomků, dostaneme tři typy integrálů:

$$I. \qquad \int \frac{P(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad \text{kde } P(x) \text{ je polynom;}$$

$$II. \qquad \int \frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad (\,k\in\mathbf{N},\ \alpha\in\mathbf{R}\,);$$

$$III. \qquad \int \frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad (m\in\mathbf{N},\ p^2-4q<0\,).$$

Jaký je další postup při výpočtu těchto integrálů, předvedeme v následujícím příkladu.

31. Vypočtěte $\int f(x)\,dx$, je-li

a) $f(x)=\frac{3x^3-8x+5}{\sqrt{x^2-4x-7}}$

b) $f(x)=\frac{x^{10}}{\sqrt{1+x^2}}$

c) $f(x)=\frac{1}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}$

d) $f(x)=\frac{1}{(x^3-x)\sqrt{x^2+x+4}}$

e) $f(x)=\frac{x^2}{(x^2-2x+4)\sqrt{2+2x-x^2}}$

f) $f(x)=\frac{1}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}$

g) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}$

h) $f(x)=x^4\sqrt{\alpha^2-x^2}$, $\alpha>0$.

Poznámka: Příklady a) a b) jsou typu $I.$ z předchozí poznámky a postup při jejich výpočtu je následující. Předpokládejme, že daný integrál lze vyjádřit ve tvaru

$$\int \frac{P(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

kde Q je polynom s neznámými koeficienty stupně o jednu menší, než stupeň P a λ je neznámý parametr. Jestliže tuto rovnost zderivujeme a vynásobíme $\sqrt{ax^2+bx+c}$, dostaneme rovnost dvou polynomů a srovnáním koeficientů určíme $Q(x)$ a λ.

Řešení:

(a) Předpokládejme, že

$$\mathcal{I}=\int\frac{3x^2-8x+5}{\sqrt{x^2-4x-7}}\,dx=(Ax^2+Bx+C)\sqrt{x^2-4x-7}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-7}}.$$

Po zderivování a vynásobení $\sqrt{x^2-4x-7}$ dostaneme rovnost

$$3x^3-8x+5=(2Ax+B)(x^2-4x-7)+(Ax^2+Bx+C)(x-2)+\lambda.$$

Jestliže srovnáme koeficienty u odpovídajících si mocnin x, dostaneme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rrrrrr}
x^3: & 3= & 3A & & & \\
x^2: & 0= & -10A & +2B & & \\
x^1: & -8= & -14A & -6B & +\ C & \\
x^0: & 5= & & -7B & -2C & +\lambda
\end{array}$$

s řešením $A=1$, $B=5$, $C=36$, $\lambda=112$. Jestliže dále upravíme odmocninu

$$\sqrt{x^2-4x-7}=\sqrt{(x-2)^2-11}=\sqrt{11}\,\sqrt{\left(\frac{x-2}{\sqrt{11}}\right)^2-1},$$

dostaneme

$$\mathcal{I} = (x^2+5x+36)\sqrt{x^2-4x-7} + \frac{112}{\sqrt{11}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x-2}{\sqrt{11}}\right)^2 - 1}} =$$

$$= (x^2+5x+36)\sqrt{x^2-4x-7} + 112 \ln \left| \frac{x-2}{\sqrt{11}} + \sqrt{\left(\frac{x-2}{\sqrt{11}}\right)^2 - 1} \right| + C =$$

$$(x^2+5x+36)\sqrt{x^2-4x-7} + 112 \ln |x-2+\sqrt{x^2-4x-7}| + K,$$

kde $K = C - 56 \ln 11$.

(b) Funkce $\frac{x^{10}}{\sqrt{1+x^2}}$ $\left(\text{resp. } \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ je spojitá v $\mathbf{R}$ a sudá, neboli její primitivní funkce F_1 (resp. F_2), pro kterou je $F_1(0) = 0$ (resp $F_2(0) = 0$), je definována v $\mathbf{R}$ a lichá. Proto hledaný polynom $Q(x) = \frac{F_1(x) - F_2(x)}{\sqrt{x^2+1}}$ je lichá funkce. Můžeme tedy psát

$$\int \frac{x^{10}\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = (Ax^9 + Bx^7 + Cx^5 + Dx^3 + Ex)\sqrt{x^2+1} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Po zderivování a vynásobení $\sqrt{1+x^2}$ dostaneme rovnost

$$x^{10} = (9Ax^8 + 7Bx^6 + 5Cx^4 + 3Dx^2 + E)(x^2+1) + \left(Ax^9 + Bx^7 + Cx^5 + Dx^3 + Ex\right)x + \lambda.$$

Srovnání koeficientů dává soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{llllllll}
x^{10}: & 1 = & 10A & & & & & \\
x^8: & 0 = & 9A & +8B & & & & \\
x^6: & 0 = & & 7B & +6C & & & \\
x^4: & 0 = & & & 5C & +4D & & \\
x^2: & 0 = & & & & 3D & +2E & \\
x^0: & 0 = & & & & & E & +\lambda.
\end{array}$$

Tato soustava má řešení

$$A = \frac{1}{10},\ B = -\frac{9}{80},\ C = \frac{21}{160},\ D = -\frac{21}{128},\ E = \frac{63}{256},\ \lambda = -\frac{63}{256}.$$

Odtud plyne, že

$$\mathcal{I} = \left(\frac{1}{10}x^9 - \frac{9}{80}x^7 + \frac{21}{160}x^5 - \frac{21}{128}x^3 + \frac{63}{256}x\right)\sqrt{x^2+1} - \frac{63}{256}\ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C.$$

Poznámka: Příklad c) je integrál typu $II.$, tedy $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k \sqrt{ax^2+bx+c}}$. V příkladu d) musíme nejdříve rozložit funkci $\frac{1}{x^3-x}$ na parciální zlomky. Tak vyjádříme integrál z příkladu d) jako součet tří integrálů typu II. Tyto integrály se pomocí substituce $x - \alpha = \frac{1}{t}$ převádějí na integrály typu I.

(c) Do integrálu $\mathcal{I} = \int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}$ zavedeme substituci

$$x - 1 = \frac{1}{t};\ \ dx = -\frac{dt}{t^2};\ \ x = 1 + \frac{1}{t} = \frac{t+1}{t};\ \ x^2 + 3x + 1 = \frac{5t^2+5t+1}{t^2}.$$

Tedy pro $x > 1$ je

$$\mathcal{I} = -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^3}\frac{\sqrt{5t^2+5t+1}}{t}} = -\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}.$$

Označíme-li

$$\mathcal{K} = \int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}} = (At+B)\sqrt{5t^2+5t+1} + \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}},$$

potom po zderivování a vynásobení $\sqrt{5t^2+5t+1}$ dostaneme rovnost

$$t^2 = A(5t^2+5t+1) + \frac{At+B}{2}(10t+5) + \lambda.$$

Porovnání koeficientů dává soustavu rovnic

$$\begin{array}{rrlll} t^2: & 1 = & 10A & & \\ t^1: & 0 = & \frac{15}{2}A & +5B & \\ t^0: & 0 = & A & +\frac{5}{2}B & +\lambda \end{array}$$

s řešením $A = \frac{1}{10}$, $B = -\frac{3}{20}$, $\lambda = \frac{11}{40}$. Odmocninu $\sqrt{5t^2+5t+1}$ si upravíme na tvar

$$\sqrt{5t^2+5t+1} = \sqrt{5}\sqrt{t^2+t+\frac{1}{5}} = \sqrt{5}\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{20}}.$$

Tedy

$$\mathcal{K} = \frac{1}{20}(2t-3)\sqrt{5t^2+5t+1} + \frac{11}{40\sqrt{5}}\int \frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{20}}} =$$

$$= \frac{1}{20}(2t-3)\sqrt{5t^2+5t+1} + \frac{11}{40\sqrt{5}}\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{20}}\right| + K =$$

$$= \frac{1}{20}(2t-3)\sqrt{5t^2+5t+1} + \frac{11}{40\sqrt{5}}\ln\left|\sqrt{5}(2t+1) + 2\sqrt{5t^2+5t+1}\right| + C,$$

kde $C = K - \frac{11\sqrt{5}}{400}\ln 20$. Jestliže vyjdeme z rovnosti $x - 1 = \frac{1}{t}$, dostaneme

$$t = \frac{1}{x-1},\ 2t-3 = \frac{5-3x}{x-1},\ 2t+1 = \frac{x+1}{x-1},$$

$$\text{a pro } t > 1 \text{ také } \sqrt{5t^2+5t+1} = \frac{\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1}$$

Shrnutí těchto výsledků dává

$$\mathcal{I} = \frac{3x-5}{20(x-1)^2}\sqrt{x^2+3x+1} - \frac{11}{40\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}(x+1)+2\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1}\right| + C$$

pro $x > 1$. Tento vzorec platí i pro $x \in \left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, 1\right)$; definiční obor integrandu totiž je

$$D(f) = \mathbf{R} - \left\{\left\langle \frac{-3-\sqrt{5}}{2}; \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\rangle \cup \{1\}\right\} =$$

$$= \left(-\infty; \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty).$$

(d) Označme $\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^3-x)\sqrt{x^+x+4}}$. Funkci $\frac{1}{x^3-x}$ nejdříve rozložíme na parciální zlomky. Platí

$$\frac{1}{x^3-x} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} - \frac{1}{x}$$

a daný integrál lze zapsat jako součet

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+4}} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+4}} - \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{I}_1 + \frac{1}{2}\mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_3.$$

Pro výpočet integrálu $\mathcal{I}_1$ užijeme substituci

$$x-1 = \frac{1}{t},\ dx = -\frac{dt}{t^2},\ x = \frac{t+1}{t},\ x^2+x+4 = (x-1)^2+3(x-1)+6 =$$

$$= \frac{1}{t^2} + \frac{3}{t} + 6 = \frac{6t^2+3t+1}{t^2},\ x^2+x+4 = \frac{5}{8}\left\{\left(\frac{4\sqrt{3}\,t+\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1\right\};$$

ta poskytuje

$$\mathcal{I}_1 = -\int \frac{dt}{\sqrt{6t^2+3t+1}} = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\int \frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{4\sqrt{3}\,t+\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2+1}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{6}}\ln \frac{\sqrt{3}(4t+1)+\sqrt{8(6t^2+3t+1)}}{\sqrt{5}}.$$

Poněvadž je

$$t = \frac{1}{x-1},\ 4t+1 = \frac{3+x}{x-1},\ \sqrt{6t^2+3t+1} = \frac{\sqrt{x^2+x+4}}{x-1},$$

dostaneme výsledně

$$\mathcal{I}_1 = -\frac{1}{\sqrt{6}}\ln \frac{\sqrt{3}(x+3)+\sqrt{8(x^2+x+4)}}{\sqrt{5}(x-1)}.$$

Analogicky pro $\mathcal{I}_2$ užijeme substituci

$$x+1 = \frac{1}{u},\ dx = -\frac{du}{u^2},\ x = \frac{1-u}{u},\ x^2+x+4 = (x+1)^2-(x+1)+4 =$$

$$= \frac{1}{u^2} - \frac{1}{u} + 4 = \frac{4u^2-u=1}{u^2},\ 4u^2-u+1 = \frac{15}{16}\left\{\left(\frac{8u-1}{\sqrt{15}}\right)^2+1\right\},$$

která dává

$$\mathcal{I}_2 = -\int \frac{du}{\sqrt{4u^2-u+1}} = -\frac{4}{\sqrt{15}}\int \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{8u-1}{\sqrt{15}}\right)^2+1}} =$$

$$-\frac{1}{2}\ln \frac{8u-1+\sqrt{64u^2-16u+16}}{\sqrt{15}} = -\frac{1}{2}\ln \frac{8u-1+4\sqrt{4u^2-u+1}}{\sqrt{15}}.$$

Poněvadž platí

$$u=\frac{1}{x+1},\ 8u-1=\frac{7-x}{x+1},\ \sqrt{4u^2-u+1}=\frac{\sqrt{x^2+x+4}}{x+1},$$

dostaneme odtud

$$\mathcal{I}_2=-\frac{1}{2}\ln\frac{7-x+4\sqrt{x^2+x+4}}{\sqrt{15}(x+1)}.$$

Stejně tak pro $\mathcal{I}_3$ substituujeme

$$x=\frac{1}{v},\ dx=-\frac{dv}{v^2},\ x^2+x+4=\frac{4v^2+v+1}{v^2},\ 4v^2+v+1=\frac{15}{16}\left\{\left(\frac{8v+1}{\sqrt{15}}\right)^2+1\right\},$$

a vypočteme

$$\mathcal{I}_3=-\int\frac{dv}{\sqrt{4v^2+v+1}}=-\frac{4}{\sqrt{15}}\int\frac{dv}{\sqrt{\left(\frac{8v+1}{\sqrt{15}}\right)^2+1}}=-\frac{1}{2}\ln\frac{8v+1+4\sqrt{4v^2+v+1}}{\sqrt{15}}.$$

Vzhledem k tomu, že $8v+1=\frac{x+8}{x}$, máme

$$\mathcal{I}_3=-\frac{1}{2}\ln\frac{x+8+4\sqrt{x^2+x+4}}{\sqrt{15}\,x}.$$

Shrnutím těchto výsledků dostaneme

$$\mathcal{I}=\frac{1}{2}\ln\frac{x+8+4\sqrt{x^2+x+4}}{\sqrt{15}\,x}-\frac{1}{4}\ln\frac{7-x+4\sqrt{x^2+x+4}}{\sqrt{15}(x+1)}-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{3}(x+3)+\sqrt{8(x^2+x+4)}}{\sqrt{5}(x-1)}+C=\frac{1}{2}\ln\frac{x+8+4\sqrt{x^2+x+4}}{x}-$$

$$-\frac{1}{4}\ln\frac{7-x+4\sqrt{x^2+x+4}}{x+1}-\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{3}(x+3)+\sqrt{8(x^2+x+4)}}{x-1}+K,$$

kde $K=C+\frac{1}{4\sqrt{6}}\ln 5-\frac{1}{8}\ln 15$. Výpočet platí pro $x>1$! Uvědomte si, že čitatele všech zlomků v logaritmech jsou kladné pro $x\in\mathbf{R}-\{-1,0,1\}=D(f)$. Aby tedy uvedený výsledek platil v celém $D(f)$, je třeba ve jmenovatelích těchto zlomků doplnit absolutní hodnotu, t.j.

$$\mathcal{I}=\frac{1}{2}\ln\frac{x+8+4\sqrt{x^2+x+4}}{|x|}-\frac{1}{4}\ln\frac{7-x+4\sqrt{x^2+x+4}}{|x+1|}-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{3}(x+3)+\sqrt{8(x^2+x+4)}}{|x-1|}+K, x\neq -1,0,1.$$

Poznámky: 1. Nejpracnější bývá výpočet integrálu typu $III.$ a provádí se v několika krocích.

(i) Nejdříve se v integrálu $\mathcal{I}=\displaystyle\int\frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$ zbavíme lineárních členů v obou kvadratických trojčlenech.

(A) Tento úkol je jednoduchý, je-li $p=\frac{b}{a}$. Za tím účelem stačí zavést substituci $x=t-\frac{p}{2}$.

(B) Jestliže nenastane předchozí situace, zavádíme substituci $x=\frac{\alpha t+\beta}{t+1}$ a neznámé koeficienty α,β vypočteme tak, aby byl požadavek splněn.

(ii) Krok (i) převádí daný integrál na tvar $\mathcal{I} = \int \frac{P(t)\,dt}{(t^2+\lambda)^m\,\sqrt{\gamma t^2+\delta}}$, kde $P(t)$ je polynom. Jestliže racionální funkci $\frac{P(t)}{(t^2+\lambda)^m}$ rozložíme opět na součet polynomu a parciálních zlomků, dostáváme integrály typu

$$\int \frac{(A_1 t + B_1)\,dt}{(t^2+\lambda)^n\,\sqrt{\gamma t^2+\delta}}.$$

(iii) Předchozí integrál rozdělíme na dva integrály. V integrálu $A_1 \int \frac{t\,dt}{(t^2+\lambda)^n\,\sqrt{\gamma t^2+\delta}}$ zavedeme substituci $\gamma t^2 + \delta = u^2$, v integrálu $B_1 \int \frac{dt}{(t^2+\lambda)^n\,\sqrt{\gamma t^2+\delta}}$ Abelovu substituci $v = \frac{\gamma t}{\sqrt{\gamma t^2+\delta}}$.

2. Postup z předchozí poznámky můžeme někdy značně zkrátit. Typickým příkladem je integrál

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{m+1/2}} \qquad (\, m \in \mathbf{N}\,),$$

kde můžeme rovnou použít Abelovy substituce $t = \frac{ax+b/2}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

(e) Integrál $\mathcal{I} = \int \frac{x^2\,dx}{(x^2-2x+4)\sqrt{2+2x-x^2}}$ nejdříve upravíme na tvar

$$\mathcal{I} = \int \frac{(x^2-2x+4)+(2x-4)}{(x^2-2x+4)\sqrt{2+2x-x^2}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2+2x-x^2}} +$$

$$\int \frac{(2x-4)\,dx}{(x^2-2x+4)\sqrt{2+2x-x^2}} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2.$$

Pro $\mathcal{I}_1$ platí $\sqrt{2+2x-x^2} = \sqrt{3}\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}$ a tedy $\mathcal{I}_1 = \arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}}$.
Do integrálu $\mathcal{I}_2$ zavedeme substituci $x = t+1$ (je $p = \frac{b}{a}$ z poznámky 1). Tedy

$$dx = dt\,,\ \ 2x-4 = 2(t-1)\,,\ \ x^2-2x+4 = t^2+3\,,\ \ 2+2x-x^2 = 3-t^2.$$

Dále dostaneme

$$\mathcal{I}_2 = 2\int \frac{(t-1)\,dt}{(t^2+3)\,\sqrt{3-t^2}} = \mathcal{K}_1 - 2\mathcal{K}_2.$$

$$\mathcal{K}_1 = \int \frac{2t\,dt}{(t^2+3)\,\sqrt{3-t^2}} = \left|\begin{array}{c} 3-t^2 = u^2 \\ t\,dt = -u\,du \end{array}\right| = -2\int \frac{u\,du}{(6-u^2)\,u} = \int \frac{2\,du}{u^2-6}.$$

Rozklad $\frac{2}{u^2-6} = \frac{A}{u-\sqrt{6}} + \frac{B}{u+\sqrt{6}}$ dává $A = -B = \frac{1}{\sqrt{6}}$ a tedy

$$\mathcal{K}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{6}}{u+\sqrt{6}}\right|.\ \text{Poněvadž platí}\ u = \sqrt{3-t^2} = \sqrt{2+2x-x^2} < \sqrt{3},$$

dostaneme

$$\mathcal{K}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}}.$$

Do integrálu $\mathcal{K}_2$ zavedeme Abelovu substituci

$$v = -\frac{t}{\sqrt{3-t^2}}\,,\ \ v\sqrt{3-t^2} = -t\,,$$

$$dv\,\sqrt{3-t^2}+v\frac{-t}{\sqrt{3-t^2}}\,dt = dv\,\sqrt{3-t^2}+v^2\,dt = -dt$$

a odtud

$$\frac{dt}{\sqrt{3-t^2}} = -\frac{dv}{v^2+1}\,,\ \ 3+t^2 = 3\,\frac{2v^2+1}{v^2+1}.$$

Poznámka: Jestliže se chceme vyhnout větě o diferencování součinu, můžeme též postupovat následujícím způsobem:

$$dv = -\left(\frac{1}{\sqrt{3-t^2}}+\frac{t^2}{\sqrt{(3-t^2)^3}}\right)dt = -\frac{3\,dt}{(3-t^2)\sqrt{3-t^2}}.$$

Ze vztahu $v=-\frac{t}{\sqrt{3-t^2}}$ plyne $3v^2-v^2t^2=t^2$, tedy $t^2=\frac{3v^2}{v^2+1}$ a dále $\frac{t^2}{3}-1=-\frac{1}{v^2+1}$, dostáváme odtud

$$\frac{dt}{\sqrt{3-t^2}} = \left(\frac{t^2}{3}-1\right)dv = -\frac{dv}{v^2+1}.$$

Po dosazení dostaneme

$$\mathcal{K}_2 = -\frac{1}{3}\int\frac{\frac{dv}{v^2+1}}{1+\frac{v^2}{v^2+1}} = -\frac{1}{3}\int\frac{dv}{2v^2+1} = -\frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{2}\,v =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}\,t}{\sqrt{3-t^2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}(x-1)}{\sqrt{2+2x-x^2}}.$$

Shrnutí těchto výsledků dává

$$\mathcal{I} = \arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}}-\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}(x-1)}{\sqrt{2+2x-x^2}}+C.$$

(f) Víme, že $D(f)=\mathbf{R}$, $f\in\mathbf{C}(\mathbf{R})$ a tedy $D(F)=\mathbf{R}$. Do integrálu

$$\mathcal{I} = \int\frac{dx}{(x^2+2)\,\sqrt{2x^2-2x+5}}$$

zavedeme nejdříve substituci

$$x = \frac{\alpha\,t+\beta}{t+1}\,,\ \ dx = \frac{(\alpha-\beta)\,dt}{(t+1)^2}\,,\ \ x^2+2 = \frac{t^2(\alpha^2+2)+t(2\alpha\beta+4)+\beta^2+2}{(t+1)^2}\,,$$

$$2x^2-2x+5 = \frac{t^2(2\alpha^2-2\alpha+5)+t(4\alpha\beta-2\alpha-2\beta+10)+2\beta^2-2\beta+5}{(t+1)^2}\,,\ \ t\neq -1.$$

Nyní položíme

$$2\alpha\beta+4=0 \qquad\qquad 4\alpha\beta-2\alpha-2\beta+10=0.$$

Z prvé rovnice dostaneme $\beta=-\frac{2}{\alpha}$ a dosazením do druhé rovnice kvadratickou rovnici $\alpha^2-\alpha-2=0$. Její kořeny jsou $\alpha_1=2\,,\alpha_2=-1$ s odpovídajícími hodnotami $\beta_1=-1\,,\beta_2=2$. Zvolme dvojici $\alpha=2\,,\beta=-1$ (volba $\alpha=-1\,,\beta=2$ vede ke stejnému výsledku, poněvadž dvojice substitucí $x=\frac{2-v}{1+v}\,,v=\frac{1}{t}$ je totéž jako substituce $x=\frac{2-\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t}}=\frac{2t-1}{t+1}$).Tedy

$$x = \frac{2t-1}{t+1}\,,\ \ dx = \frac{3\,dt}{(t+1)^2}\,,\ \ x^2+2 = 3\,\frac{2t^2+1}{(t+1)^2}\,,$$

$$2x^2 - 2x + 5 = 9\,\frac{t^2+1}{(t+1)^2}\,, \quad \begin{array}{ll} t > -1 & \text{pro } x < 2\,, \\ t < -1 & \text{pro } x > 2\,, \end{array} \qquad \text{tj. } \operatorname{sgn}(t+1) = \operatorname{sgn}(2-x).$$

Dosazením do integrálu $\mathcal{I}$ dostáváme

$$\mathcal{I} = 3\int \frac{\frac{dt}{(t+1)^2}}{3\,\frac{2t^2+1}{(t+1)^2}\,3\,\frac{\sqrt{t^2+1}}{|t+1|}} = \frac{1}{3}\int \frac{|t+1|dt}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{3}\,(\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2)\operatorname{sgn}(t+1).$$

$$\mathcal{I}_1 = \int \frac{t\,dt}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}} = \left| \begin{array}{l} t^2+1 = u^2\,; \quad t\,dt = u\,du \\ 2t^2+1 = 2u^2-1 \end{array} \right| = \int \frac{u\,du}{(2u^2-1)u} = \int \frac{du}{2u^2-1}.$$

Rozklad na parciální zlomky dává

$$\frac{1}{2v^2-1} = \frac{A}{\sqrt{2}\,u+1} + \frac{B}{\sqrt{2}\,u-1}$$

s řešením $A = -\frac{1}{2}\,,\ \ B = \frac{1}{2}$. Odtud plyne, že

$$\mathcal{I}_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\ln\left|\frac{\sqrt{2}\,u-1}{\sqrt{2}\,u+1}\right|.$$

Poněvadž

$$u = \sqrt{t^2+1}\,,\ \ t = \frac{1+x}{2-x}\,, \quad \text{platí} \quad u = \frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{|2-x|}$$

a odtud

$$\mathcal{I}_1 \cdot \operatorname{sgn}(t+1) = \operatorname{sgn}(2-x)\,\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\ln\left|\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)} - |2-x|}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)} + |2-x|}\right| =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\ln\left|\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)} - 2 + x}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)} + 2 - x}\right| = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\ln\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)} - 2 + x}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)} + 2 - x}$$

a tato funkce je spojitá v **R**.
Do integrálu

$$\mathcal{I}_2 = \int \frac{dt}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}$$

zavedeme Abelovu substituci

$$v = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,; \ \ dv = \frac{dt}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}\,; \ \ t^2 = \frac{v^2}{1-v^2} \ \text{ a odtud } \ \frac{t^2+1}{2t^2+1} = \frac{1}{1+v^2}.$$

Dosazením do

$$\mathcal{I}_2 = \int \frac{t^2+1}{2t^2+1} \cdot \frac{dt}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}} = \int \frac{dv}{1+v^2} = \operatorname{arctg} v =$$

$$= \operatorname{arctg}\,\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = \operatorname{arctg}\,\frac{\frac{1+x}{2-x}}{\sqrt{\frac{2x^2-2x+5}{(2-x)^2}}} = \operatorname{sgn}(2-x)\operatorname{arctg}\,\frac{1+x}{\sqrt{2x^2-2x+5}}.$$

Shrnutím dostaneme

$$\mathcal{I} = \frac{1}{6\sqrt{2}}\,\ln\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)} - 2 + x}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)} + 2 - x} + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1+x}{\sqrt{2x^2-2x+5}} + C\,, \quad x \in \mathbf{R}.$$

(g) Platí
$$\mathcal{I} = \int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}\, dx = \int \frac{(x^2+x+1)\, dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+x+1}}.$$
Racionální funkci v integrandu rozložíme na parciální zlomky:
$$\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2} = \frac{(x^2+2x+1)-(x+1)+1}{(x+1)^2} = 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}.$$
Odtud dostaneme, že
$$\mathcal{I} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} - \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} +$$
$$+ \int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+x+1}} = \mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3.$$
Poněvadž platí $\sqrt{x^2+x+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$, dostaneme
$$\mathcal{I}_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}} =$$
$$= \ln \frac{2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{3}} = \ln\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}\right) - \frac{1}{2}\ln 3.$$
Do integrálu $\mathcal{I}_2$ zavedeme substituci
$$x+1 = \frac{1}{t}\,,\ \ dx = -\frac{dt}{t^2}\,,\ \ x = \frac{1-t}{t}\,,\ \ x^2+x+1 = \frac{t^2-t+1}{t^2}$$
a tedy
$$-\mathcal{I}_2 = \int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t}\sqrt{t^2-t+1}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-t+1}} =$$
$$\ln \frac{2t-1+2\sqrt{t^2-t+1}}{\sqrt{3}} = \ln \frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{3}(x+1)}$$
(je $t = \frac{1}{x+1}$, tedy $2t-1 = \frac{1-x}{x+1}\Big)$. Užijeme-li stejnou substituci $x+1 = \frac{1}{t}$, dostaneme
$$\mathcal{I}_3 = -\int \frac{t\, dt}{\sqrt{t^2-t+1}} = A\sqrt{t^2-t+1} + \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-t+1}}.$$
Po zderivování a vynásobení $\sqrt{t^2-t+1}$ dostaneme $-2t = 2At - A + 2\lambda$ s řešením $A = -1\,,\ \ \lambda = -\frac{1}{2}$, tedy
$$\mathcal{I}_3 = -\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} - \frac{1}{2}\ln \frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{3}\,(x+1)}.$$
Shrnutím dostaneme
$$\mathcal{I} = \ln \frac{2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{3}} + \ln \frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{3}\,(x+1)} -$$

$$-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}-\frac{1}{2}\ln\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{3}\,(x+1)}+C=$$

$$=\ln\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}\right)+\frac{1}{2}\ln\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}+K,$$

kde $K=C-\frac{3}{4}\ln 3$. Výpočet platí pro $x+1>0$. Aby výsledek platil pro $x\neq -1$, stačí doplnit absolutní hodnotu kolem jmenovatele zlomku v logaritmu (srovnej výsledek příkladu 31 d)).

(h) Jestliže integrand upravíme, dostaneme

$$\mathcal{I}=\int x^4\sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx=\int\frac{x^4(\alpha^2-x^2)}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}\,dx$$

a můžeme tedy psát

$$\mathcal{I}=(Ax^5+Bx^3+Cx)\sqrt{\alpha^2-x^2}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}$$

(viz příklad 31 b)). Po zderivování a vynásobení výrazem $\sqrt{\alpha^2-x^2}$ dostaneme

$$\alpha^2x^4-x^4=(5Ax^4+3Bx^2+C)(\alpha^2-x^2)-(Ax^6+Bx^4+Cx^2)+\lambda.$$

Srovnáním koeficientů u stejných mocnin x dostaneme soustavu lineárních rovcnic

$$\begin{array}{rrrrrr} x^6: & -1= & -6A & & & \\ x^4: & \alpha^2= & 5\alpha^2A & -4B & & \\ x^2: & 0= & & 3\alpha^2B & -2C & \\ x^0: & 0= & & & -\alpha^2C & +\lambda, \end{array}$$

která má řešení

$$A=\frac{1}{6}\,,\quad B=-\frac{\alpha^2}{24}\,,\quad C=-\frac{\alpha^4}{16}\,,\quad \lambda=-\frac{\alpha^6}{16}.$$

Odtud plyne, že

$$\mathcal{I}=\frac{1}{48}\,(8x^5-2\alpha^2x^3-3\alpha^4x)\sqrt{\alpha^2-x^2}-\frac{\alpha^6}{16}\,\arcsin\frac{x}{\alpha}+C.$$

32. Vypočtěte $\int f(x)\,dx$, je-li

(a) $f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{x^2+4x+5}}$ $\quad\left[\frac{1}{3}(x^2-5x+20)\sqrt{x^2+4x+5}-\frac{15}{3}\ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right)\right]$

(b) $f(x)=\frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ $\quad\left[\frac{1}{6}\,(2x^2-5x+1)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)\right]$

(c) $f(x)=\frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}$ $\quad\left[\frac{1}{3}(x^2-14x+111)\sqrt{x^2+4x+3}-66\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\right|\right]$

(d) $f(x)=\frac{12x^3+16x^2+9x+2}{\sqrt{4x^2+4x+2}}$

$\quad\left[\frac{1}{8}(8x^2+6x+1)\sqrt{4x^2+4x+2}+\frac{1}{8}\ln\left(2x+1+\sqrt{4x^2+4x+2}\right)\right]$

(e) $f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}$ $\quad\left[4\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{6}(2x^2+5x+19)\sqrt{1+2x-x^2}\right]$

(f) $f(x)=\frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}}$ $\quad\left[\frac{1}{6}(2x^2+x+7)\sqrt{x^2+2x-1}-2\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-1}\right|\right]$

(g) $f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{x^2+x+1}}$ $\quad\left[\frac{1}{24}(8x^2-10x-1)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{7}{16}\ln\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}\right)\right]$

(h) $f(x)=\frac{x^4}{\sqrt{x^2+4x+5}}$

$\quad\left[\frac{1}{24}(6x^3-28x^2+95x-290)\sqrt{x^2+4x+5}+\frac{35}{8}\ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right)\right]$

(i) $f(x) = \frac{x^6}{\sqrt{x^2+1}}$ $\left[\frac{1}{48}(8x^5 - 10x^3 + 15x)\sqrt{x^2+1} - \frac{5}{16}\ \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right]$

(j) $f(x) = \frac{x^8}{\sqrt{x^2-1}}$ $\left[\frac{1}{384}(48x^7 + 56x^5 + 70x^3 + 105x)\sqrt{x^2-1} + \frac{35}{128}\ \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right|\right]$

33. Vypočtěte $\int f(x)\,dx$, je-li

(a) $f(x) = \frac{1}{x^3\sqrt{x^2+1}}$ $\left[\frac{1}{2}\left\{\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|} - \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\right\}\right]$

(b) $f(x) = \frac{1}{x^3\sqrt{1+2x+2x^2}}$ $\left[\frac{3x-1}{2x^2}\sqrt{2x^2+2x+1} - \frac{1}{2}\ \ln\frac{x+1+\sqrt{2x^2+2x+1}}{|x|}\right]$

(c) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3\sqrt{x^2-2x-1}}$ $\left[\frac{\sqrt{x^2-2x-1}}{4(x-1)^2} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ \arcsin\frac{\sqrt{2}}{|x-1|}\right]$

(d) $f(x) = \frac{x}{(x+1)\sqrt{1-x-x^2}}$ $\left[\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}} + \ln\frac{x+3+2\sqrt{1-x-x^2}}{|x+1|}\right]$

(e) $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}$ $\left[\sqrt{x^2-x+1} + \frac{3}{2}\ \ln\left(2x-1+2\sqrt{x^2-x+1}\right) - \ln\frac{2-x+2\sqrt{x^2-x+1}}{|x|}\right]$

(f) $f(x) = \frac{3x+2}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}$ $\left[3\ \ln\left(2x+3+2\sqrt{x^2+3x+3}\right) + \ln\frac{x+3+2\sqrt{x^2+3x+3}}{|x+1|}\right]$

(g) $f(x) = \frac{1}{(x^2+x-2)\sqrt{x^2+2x+3}}$ $\left[\frac{1}{3\sqrt{3}}\ \ln\frac{1-x+\sqrt{3(x^2+2x+3)}}{|x+2|} - \frac{1}{3\sqrt{6}}\ \ln\frac{\sqrt{2}(x+2)+\sqrt{3(x^2+2x+3)}}{|x-1|}\right]$

(h) $f(x) = \frac{x^3}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}$ $\left[2\ \arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{1+2x-x^2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\ \arcsin\frac{|x|\sqrt{2}}{x+1}\right]$

(i) $f(x) = \frac{x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x+1}}$ $\left[-\frac{1}{2}\left\{\ln\frac{x+1+2\sqrt{x^2-x+1}}{|x-1|} + \frac{1}{\sqrt{3}}\ \ln\frac{\sqrt{3}(1-x)+2\sqrt{x^2-x+1}}{|x+1|}\right\}\right]$

34. Vypočtěte $\int f(x)\,dx$, je-li

(a) $f(x) = \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}$ $\left[\ln\frac{\sqrt{x^2+2x+4}-1}{\sqrt{x^2+2x+4}+1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\ \mathrm{arctg}\,\frac{x+1}{\sqrt{2(x^2+2x+4)}}\right]$

(b) $f(x) = \frac{1}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$ $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ \mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{2}(1-x)} + \frac{1}{2\sqrt{6}}\ \ln\frac{\sqrt{3(x^2+x+1)}+\sqrt{2}(x+1)}{\sqrt{3(x^2+x+1)}-\sqrt{2}(x+1)}\right]$

(c) $f(x) = \frac{x+3}{(x^2+1)\sqrt{x^2+x+1}}$ $\left[2\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{2(x^2+x+1)}}{1-x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\ \ln\frac{\sqrt{2(x^2+x+1)}+x+1}{\sqrt{2(x^2+x+1)}-x-1}\right]$

(d) $f(x) = \frac{x}{(3x^2+2x+3)\sqrt{2x^2-x+2}}$ $\left[\frac{1}{4\sqrt{14}}\ \ln\frac{2\sqrt{2}\sqrt{2x^2-x+2}-\sqrt{7}(1-x)}{2\sqrt{2}\sqrt{2x^2-x+2}+\sqrt{7}(1-x)} - \frac{1}{2\sqrt{7}}\ \mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{7}(x+1)}{2\sqrt{2x^2-x+2}}\right]$

(e) $f(x) = x\sqrt{x^2-2x+2}$ $\left[\frac{1}{6}(2x^2-x+1)\sqrt{x^2-2x+2} + \frac{1}{2}\ \ln\left(x-1+\sqrt{x^2-2x+2}\right)\right]$

(f) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}$

$$\left[\sqrt{x^2+2x+2} + \ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right) - \sqrt{2}\ \ln\frac{2+x+\sqrt{2(x^2+2x+2)}}{|x|}\right]$$

1.5 Binomické integrály.