Sbírka úloh z matematické analýzy 1.

Čížek Jiří — Kubr Milan — Míková Marta

13. srpna 2007

Obsah

Kapitola 1

Posloupnosti.

1.1 Základní vlastnosti posloupností.

1. Najděte prvých 5 členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, je-li

   (a) $a_n = \frac{1}{2}\{1 + (-1)^n\}$ $[0, 1, 0, 1, 0]$

   (b) $a_n = n + (-1)^n$ $[0, 3, 2, 5, 4]$

   (c) $a_n = (-1)^n \cos \frac{\pi n^2}{n+1}$ $\left[0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\cos\frac{\pi}{5}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

   (d) $a_n = \frac{n!}{n^n}$ $\left[1, \frac{1}{2}, \frac{2}{9}, \frac{3}{32}, \frac{24}{625}\right]$

2. Najděte předpis pro $n-$tý člen posloupnosti, je-li

   (a) $\{8, 14, 20, 26, 32, \dots\}$ $[\,a_n = 2 + 6n\,]$

   (b) $\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots\}$ $\left[\,a_n = \frac{n+1}{n}\,\right]$

   (c) $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{32}, \dots\}$ $\left[\,a_n = \frac{n}{2^n}\,\right]$

   (d) $\{1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \frac{1}{5}, \dots\}$ $\left[\,a_{2n-1} = n\,, a_{2n} = \frac{1}{n+1}\,\right]$

3. Vyjádřete následující součty

$$\text{a)} \quad \sum_{k=1}^{n} k^p \ \text{ pro } \ p = 1, 2, 3\,; \qquad\qquad \text{b)} \quad \sum_{k=1}^{n} k\, q^k.$$

Řešení:

(a) Pro $p = 1$ dostaneme známý vzorec

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Buď nyní $p = 2$ a uvažme identitu

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1.$$

Postupným dosazováním za $x = 1, 2, \dots, n$ dostaneme

$$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1\,,$$

$$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1\,,$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$(n+1)^3 - n^3 = 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1$$

a sečtením těchto rovností dále

$$(n+1)^3 - 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n.$$

Využijeme-li identity $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, je vidět, že platí

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Pro $p = 3$ užijeme rovnosti

$$(x+1)^4 - x^4 = 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

a stejným postupem dostaneme

$$(n+1)^4 - 1 = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + n.$$

To po jednoduché úpravě dává

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left[\sum_{k=1}^{n} k\right]^2.$$

(b) Je-li $q = 1$, dostaneme předchozí případ ($p = 1$).
Buď tedy $q \neq 1$. Podle vzorce pro $n-$tý částečný součet geometrické posloupnosti platí

$$(1-q)\sum_{k=1}^{n} kq^k = \sum_{k=1}^{n} kq^k - \sum_{k=1}^{n} kq^{k+1} = \sum_{k=1}^{n} kq^k - \sum_{k=2}^{n+1}(k-1)q^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} q^k - nq^{n+1} = \frac{q(1-q^n)}{1-q} - nq^{n+1}.$$

Odtud snadno plyne, že

$$\sum_{k=1}^{n} kq^k = \frac{q(1-q^n)}{(1-q)^2} - \frac{nq^{n+1}}{1-q}.$$

4. Najděte předpis pro $n-$tý člen posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, je-li

(a) $a_{n+1} = a_n + d\,,\quad a_1, d$ daná čísla; $\quad \left[a_n = a_1 + (n-1)d\right]$

(b) $a_{n+1} = a_n \cdot q\,,\quad a_1, q$ daná čísla $\quad \left[a_n = a_1 \cdot q^{n-1}\right]$

(c) $a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, kde $b_{n+1} = b_n + d\,$, b_1, d jsou daná čísla; $\left[a_n = nb_1 + \frac{n(n-1)}{2}d\right]$

(d) $a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, kde $b_{n+1} = b_n \cdot q\,, b_1, q$ jsou daná čísla;
$\left[a_n = nb_1 \text{ pro } q = 1\,,\ a_n = b_1\frac{q^n-1}{q-1} \text{ pro } q \neq 1\right]$

(e) $a_1 = 1\,, a_{n+1} = (n+1)a_n$ $\quad \left[a_n = n!\right]$

5. Vyjádřete následující součty

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)$; $\quad \left[n^2\right]$

(b) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)$ $\left[\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right.$ užijte příkladu 3a)$\left.\right]$

(c) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ $\left[\frac{n}{n+1}\right]$

(d) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$ $\left[\frac{n}{3n+1}\right.$ v příkladech c) a d) užijte rozklad na parciální zlomky$\left.\right]$

6. Ukažte, že jsou následující posloupnosti omezené

$$\text{a)}\quad \left\{\frac{\sqrt{n^2+2}}{(n+3)(\sqrt{n}+1)}\right\}_{n=1}^{\infty}; \qquad \text{b)}\quad \left\{n(\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^4-n}\,)\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Řešení:

(a) Poněvadž platí $n^2+2 \le n^2+2n+1$, je $\sqrt{n^2+2} \le n+1$ a odtud

$$0 \le \frac{\sqrt{n^2+2}}{(n+3)(\sqrt{n}+1)} \le \frac{n+1}{(n+3)(\sqrt{n}+1)} \le \frac{1}{\sqrt{n}+1} \le 1.$$

(b) Nejdříve si $n-$tý člen dané posloupnosti upravíme. Platí

$$n(\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^4-n}) = \frac{n(n^4+n-n^4+n)}{n(\sqrt{n^4+n}+\sqrt{n^4-n})} = \frac{2n^2}{n(\sqrt{n^4+n}+\sqrt{n^4-n})}$$

a poněvadž

$$n(\sqrt{n^4+n}+\sqrt{n^4-n}) \ge \sqrt{n^4+n} \ge \sqrt{n^4} = n^2,$$

dostaneme

$$0 \le \frac{2n^2}{n(\sqrt{n^4+n}+\sqrt{n^4-n})} \le \frac{2n^2}{n^2} = 2.$$

7. Ukažte omezenost následujících posloupností

(a) $\left\{\frac{4n^2+1}{3n^2+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\left[0 \le a_n \le \frac{4}{3}\right.$, užijte rozkladu $\frac{4n^2+1}{3n^2+2} = \frac{4}{3} - \frac{5}{3(3n^2+2)}$;$\left.\right]$

(b) $\left\{\frac{2n^2-1}{2+n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $[0 \le a_n \le 2$; proveďte analogicky jako v předchozím příkladu$]$

(c) $\left\{\frac{1-n}{\sqrt{n^2+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\left[-1 \le a_n \le 0\right.$ užijte odhadu $\sqrt{n^2+1} \ge n\left.\right]$

(d) $\left\{\sqrt{n^2+1}-n\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\left[0 \le a_n \le \frac{1}{2}\right.$; užijte postupu z příkladu 6b) $\left.\right]$

(e) $\left\{\frac{2^n+1}{3^n-2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\left[0 \le a_n \le 4\right.$; využijte odhadů $2^n+1 \le 2^{n+1}$, $3^n-2 \ge 3^{n-1}\left.\right]$

Poznámka: Dané odhady je možno zlepšit, potřebujeme však využít monotonie daných posloupností. Platí

a) $1 \le a_n < \dfrac{4}{3}$; b) $\dfrac{1}{3} \le a_n < 2$; c) $-1 < a_n \le 0$; d) $0 < a_n \le \sqrt{2}-1$; e) $0 < a_n \le 3$.

8. Ukažte, že jsou následující posloupnosti monotonní, počínaje jistým indexem n_0.

$$\text{a)}\quad \left\{\frac{4^{n-1}+3^{n-1}}{4^n+3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}; \qquad \text{b)}\quad \left\{\frac{(3n+1)^2}{3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}; \qquad \text{c)}\quad \{n\,q^n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Řešení:

(a) Vydělením čitatele i jmenovatele výrazem 4^{n-1} dostaneme

$$\frac{4^{n-1}+3^{n-1}}{4^n+3^n}=\frac{1+\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{4+3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}=\frac{1+q^{n-1}}{4+3q^{n-1}}\qquad\left(q=\frac{3}{4}\right).$$

Ukážeme, že tato posloupnost je klesající tj.

$$\frac{1+q^n}{4+3q^n}<\frac{1+q^{n-1}}{4+3q^{n-1}}.$$

Po jednoduché úpravě dostaneme $q^n<q^{n-1}$ neboli $q<1$ a stačí zvolit $n_0=1$.

(b) Jestliže vyjdeme z předpokladu, že daná posloupnost je opět klesající, dostaneme nerovnost

$$\frac{(3n+1)^2}{3^n}>\frac{(3n+4)^2}{3^{n+1}},$$

která je ekvivalentní s nerovností

$$18n^2-6n-13>0.$$

Tato nerovnost je splněna pro $n\geq 2$, tedy $n_0=2$.

(c) Ukážeme opět, že daná posloupnost je klesající, tedy

$$(n+1)q^{n+1}<nq^n\ \text{ a odtud }\ q<\frac{n}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}.$$

Řešením této nerovnosti vzhledem k n dostaneme

$$n+1>\frac{1}{1-q},\ \text{ tedy }\ n_0=\left[\frac{1}{1-q}\right],$$

kde hranaté závorky značí tzv. celou část daného čísla, neboli takové celé číslo k, pro něž platí nerovnosti

$$k\leq\frac{1}{1-q}<k+1.$$

9. Ukažte, že jsou následující posloupnosti monotonní, počínaje jistým indexem n_0.

(a) $\left\{\frac{n+1}{2n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ [klesající, $n_0=1$]

(b) $\left\{\frac{1-n}{\sqrt{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ [klesající, $n_0=1$]

(c) $\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\left[\text{klesající, } n_0=1;\ \text{upravte } \sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right]$

(d) $\left\{\frac{2^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ [rostoucí, $n_0=2$]

(e) $\{2^n-100n\}_{n=1}^{\infty}$ [rostoucí, $n_0=7$]

(f) $\{n^3-6n^2\}_{n=1}^{\infty}$ [rostoucí, $n_0=7$; pro $n\geq 7$ je $n^3-6n^2=n^2(n-6)$ součinem dvou posloupností kladných čísel. Je možno volit $n_0=4$, ale ověření je delší]

(g) $\left\{\frac{n^3}{n^2-3}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\Big[$rostoucí, $n_0=3$; pro $n\geq 2$ je $\frac{n^3}{n^2-3}<\frac{(n+1)^3}{(n+1)^2-3}$ právě když $n^4+2n^3-8n^2-9n-3>0$. Ale $n^4+2n^3-8n^2-9n-3=(n-3)(n^3+5n^2+7n+12)+33.\Big]$

(h) $\left\{\frac{n^2}{n^3+32}\right\}_{n=1}^{\infty}$ [klesající, $n_0=4$; proveďte analogicky jako v předchozím příkladu]

1.2 Limita posloupnosti.

1. Užitím definice limity posloupnosti ukažte, že

$$\text{a)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}\,;\ \text{b)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{1-2^{n+1}}{1+2^n}=-2\,;\ \text{c)}\ \lim_{n\to\infty}10^{\sqrt{n}}=+\infty\,;\ \text{d)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n}{n+1}=+\infty.$$

Řešení:

(a) Máme ukázat, že ke každému $\varepsilon>0$ existuje index $n_0\in\mathbf{N}$ tak, že pro všechna $n\geq n_0$ platí

$$\left|a_n-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon \ \text{ neboli } \ \left|\frac{2n-2n-1}{2(2n+1)}\right|<\varepsilon.$$

Odtud dostaneme nerovnost $\frac{1}{2(2n+1)}<\varepsilon$, jejímž řešením je $n>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\varepsilon}-1\right)$. Stačí tedy volit

$$n_0=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\varepsilon}-1\right)\right]+1 \ \text{ pro } \ \varepsilon\in\left(0,\frac{1}{2}\right\rangle \ \text{ a } \ n_0=1 \ \text{ pro } \ \varepsilon>\frac{1}{2}.$$

(b) Je

$$\left|\frac{1-2^{n+1}}{1+2^n}+2\right|=\frac{1-2^{n+1}+2+2^{n+1}}{1+2^n}=\frac{3}{1+2^n}<\varepsilon.$$

Řešením této nerovnice je pro $\varepsilon\in\left(0,\frac{3}{2}\right\rangle$ $\ n>\log_2\left(\frac{3}{\varepsilon}-1\right)$ a stačí volit

$$n_0=\left[\log_2\left(\frac{3}{\varepsilon}-1\right)\right]+1.$$

(c) Podle definice

$$\forall K>0\ \exists n_0\in\mathbf{N} \ \text{ tak, že } \ \forall n\geq n_0 \ \text{ platí } \ 10^{\sqrt{n}}>K,$$

neboli $n>\log^2 K$ a stačí volit

$$n_0=\left[\log^2 K\right]+1 \ \text{ pro } \ K\geq 1.$$

(d) Buď $K>0$ libovolné. Jestliže využijeme odhadu $n^2-2n>(n+1)(n-3)$, dostaneme $\frac{n^2-2n}{n+1}>n-3>K$ a stačí volit $n_0=[\,K+4\,]$.

2. Užitím definice limity posloupnosti ukažte, že

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1$ $\qquad\left[\,n_0=\left[\,\frac{2}{\varepsilon}-1\,\right]\,\right]$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n-3}{n^2}=0$ $\qquad\left[\,n_0=\left[\,\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\,\right]+1\,;\ \text{užijte odhadu } |(-1)^n-3|\leq 4.\right]$

3. Ukažte, že platí

a) $\lim\limits_{n\to\infty}n^r=+\infty\,, r\in\mathbf{R},\ r>0\,;$ $\qquad$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0\,,\ |q|<1\,;$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=+\infty\,,\ a>1\,;$ $\qquad$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\,,\ a>0\,;$ $\qquad$ e) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

Řešení:

(a) Buď $K > 0$ libovolné, $r > 0$. Potom je nerovnost $n^r > K$ ekvivalentní s nerovností $n > K^{1/r}$ a stačí volit
$$n_0 = \left[K^{\frac{1}{r}} \right] + 1.$$

(b) Buď $\varepsilon > 0$ a nechť $|q^n - 0| = |q|^n < \varepsilon$. Logaritmováním této nerovnosti dostaneme
$$n \log|q| < \log\varepsilon\,, \text{ tedy } n > \frac{\log\varepsilon}{\log|q|} \quad (\text{je } |q| < 1\,)$$
a stačí volit
$$n_0 = \left[\frac{\log\varepsilon}{\log|q|} \right] + 1.$$

(c) Nechť $K > 0$ je libovolné. Zlogaritmováním nerovnosti $a^n > K$ dostaneme $n > \frac{\log K}{\log a}$ (je $a > 1$) a stačí volit
$$n_0 = \left[\frac{\log K}{\log a} \right] + 1.$$

(d) Pro $a = 1$ je tvrzení zřejmé. Předpokládejme nyní, že $a > 1$. Potom je $\sqrt[n]{a} > 1$ a můžeme psát $\sqrt[n]{a} = 1 + h_n$, kde $h_n > 0$. Odtud plyne, že
$$a = (1 + h_n)^n \geq 1 + nh_n > nh_n \text{ a tedy } 0 < h_n < \frac{a}{n}.$$
Poněvadž je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0$, platí, že $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$ a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.
Pro $0 < a < 1$ je
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b}} = 1 \quad (b > 1).$$

(e) Označme $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$, kde $h_n > 0$. Potom platí
$$n = (1 + h_n)^n \geq 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2} h_n^2$$
a tedy
$$h_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \longrightarrow 0 \text{ pro } n \to \infty.$$
Odtud plyne, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

4. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, je-li

a) $a_n = \alpha_k n^k + \alpha_{k-1} n^{k-1} + \cdots + \alpha_1 n + \alpha_0\,,\ k \in \mathbf{N}\,,\ \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbf{R}\,,\ \alpha_k \neq 0\,;$

b) $a_n = (n+1)^\alpha - n^\alpha\,,\quad 0 < \alpha < 1\,;$

c) $a_n = \dfrac{a^n}{1 + a^{2n}}\,,\ a \in \mathbf{R}\,;$

d) $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{8} - 1}{\sqrt[n]{16} - 1}\,;$

e) $a_n = \sqrt[n]{b_1^n + b_2^n + \cdots + b_k^n}\,,\ b_j \geq 0$ pro $j = 1, 2, \ldots, k.$

Řešení:

(a) Platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^k \left\{\alpha_k + \frac{\alpha_{k-1}}{n} + \cdots + \frac{\alpha_1}{n^{k-1}} + \frac{\alpha_0}{n^k}\right\}.$$

Protože je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{k-1}}{n} = \cdots = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_1}{n^{k-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_0}{n^k} = 0 \text{ a } \lim_{n\to\infty} n^k = +\infty,$$

je hledaná limita rovna $+\infty$, je-li $\alpha_k > 0$ a $-\infty$ pro $\alpha_k < 0$.

(b) Je

$$0 < (n+1)^\alpha - n^\alpha = n^\alpha \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right\} < n^\alpha \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1\right\} = n^{\alpha-1} \longrightarrow 0$$

pro $n \to \infty$, (je $0 < \alpha < 1$).

(c) i. Buď $a > 1$. Potom vydělením čitatele i jmenovatele výrazem a^{2n} dostaneme, že

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a^n}}{\frac{1}{a^{2n}} + 1} = 0.$$

ii. Pro $a = 1$ je zřejmě $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

iii. Je-li $|a| < 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

iv. Pro $a = -\frac{1}{2}$ je $a_{2n} = \frac{1}{2}$, $a_{2n-1} = -\frac{1}{2}$. tedy hledaná limita neexistuje.

v. Je-li $a < -1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} |a^n| = \lim\limits_{n\to\infty} |a|^n = +\infty$ a podle bodu i. je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(d) Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{16}-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{2}-1)(\sqrt[n]{4}+\sqrt[n]{2}+1)}{(\sqrt[n]{2}-1)(\sqrt[n]{8}+\sqrt[n]{4}+\sqrt[n]{2}+1)} = \frac{3}{4}.$$

[Využíváme vzorce pro $a^3 - b^3$ a $a^4 - b^4$.]

(e) Označme $B = \max\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$. Potom platí $B \le a_n \le \sqrt[n]{B^n + \cdots + B^n} = B\sqrt[n]{k}$. Protože je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = 1, \text{ dostaneme } \lim_{n\to\infty} a_n = B.$$

5. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, je-li

(a) $a_n = \frac{n}{3n+2}$ [$\frac{1}{3}$]

(b) $a_n = \frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}$ [$\frac{1}{3}$]

(c) $a_n = \frac{n-3}{n^2-n}$ [0]

(d) $a_n = \frac{n^3+27}{n^4-15}$ [0]

(e) $a_n = \frac{5n^8-n^7+1}{2-8n^8}$ [$-\frac{5}{8}$]

(f) $a_n = \frac{n^3+n}{n^2+3n-2}$ [$+\infty$]

(g) $a_n = \frac{(n+3)^3}{1-n-5n^2}$ [$-\infty$]

(h) $a_n = \frac{(2n+1)(n-3)}{(n+2)(n+4)}$ [2]

(i) $a_n = \frac{(n+5)^3-n(n+7)^2}{n^2-1}$ [1]

(j) $a_n = \frac{(n+10)^2-(3n+1)^2}{(n+6)^3-(n+1)^3}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

(k) $a_n = \frac{n^2}{n+3} - \frac{n^2}{n+2}$ $[-1]$

(l) $a_n = \frac{n^2+1}{2n+1} - \frac{3n^2+1}{6n+1}$ $\left[-\frac{1}{6}\right]$

(m) $a_n = \frac{3^n-1}{3^n+1}$ $[1]$

(n) $a_n = \frac{3^{n+1}+4^{n+1}}{3^n+4^n}$ $[4]$

(o) $a_n = \frac{5\cdot 2^n-3\cdot 5^{n+1}}{100\cdot 2^n+2\cdot 5^n}$ $\left[-\frac{15}{2}\right]$

(p) $a_n = \frac{(-1)^n 6^n-5^{n+1}}{5^n-(-1)^{n+1}6^{n+1}}$ $\left[\frac{1}{6}\right]$

Poznámka:

V úlohách a)-h) vydělte čitatele i jmenovatele nejvyšší mocninou ve jmenovateli;

v úlohách i)-l) upravte čitatele i jmenovatele nebo zlomky sečtěte a pak pokračujte podle návodu k příkladům a)-h);

v úlohách m)-p) vydělte čitatele i jmenovatele postupně $3^n, 4^n, 5^n, (-6)^n$.

6. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, je-li

(a) $a_n = \frac{(n+1)!+(n+2)!}{(n+3)!}$ $[0]$

(b) $a_n = \frac{n(n+3)!+(n+2)!}{(n+4)!}$ $[1]$

(c) $a_n = \frac{n!}{(n+1)!-n!}$ $[0]$

(d) $a_n = \frac{\binom{n}{k}}{n^k}$, $k \in \mathbf{N}$ $\left[\frac{1}{k!}\right.$; užijte definice faktoriálu a kombinačního čísla$\left.\right]$

(e) $a_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2}$ $\left[-\frac{1}{2}\right.$; sečtěte $1+2+\cdots+n\left.\right]$

(f) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ $\left[1\right.$; rozložte $\frac{1}{k(k+1)}$ na parciální zlomky$\left.\right]$

(g) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ $\left[\frac{1}{2}\right.$; rozložte $\left.\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\right]$

(h) $a_n = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} k$ $\left[\frac{1}{2}\right.$; sečtěte $\left.\sum\limits_{k=1}^{n} k\right]$

(i) $a_n = \frac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$ $\left[\frac{1}{3}\right.$; sečtěte $\left.\sum\limits_{k=1}^{n} k^2\right]$

(j) $a_n = \frac{\sum_{j=1}^{n}(2j-1)}{\sum_{k=1}^{n} k}$ $[2$; sečtěte čitatele i jmenovatele$]$

(k) $a_n = \frac{1+a+\cdots+a^n}{1+b+\cdots+b^n}$, $|a|<1$, $|b|<1$ $\left[\frac{1-b}{1-a}\right.$; užijte vlastností geometrické posloupnosti$\left.\right]$

(l) $a_n = \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\ldots\sqrt[2^n]{2}$ $[2$; vynásobte příslušné mocniny o stejném základu$]$

(m) $a_n = \frac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{4}-1}$ $\left[\frac{1}{2}\right.$; užijte vzorce $\left.a^2-b^2\right]$

(n) $a_n = \frac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{2}-1}$ $[3$; užijte vzorce $a^3-b^3]$

7. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, je-li

a) $a_n = \sqrt{3n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-4})$;

b) $a_n = n - \sqrt[3]{n^3 - n^2}$;

c) $a_n = \dfrac{n^3}{3}\left(\sqrt[3]{1 + \dfrac{3}{n^3}} - 1\right)$;

d) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1} - n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$;

e) $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}}$;

f) $a_n = n^{3/2}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} - 2\sqrt{n}\right)$;

g) $a_n = \dfrac{3\sqrt[n]{16} - 4\sqrt[n]{8} + 1}{(\sqrt[n]{2} - 1)^2}$;

h) $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{n^4} + 2\sqrt[n]{n^2} - 3}{\sqrt[n]{n^2} - 3\sqrt[n]{n} + 2}$;

i) $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{2n^3+1}{3n^2-2}}$;

j) $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{n^2+4^n}{n+5^n}}$.

Řešení:

(a) Doplníme-li výraz v závorce na rozdíl čtverců, dostaneme

$$a_n = \frac{\sqrt{3n}(n+2-n+4)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-4}} = \frac{6\sqrt{3}\sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-4}}.$$

Vydělením čitatele i jmenovatele $\sqrt{n}$ (nejvyšší mocnina ve jmenovateli) dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}} + \sqrt{1-\frac{4}{n}}} = 3\sqrt{3}.$$

(b) Využitím vzorce $a^3 - b^3$ ($a = n$, $b = \sqrt[3]{n^3 - n^2}$) můžeme přepsat a_n do tvaru

$$a_n = \frac{n^3 - n^3 + n^2}{n^2 + n\sqrt[3]{n^3 - n^2} + \sqrt[3]{(n^3 - n^2)^2}}$$

a po vydělení čitatele i jmenovatele n^2 dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \sqrt[3]{1-\frac{1}{n}} + \sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}} = \frac{1}{3}.$$

(c) Je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{3}\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^3}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{3}\left(\sqrt[3]{n^3+3} - n\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{3\left(\sqrt[3]{(n^3+3)^2} + n\sqrt[3]{n^3+3} + n^2\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{n^3}\right)^2} + \sqrt[3]{1+\frac{3}{n^3}} + 1} = \frac{1}{3},$$

jestliže využijeme opět rozkladu $a^3 - b^3$ a pak čitatele i jmenovatele vydělíme n^2.

(d) Platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1-n^2)(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(n+1-n)(\sqrt{n^2+1} + n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n^2+1} + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + 1} = 0,$$

jestliže doplníme nejdříve čitatele i jmenovatele na rozdíl čtverců a pak vydělíme čitatele i jmenovatele n (opět nejvyšší mocnina ve jmenovateli).

(e) Doplněním čitatele na rozdíl $a^3 - b^3$ a jmenovatele na $a^4 - b^4$ dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\left(\sqrt[4]{(n+1)^3} + \sqrt[4]{n(n+1)^2} + \sqrt[4]{n^2(n+1)} + \sqrt[4]{n^3}\right)}{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{(n+1)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-\left(\sqrt[12]{\frac{(n+1)^9}{n^8}} + \sqrt[12]{\frac{(n+1)^6}{n^5}} + \sqrt[12]{\frac{(n+1)^3}{n^2}} + \sqrt[12]{n}\right)}{1 + \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} + \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}} = -\infty\,,$$

jestliže čitatele i jmenovatele vydělíme $n^{2/3}$ a uvážíme, že jmenovatel má limitu 3 a čitatel $-\infty$.

(f) Doplněním výrazu v závorce na rozdíl čtverců ($a = \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$, $b = 2\sqrt{n}$) dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} n^{3/2}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} - 2\sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}\left(n+1+n-1+2\sqrt{n^2-1}-4n\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}+2\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2(\sqrt{n^2-1}-n)n^{3/2}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}+2\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^{3/2}(-1)}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}+2\sqrt{n})(\sqrt{n^2-1}+n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}} + 2\right)\left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} + 1\right)} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}\,,$$

jestliže čitatele i jmenovatele vydělíme $n^{3/2}$.

(g) Jestliže označíme $\sqrt[n]{2} = t$, můžeme psát

$$a_n = \frac{3t^4 - 4t^3 + 1}{(t-1)^2} = \frac{(t-1)^2(3t^2+2t+1)}{(t-1)^2}$$

a tedy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(3\sqrt[n]{4} + 2\sqrt[n]{2} + 1\right) = 6.$$

(h) Zavedeme-li označení $\sqrt[n]{n} = t$, je možno a_n přepsat do tvaru

$$a_n = \frac{t^4 + 2t^2 - 3}{t^2 - 3t + 2} = \frac{(t^2-1)(t^2+3)}{(t-1)(t-2)} = \frac{(t+1)(t^2+3)}{t-2} = \frac{(\sqrt[n]{n}+1)(\sqrt[n]{n^2}+3)}{\sqrt[n]{n}-2}$$

a odtud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -8$.

(i) Poněvadž je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3+1}{3n^2-2} = +\infty$, existuje index n_1 tak, že pro všechna $n \geq n_1$ platí $\frac{2n^3+1}{3n^2-2} \geq 1$. Na druhé straně

$$\frac{2n^3+1}{3n^2-2} = \frac{2}{3}n + \frac{\frac{4}{3}n+1}{3n^2-2}$$

a vzhledem k tomu, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{3}n+1}{3n^2-2} = 0$, existuje index n_2 tak, že pro všechna $n \geq n_2$ je $\frac{2n^3+1}{3n^2-2} \leq n$. Odtud pro $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ platí

$$1 \leq \sqrt[n]{\frac{2n^3+1}{3n^2-2}} \leq \sqrt[n]{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \ \text{ a tedy } \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

(j) Je zřejmé, že platí
$$\left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{4^n}{5^n} \le \frac{n^2+4^n}{n+5^n}\,.$$
Na druhé straně vzhledem k nerovnosti $n^2 \le 4^n$ platné pro $n \in \mathbf{N}$, můžeme psát
$$\frac{n^2+4^n}{n+5^n} \le \frac{n^2+4^n}{5^n} \le 2\left(\frac{4}{5}\right)^n\,.$$
Poněvadž
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{4}{5}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2\left(\frac{4}{5}\right)^n} = \frac{4}{5}\,,\ \text{ je i } \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{5}\,.$$

8. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, je-li

(a) $a_n = \frac{2n+3}{\sqrt[4]{81n^4+n^3}}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

(b) $a_n = \frac{3n-1}{\sqrt{6n^2+2n-5}}$ $\left[\sqrt{\frac{3}{2}}\right]$

(c) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n-2}$ $[0]$

(d) $a_n = \frac{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}}{n+2+\sqrt{n+1}}$ $[0]$

(e) $a_n = 6^{\frac{\sqrt{n}}{n+3}}$ $[1]$

v příkladech a)-e) vydělte čitatele i jmenovatele nejvyšší mocninou ve jmenovateli

(f) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ $[0]$

(g) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

(h) $a_n = 3n - \sqrt{9n^2-10n+1}$ $\left[\frac{5}{3}\right]$

(i) $a_n = \sqrt[3]{n^3+n^2+5} - n$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

(j) $a_n = \frac{1}{n(\sqrt{n^2-1}-n)}$ $[-2]$

(k) $a_n = \frac{2n-\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{n^2+3}-n}$ $\left[\frac{1}{6}\right]$

(l) $a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n^3+1}-n\sqrt{n}}$ $[+\infty]$

v příkladech f)-l) doplňte rozdíly na a^2-b^2 nebo a^3-b^3

(m) $a_n = \log_4(\sqrt{n^2+1}+n)^2 - \log_4\sqrt[3]{n^6+1}$ [1 ; využijte vlastností logaritmů]

(n) $a_n = \sqrt[n]{n^2}$ [1 ; využijte vyjádření $n^2 = n \cdot n$]

(o) $a_n = \sqrt[3n]{n}$ [1 ; využijte odhadu $1 \le n^{1/3} \le n$]

(p) $a_n = \sqrt[n]{n^3+3n}$ [1 ; užijte odhadu $n^3 \le n^3+3n \le 4n^3$]

(q) $a_n = \sqrt[2n]{n^2-1}$ [1 ; užijte odhadu $n \le n^2-1 \le n^2\ \ \forall\, n \ge 2$]

(r) $a_n = \sqrt[n]{2^n \cdot n^2 + 2n - 1}$ [2 ; užijte odhadu $2^n \cdot n^2 \le 2^{\cdot} n^2 + 2n - 1 \le 2^{n+1} \cdot n^2$]

(s) $a_n = \sqrt[n]{\frac{5n+1}{n+5}}$ [1 ; užijte odhadu $1 \le \frac{5n+1}{n+5} \le 5$]

9. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, je-li

(a) $a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^5$ $[1]$

(b) $a_n = \left(\frac{a}{n}\right)^n$; $a \in \mathbf{R}$ $[0]$

(c) $a_n = \left(\frac{2n+3}{n^2}\right)^n$ $[0]$

(d) $a_n = \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{\frac{n-1}{n+1}}$ $[\,1\,]$

(e) $a_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{\frac{1-\sqrt{n}}{1-n}}$ $[\,1\,]$

(f) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$ $\left[\,e^2\,\right]$

(g) $a_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}$ $[\,\sqrt{e}\,]$

(h) $a_n = \left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{n}$; $k \in \mathbf{N}$ $[\,e\,]$

(i) $a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$ $\left[\,e^{-1}\,\right]$

(j) $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}$ $\left[\,e^{-2}\,\right]$

Kapitola 2

Číselné řady.

2.1 Základní vlastnosti řad.

1. Napište součet prvých pěti členů řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, je-li

   (a) $a_n = \frac{k}{2k+1}$ $\left[\, \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \frac{4}{9} + \frac{5}{11} = \frac{7141}{3465} \,\right]$

   (b) $a_n = \frac{k+1}{k \cdot 2^k}$ $\left[\, 1 + \frac{3}{8} + \frac{1}{6} + \frac{5}{64} + \frac{3}{80} = \frac{1591}{960} \,\right]$

   (c) $a_n = \frac{k+1}{k!}$ $\left[\, 4 + \frac{5}{2} + 1 + \frac{7}{24} + \frac{1}{15} = \frac{943}{120} \,\right]$

   (d) $a_n = \frac{2k}{(2k)!!}$, kde $(2k)!! = 2 \cdot 4 \dots (2k-2)(2k)$ $\left[\, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{384} = \frac{633}{384} \,\right]$

   (e) $a_n = \frac{(-1)^{k-1}}{k+1}$ $\left[\, \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{23}{60} \,\right]$

   (f) $a_n = \frac{4+(-1)^k}{k+3}$ $\left[\, \frac{3}{4} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{5}{7} + \frac{3}{8} = \frac{187}{56} \,\right]$

2. Najděte předpis pro obecný člen následujících řad

   (a) $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{8} + + \frac{1}{5\sqrt{5}} + \dots$ $\left[\, a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \,\right]$

   (b) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ $\left[\, a_n = \frac{1}{2^{n-1}} \,\right]$

   (c) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} - \dots$ $\left[\, a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \,\right]$

   (d) $\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} - \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{10 \cdot 11} - \dots$ $\left[\, a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n+1)} \,\right]$

   (e) $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} + \dots$ $\left[\, a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \,\right]$

3. Najděte posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ částečných součtů řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, rozhodněte o její konvergenci a najděte její součet s , je-li

   a) $a_n = (-1)^{n-1}$; b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; c) $a_n = \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;

   d) $a_n = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+5)}$; e) $a_n = \dfrac{n - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$; f) $a_n = \dfrac{1}{n!(n+2)}$;

   g) $a_n = \dfrac{3^n + 2^n}{6^n}$; h) $a_n = nq^{n-1}$, $q \in \mathbf{R}$; i) $a_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$, $n \geq 2$.

Řešení:

(a) Je vidět, že $s_1 = 1\,,\ s_2 = 0\,,\ s_3 = 1\,,\ s_4 = 0\,, \dots,$ tedy $s_{2n-1} = 1\,,\ s_{2n} = 0$. Odtud plyne, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ neexistuje a řada osciluje.

(b) Platí

$$s_n = \left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\cdots+\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)+\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \sqrt{n+1}-1.$$

Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$ a řada diverguje.

(c) Jestliže a_n rozložíme na parciální zlomky, dostaneme

$$a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Odtud

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right\} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

a tedy

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \lim_{n\to\infty} s_n = 1.$$

(d) Rozkladem a_n na parciální zlomky dostaneme

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+5)} = \frac{1}{6}\left\{\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+5}\right\}$$

a tedy

$$s_n = \frac{1}{6}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{13}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-7}-\frac{1}{2n-1}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2n-5}-\frac{1}{2n+1}\right)+\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n+3}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+5}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{6}\left\{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}\right\}.$$

Odtud

$$s = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+5)} = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{23}{90}.$$

(e) a_n přepíšeme nejdříve do tvaru

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}} - \frac{\sqrt{(n-1)(n+1)}}{\sqrt{n(n+1)}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} - \sqrt{\frac{n-1}{n}}.$$

Z tohoto vyjádření plyne, že

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\left\{\sqrt{\frac{k}{k+1}} - \sqrt{\frac{k-1}{k}}\right\} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \ \text{ a tedy } \ \lim_{n\to\infty} s_n = 1.$$

(f) Jestliže a_n přepíšeme do tvaru

$$a_n = \frac{n+1}{(n+2)!} = \frac{n+2-1}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}\,,$$

je zřejmé, že

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)!} \text{ a } s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{2}.$$

(g) Užitím vlastností geometrické posloupnosti dostaneme

$$s_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right).$$

Odtud plyne, že $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{3}{2}$.

(h) Podle cvičení 1.1.3b) je

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{n} kq^k = \frac{1-q^n}{(1-q)^2} - \frac{nq^n}{1-q} \text{ pro } q \neq 1$$

$$\text{a } s_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ pro } q = 1.$$

Je-li nyní $|q| < 1$, pak

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{(1-q)^2},$$

poněvadž $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0$.

Pro $q = 1$ je zřejmě $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$ a daná řada diverguje.

Je-li $q > 1$, potom

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n-nq^n(1-q)}{(1-q)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+q^n(nq-1-n)}{(1-q)^2} = +\infty$$

a řada opět diverguje.

Pro $q \leq -1$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+q^n(nq-1-n)}{(1-q)^2}$$

neexistuje a daná řada osciluje.

(i) Je

$$a_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln\frac{n^2-1}{n^2} = \ln(n-1) - 2\ln n + \ln(n+1)$$

a tedy

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} \{\ln(k-1) - 2\ln k + \ln(k+1)\} = -\ln 2 + \ln(n+1) - \ln n = \ln\frac{n+1}{n} - \ln 2$$

a odtud $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\ln 2$.

4. Najděte posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ částečných součtů řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, rozhodněte o její konvergenci a najděte její součet s, je-li

(a) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ $\left[s_n = 1 - \frac{1}{n+1}\,,\ s = 1 \right]$

(b) $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ $\left[s_n = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{1}{2n+1}\right\}\,,\ s = \frac{1}{2} \right]$

(c) $a_n = \frac{1}{16n^2-8n-3}$ $\left[s_n = \frac{1}{4}\left\{1 - \frac{1}{4n+1}\right\}\,,\ s = \frac{1}{4} \right]$

(d) $a_n = \frac{1}{n^2-1}\,,\ n \geq 2$ $\left[s_n = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right\}\,,\ s = \frac{3}{4} \right]$

ve cvičeních a)-d) užijte rozkladu a_n na parciální zlomky

(e) $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ $\left[s_n = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}\,,\ s = \frac{1}{4}\,;\right.$

užijte rozkladu $\left. a_n = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}\right]$

(f) $a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$ $\left[s_n = \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{3\cdot 5} - \frac{1}{(2n+3)(2n+5)}\right\}\,,\ s = \frac{1}{60}\,;\right.$

užijte rozkladu $\left. a_n = \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{1}{(2n+3)(2n+5)}\right\}\right]$

(g) $a_n = \frac{1}{16n^2-8n-15}$ $\left[s_n = \frac{1}{8}\left\{-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3}\right\}\,,\ s = -\frac{1}{12} \right]$

(h) $a_n = \frac{1}{(c+n)(c+n+3)}\,;\ -c \neq n \in \mathbf{N}$

$\left[s_n = \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{c+1} + \frac{1}{c+2} + \frac{1}{c+3} - \frac{1}{c+n+1} - \frac{1}{c+n+2} - \frac{1}{c+n+3}\right\}\,,\ s = \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{c+1} + \frac{1}{c+2} + \frac{1}{c+3}\right\} \right]$

v příkladech g) a h) užijte rozkladu a_n na parciální zlomky

(i) $a_n = \frac{2}{5^n}$ $\left[s_n = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{1}{5^n}\right\}\,,\ s = \frac{1}{2} \right]$

(j) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}$ $\left[s_n = \frac{3}{4}\left\{1 + \frac{(-1)^{n-1}}{3^n}\right\}\,,\ s = \frac{3}{4} \right]$

(k) $a_n = \frac{1}{2^{2n-2}}$ $\left[s_n = \frac{4}{3}\left\{1 - \frac{1}{2^{2n}}\right\}\,,\ s = \frac{4}{3} \right]$

(l) $a_n = \frac{1}{10^n} + \frac{2}{10^{n+1}} + \frac{5}{10^{n+2}}$ $\left[s_n = \frac{5}{36}\left\{1 - \frac{1}{10^n}\right\}\,,\ s = \frac{5}{36} \right]$

(m) $a_n = \frac{3}{2^{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{2\cdot 3^{n-1}}$ $\left[s_n = 6\left\{1 - \frac{1}{2^n}\right\} + \frac{3}{8}\left\{1 - \frac{(-1)^n}{3^n}\right\}\,,\ s = \frac{51}{8} \right]$

v příkladech i)-m) užijte vlastností geometrické posloupnosti

(n) $a_n = \frac{2n-1}{2^n}$ $\left[s_n = 3\left\{1 - \frac{1}{2^n}\right\} - \frac{n}{2^{n-1}}\,,\ s = 3\,;\right.$ užijte příkladu 1.1.3b)]

(o) $a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ [$s_n = \ln(n+1)$, řada diverguje]

(p) $a_n = \ln\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)\,;\ n \geq 2$ [$s_n = \ln(n+2) - \ln n - \ln 3\,,\ s = -\ln 3$]

ve cvičeních o) a p) užijte pravidel pro logaritmování součinu a podílu

5. Ukažte, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, je-li

a) $a_n = \dfrac{n+2}{\sqrt[3]{n^3+2n+4}}$ b) $a_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$ c) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ d) $a_n = \dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$

Řešení:

(a) Poněvadž je zřejmě

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{\sqrt[3]{1 + \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^3}}} = 1 \neq 0.$$

je řada divergentní.

(b) Platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^n = e^{-2}$$

a řada diverguje.

(c) Je sice $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, ale

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

a řada diverguje.

(d) Platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n} = 1.$$

Je totiž

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1 \text{ a } \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left\{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right\}^{\frac{1}{n}} = 1.$$

6. Ukažte, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, je-li

(a) $a_n = \frac{n+1}{2n-1}$ $\left[\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}\right]$

(b) $a_n = \sqrt{\frac{3n+4}{5n+1}}$ $\left[\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{\frac{3}{5}}\right]$

(c) $a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n+3}$ $\left[\lim\limits_{n\to\infty} a_n \text{ neexistuje}\right]$

(d) $a_n = \sqrt[n]{0,02}$ $\left[\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1\right]$

(e) $a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{\ln(n+1)}}$ $\left[\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1\right]$

(f) $a_n = \left(\frac{2n^2-3}{2n^2+1}\right)^{n^2}$ $\left[\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^{-2}\right]$

(g) $a_n = \frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n}}$ $\left[\text{využijte odhadu } a_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ a cvičení 5c)}\right]$

7. Pomocí Bolzano-Cauchyova kritéria rozhodněte o konvergenci řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, je-li

a) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ b) $a_n = \dfrac{1}{n}$

Řešení:

(a) Pro $n, p \in \mathbf{N}$ platí

$$|s_{n+p} - s_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2}.$$

Poněvadž je $\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, můžeme psát

$$|s_{n+p} - s_n| \leq \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) =$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \le \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

a daná řada konverguje.

(b) Platí

$$|s_{n+p} - s_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p} \ge \frac{p}{n+p},$$

jestliže každý zlomek nahradíme nejmenším tj. $\frac{1}{n+p}$. Odtud např. pro $p = n$ dostaneme

$$|s_{2n} - s_n| \ge \frac{1}{2} \ \text{ pro } \ \forall\, n \in \mathbf{N}$$

a daná řada diverguje.

8. Pomocí Bolzano-Cauchova kritéria rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, je-li

(a) $a_n = \frac{1}{2n+1}$; $\left[\text{Řada diverguje; ukažte, že } |s_{2n} - s_n| \ge \frac{n}{4n+1}\right]$

(b) $a_n = \frac{1}{n^2+4}$; $\Big[$Řada konverguje; ukažte, že $|s_{n+p} - s_n| \le \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2}$ a využijte cvičení 7a)$\Big]$

(c) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; $\left[\text{Řada diverguje; ukažte, že } |s_{2n} - s_n| \ge \frac{n}{2n+1}\right]$

(d) $a_n = \frac{\alpha_n}{10^n}$, $\alpha_n \in \mathbf{Z}$, $|\alpha_n| < 10$. $\Big[$Řada konverguje; využijte odhadu $|\alpha_n| \le \frac{1}{10^{n-1}}$ a vlastností geometrické řady$\Big]$

2.2 Řady s nezápornými členy.

1. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, je-li

a) $a_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n^2+1}}$; b) $a_n = \dfrac{2^n}{5^n+1}$; c) $a_n = \dfrac{1}{1+a^n}$, $a > -1$;

d) $a_n = \dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$, $a \ge 0$; e) $a_n = \dfrac{1}{\ln n}$, $n \ge 2$; f) $\dfrac{1}{n \ln n}$, $n \ge 2$;

g) $a_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$, $n \ge 2$; h) $a_n = 2^n \sin \dfrac{x}{3^n}$, $x \in (0, \pi)$.

Řešení:

(a) Poněvadž $n^2 + 1 \ge n^2$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$, platí $a_n \le \frac{1}{n^2}$. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje a konverguje tedy i původní řada.

(b) Je $\frac{2^n}{5^n+1} \le \frac{2^n}{5^n}$ a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ konverguje (je to geometrická řada s kvocientem $q = \frac{2}{5}$), konverguje tedy i původní řada.

(c) Je-li $|a| < 1$, je limita $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ a řada diverguje.

Pro $a = 1$ je $a_n = \frac{1}{2}$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a řada opět diverguje.

Pro $a > 1$ platí $\frac{1}{1+a^n} \le \frac{1}{a^n}$ a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$ konverguje (je to geometrická řada s kvocientem $q = \frac{1}{a} < 1$).

Daná řada tedy konverguje pro $a > 1$.

(d) Je-li $0 \le a < 1$ je $\frac{a^n}{1+a^{2n}} \le a^n$ a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n$ konverguje.

Pro $a = 1$ je $a_n = \frac{1}{2}$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a řada diverguje.

Je-li $a > 1$, potom $\frac{a^n}{1+a^{2n}} \le \frac{a^n}{a^{2n}} = \frac{1}{a^n}$ a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$ konverguje.

Shrnutím dostaneme, že daná řada konverguje pro $0 \le a < 1$ a $a > 1$.

(e) Jestliže využijeme odhadu $\ln t \le t$, který platí pro $t > 0$, dostaneme

$$\frac{1}{\ln n} \ge \frac{1}{n}.$$

Poněvadž je řada $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergentní, diverguje i daná řada.

(f) Označíme-li $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost částečných součtů dané řady, je $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ rostoucí a $0 < a_{n+1} < a_n$ pro všechna $n \ge 2$. Řadu si přepíšeme do tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} = \frac{1}{2\ln 2} + \left(\frac{1}{3\ln 3} + \frac{1}{2^2 \ln 2^2}\right) + \left(\frac{1}{5\ln 5} + \frac{1}{6\ln 6} + \frac{1}{7\ln 7} + \frac{1}{2^3 \ln 2^3}\right) + \cdots.$$

Potom platí

$$s_1 = s_{2^1-1} = \frac{1}{2\ln 2}\,;\ s_3 = s_{2^2-1} \ge s_{2^1-1} + 2 \cdot \frac{1}{2^2 \cdot 2\ln 2} = \frac{1}{2\cdot 1\cdot \ln 2} + \frac{1}{2\cdot 2\cdot \ln 2}\,;$$

$$s_7 = s_{2^3-1} \ge s_{2^2-1} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^3\cdot 3\cdot \ln 2} \ge \frac{1}{2\cdot 1\cdot \ln 2} + \frac{1}{2\cdot 2\cdot \ln 2} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot \ln 2}.$$

Odtud indukcí dostaneme, že

$$s_{2^n-1} \ge \frac{1}{2\cdot 1\cdot \ln 2} + \frac{1}{2\cdot 2\cdot \ln 2} + \cdots + \frac{1}{2\cdot n\cdot \ln 2}.$$

Poněvadž řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\cdot k\cdot \ln 2}$ diverguje, diverguje i původní řada.

(g) Platí

$$(\ln n)^{\ln n} = e^{\ln n \ln\ln n} = e^{\ln[n^{\ln\ln n}]} = n^{\ln\ln n}$$

a tedy

$$a_n = \frac{1}{n^{\ln\ln n}} < \frac{1}{n^2} \ \text{ pro } \forall\, n \ge 1619 = \left[e^{e^2} + 1\right]$$

a daná řada konverguje.

(h) Využitím odhadu $\sin t \le t$, který platí pro všechna $t \ge 0$, dostaneme

$$a_n \le 2^n \frac{x}{3^n} = x\left(\frac{2}{3}\right)^n \ \text{ a řada } \quad x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \ \text{ konverguje.}$$

Konverguje tedy i původní řada.

2. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, je-li

(a) $a_n = \frac{1}{3n-1}$ $\left[\text{diverguje}\,,\ a_n \ge \frac{1}{3n}\right]$

(b) $a_n = \frac{1}{n^2+1}$ $\left[\text{konverguje}\,,\ a_n \le \frac{1}{n^2}\right]$

(c) $a_n = \frac{1}{n^3+1}$ $\left[\text{konverguje}\,,\ a_n \le \frac{1}{n^3}\right]$

(d) $a_n = \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ $\left[\text{diverguje}\,,\ a_n \ge \frac{1}{n}\,,\ n \ge 4\right]$

(e) $a_n = \frac{\cos^2 n}{n(n+1)}$ $\qquad\left[\text{konverguje}\,,\ \ a_n \le \frac{1}{n^2}\right]$

(f) $a_n = \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2+a^2}\,, a \in \mathbf{R}$ $\qquad\left[\text{konverguje}\,,\ \ a_n \le \frac{\pi}{2n^2}\right]$

(g) $a_n = \frac{1}{2^n+1}$ $\qquad\left[\text{konverguje}\,,\ \ a_n \le \frac{1}{2^n}\right]$

(h) $a_n = \frac{2+(-1)^n}{3^n}$ $\qquad\left[\text{konverguje}\,,\ \ a_n \le \frac{1}{3^{n-1}}\right]$

(i) $a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ kde $(2n-1)!! = 1\cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)\,,\ (2n)!! = 2\cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n$

$\left[\text{konverguje}\,,\ \ a_n \le \frac{1}{2^{n+1}}\,,\ \ \text{užijte odhadu}\ \ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \le 1\right]$

(j) $a_n = \sin \frac{3+(-1)^n}{n^2}$ $\qquad\left[\text{konverguje}\,,\ \ a_n \le \frac{4}{n^2}\,,\ \ \text{užijte odhadu}\ \ \sin t \le t\ \ \text{pro}\ \ t \ge 0\right]$

3. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, je-li

a) $\quad a_n = \dfrac{3n+1}{(2n+1)^2}\,;$ $\qquad$ b) $\quad a_n = \left(\dfrac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2\,;$ $\qquad$ c) $\quad a_n = \dfrac{n-\sqrt[3]{n}}{n^3-n}\,;$

d) $\quad a_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}}$ $\qquad$ e) $\quad a_n = 1-\cos\dfrac{x}{n}\,,\ x \in \mathbf{R}\,;$ $\qquad$ f) $\quad a_n = \dfrac{e^n+n^4}{3^n+\ln^2(n+1)}\,.$

Řešení:

(a) Jestliže položíme $b_n = \frac{1}{n}$, je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(3n+1)}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4}$$

a daná řada diverguje.

(b) Pro $b_n = \frac{1}{n^2}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(n^2+1)^2}{(n^3+1)^2} = 1$$

a daná řada konverguje.

(c) Položíme-li $b_n = \frac{1}{n^2}$, je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(n-\sqrt[3]{n})}{n^3-n} = 1$$

a řada konverguje.

(d) Pro $b_n = \frac{1}{n}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n+2}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})} = 1$$

a řada diverguje.

(e) Využitím odhadu $\sin t \le t$ pro $\forall\, t \ge 0$ dostaneme

$$a_n = \frac{\sin^2 \frac{x}{n}}{1+\cos\frac{x}{n}} \le \frac{\frac{x^2}{n^2}}{1+\cos\frac{x}{n}}$$

a zvolíme-li $b_n = \frac{1}{n^2}$, dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{1+\cos\frac{x}{n}} = \frac{x^2}{2}$$

a řada konverguje.

(f) Položíme-li $b_n = \left(\frac{e}{3}\right)^n$, platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{e^n+n^4}{e^n}}{\frac{3^n+\ln^2(n+1)}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{n^4}{e^n}}{1+\frac{\ln^2(n+1)}{3^n}} = 1$$

a řada konverguje.

4. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, je-li

(a) $a_n = \frac{n+1}{n^2+3n-2}$; $\left[\text{diverguje}, \ b_n = \frac{1}{n}\right]$

(b) $a_n = \frac{n^2+n+1}{n^4+n^2+2}$; $\left[\text{konverguje}, \ b_n = \frac{1}{n^2}\right]$

(c) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}$; $\left[\text{konverguje}, \ b_n = \frac{1}{n^2}\right]$

(d) $a_n = \frac{2n^2+5n+1}{\sqrt{n^6+3n^2+2}}$; $\left[\text{diverguje}, \ b_n = \frac{1}{n}\right]$

(e) $a_n = \frac{2n}{3^n(2n-1)}$; $\left[\text{konverguje}, \ b_n = \frac{1}{3^n}\right]$

(f) $a_n = \frac{2^n}{n(2^n+1)}$; $\left[\text{diverguje}, \ b_n = \frac{1}{n}\right]$

(g) $a_n = \frac{n\cdot 2^n+5}{n\cdot 3^n+4}$; $\left[\text{konverguje}, \ b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$

(h) $a_n = \frac{1}{n}\left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}\right)$; $\left[\text{diverguje}, \ b_n = \frac{1}{n}\right]$

(i) $a_n = \sin\frac{2n+1}{n^3+5n+3}$; $\left[\text{konverguje}, \ b_n = \frac{1}{n^2}, \ \text{užijte odhadu} \ \sin t \le t, \ t \ge 0\right]$

5. Užitím d'Alembertova nebo Cauchyova kritéria rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, je-li

a) $a_n = \dfrac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{(2n-1)!!}$, $a > 0$; b) $a_n = n^{-\frac{3}{2}}\sqrt[3]{n!+1}$

c) $a_n = \dfrac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$ d) $a_n = \dfrac{\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$ e) $a_n = \dfrac{n^5\left(\sqrt{2}+\sin\sqrt{n}\right)}{2^n+n}$

Řešení:

(a) Je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)(a+n)}{(2n+1)!!} \cdot \frac{(2n-1)!!}{a(a+1)\dots(a+n-1)} = \frac{a+n}{2n+1}$$

a poněvadž $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} < 1$, daná řada konverguje.

(b) Platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt[3]{(n+1)!+1}}{(n+1)^{\frac{n+1}{3}}} \cdot \frac{n^{\frac{n}{3}}}{\sqrt[3]{n!+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{3}} \sqrt[3]{\frac{(n+1)!+1}{(n+1)(n!+1)}}.$$

Dále

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{3}} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]^{\frac{1}{3}} = e^{-\frac{1}{3}} \ \text{a}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{(n+1)!+1}{(n+1)(n!+1)}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1+\frac{1}{(n+1)!}}{1+\frac{1}{n!}}} = 1,$$

tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{-1/3} < 1$ a daná řada konverguje.

(c) Je
$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n^{\frac{n-1}{n}}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2n}}} = \frac{n^{1-\frac{1}{n}}}{(2n^2+n+1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}}} =$$
$$= \frac{n}{\sqrt{2n^2+n+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt[2n]{2n^2+n+1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$
a daná řada konverguje.

(d) Snadno zjistíme, že hodnoty $\cos^2 \frac{n\pi}{3}$ jsou
$$\cos^2 \frac{n\pi}{3} = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad n = 3k\,, \\ \frac{1}{4} & \text{pro} \quad n = 3k+1\,, \\ \frac{1}{4} & \text{pro} \quad n = 3k+2\,. \end{cases}$$
Odtud plyne, že
$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{\cos^2 \frac{n\pi}{3}}}{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} < 1$$
a daná řada konverguje.

(e) Platí
$$a_n \leq \frac{n^5(\sqrt{2}+1)}{2^n+n} \leq \frac{n^5}{2^n}(\sqrt{2}+1) = b_n.$$
Dále
$$\sqrt[n]{b_n} = \frac{\sqrt[n]{n^5}}{2}\sqrt[n]{\sqrt{2}+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} < 1.$$
Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ tedy konverguje a podle srovnávacího kritéria konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

6. Pomocí Cauchyova kritéria rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, je-li

(a) $a_n = \frac{2^n}{n^n}$; $\left[\text{konverguje}; \ \sqrt[n]{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0;\right]$

(b) $a_n = \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}$; $\left[\text{konverguje}; \ \sqrt[n]{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0;\right]$

(c) $a_n = \left(\frac{3n-1}{2n+1}\right)^n$; $\left[\text{diverguje}; \ \sqrt[n]{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{2};\right]$

(d) $a_n = \left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^n$; $\left[\text{konverguje}; \ \sqrt[n]{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{4};\right]$

(e) $a_n = \frac{3}{3^{n/2}}$; $\left[\text{konverguje}; \ \sqrt[n]{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{3}};\right]$

(f) $a_n = \left(\frac{10}{11}\right)^n \cdot n^5$; $\left[\text{konverguje}; \ \sqrt[n]{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{10}{11};\right]$

(g) $a_n = \left(\frac{11}{10}\right)^n \frac{1}{n^5}$; $\left[\text{diverguje}; \ \sqrt[n]{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{11}{10};\right]$

(h) $a_n = \left(\frac{6n+1}{5n-3}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2n}{3}}$; $\left[\text{konverguje}; \ \sqrt[n]{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{6}};\right]$

(i) $a_n = 2^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; $\left[\text{konverguje}; \ \sqrt[n]{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{e};\right]$

(j) $a_n = \left(1-\frac{3}{n}\right)^n$; $\left[\text{diverguje}; \ a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-3};\right]$

(k) $a_n = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$; $\left[\text{konverguje}; \ \sqrt[n]{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{e}{3};\right]$

(l) $a_n = 3^{1+n}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$; $\left[\text{konverguje}; \ \sqrt[n]{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{e}; \right]$

(m) $a_n = \left(\frac{3n}{n+5}\right)^{n}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$; $\left[\text{diverguje}; \ \sqrt[n]{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{e}; \right]$

(n) $a_n = \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n(n-1)}$; $\left[\text{konverguje}; \ \sqrt[n]{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-1}; \right]$

(o) $a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2+4n+5}$; $\left[\text{konverguje}; \ \sqrt[n]{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-2}; \right]$

(p) $a_n = \frac{n^{n+1}}{(3n^2+2n+1)^{\frac{n+3}{2}}}$; $\left[\text{konverguje}; \ \sqrt[n]{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{3}}; \right]$

(q) $a_n = \frac{1}{3^n-n^2}$; $\left[\text{konverguje}; \ \sqrt[n]{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}; \ \text{užijte úpravu } 3^n - n^2 = 3^n\left(1-\frac{n^2}{3^n}\right) \right]$

(r) $a_n = a^n \cdot b^n$, $a, b > 0$; $\left[\text{konverguje pro } ab < 1, \ \text{diverguje pro } ab \geq 1; \ \sqrt[n]{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} ab; \right]$

(s) $a_n = \frac{n^\alpha}{[\ln(n+1)]^{\frac{n}{2}}}$; $\left[\text{konverguje}; \ \sqrt[n]{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0; \right]$

(t) $a_n = n^\alpha q^n$, $0 < q < 1, \alpha \in \mathbf{R}$; $\left[\text{konverguje}; \ \sqrt[n]{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} q; \right]$

7. Užitím d'Alembertova kritéria rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, je-li

(a) $a_n = \frac{1}{(n+1)!}$; $\left[\text{konverguje}; \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0; \right]$

(b) $a_n = \frac{(n+1)!}{2^n \cdot n!}$; $\left[\text{konverguje}; \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}; \right]$

(c) $a_n = \frac{n!}{5^n}$; $\left[\text{diverguje}; \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty; \right]$

(d) $a_n = \frac{n}{10^n+n}$; $\left[\text{konverguje}; \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{10}; \right]$

(e) $a_n = \frac{n!}{(2n-1)!!}$; $\left[\text{konverguje}; \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}; \right]$

(f) $a_n = \frac{(2n+1)!}{\pi^n (n!)^2}$; $\left[\text{diverguje}; \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{4}{\pi}; \right]$

(g) $a_n = \frac{n!}{n^n}$; $\left[\text{konverguje}; \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}; \right]$

(h) $a_n = \frac{(2n+1)!}{(3n+4)\cdot 3^n}$; $\left[\text{diverguje}; \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty; \right]$

(i) $a_n = \frac{(2n+1)!!}{3^n \cdot n!}$; $\left[\text{konverguje}; \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3}; \right]$

(j) $a_n = \frac{x^n}{n!}$, $x > 0$; $\left[\text{konverguje pro } \forall\, x > 0; \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0; \right]$

(k) $a_n = nx^{n-1}$, $x > 0$;
$\left[\text{konverguje pro}; \ x \in (0,1), \ \text{diverguje pro } x \in \langle 0, +\infty); \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x; \right]$

(l) $a_n = \frac{\beta^n}{2^n (2n-1)!}$, $\beta > 0$; $\left[\text{konverguje}; \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0; \right]$

(m) $a_n = \frac{2^n n!}{n^n}$; $\left[\text{konverguje}; \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{e}; \right]$

(n) $a_n = \frac{3^n n!}{n^n}$; $\left[\text{diverguje}; \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{e}; \right]$

(o) $a_n = \frac{2\cdot 5 \ldots (3n-1)}{1\cdot 5 \ldots (4n-3)}$; $\left[\text{konverguje}; \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{4}; \right]$

(p) $a_n = \frac{2\cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3n+2)}{2^n (n+1)!}$; $\left[\text{diverguje}; \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{2}; \right]$

(q) $a_n = \frac{(2n+1)!!}{1\cdot 4\cdot \ldots \cdot(3n+1)}$; $\left[\text{konverguje}; \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3};\right]$

(r) $a_n = \frac{4\cdot 7\cdot \ldots \cdot(3n+1)}{2\cdot 6\cdot \ldots \cdot(4n-2)}$; $\left[\text{konverguje}; \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{4};\right]$

(s) $a_n = \frac{2\cdot 5\cdot \ldots \cdot((3n-1)}{1\cdot 6\cdot \ldots \cdot(5n-4)}$; $\left[\text{konverguje}; \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{5};\right]$

(t) $a_n = \left(\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt{2} - \sqrt[5]{2}\right) \cdot \ \ldots \ \cdot \left(\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2}\right)$; $\left[\text{konverguje}; \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2} - 1.\right]$

8. Pomocí integrálního kritéria rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, je-li

a) $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R}$; b) $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$, $n \geq 2, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$;

c) $a_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha (\ln\ln n)^\beta}$, $3 \geq 3, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$; d) $a_n = n^2 e^{-\sqrt{n}}$.

Řešení:

(a) Je-li $\alpha \leq 0$, není $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a řada diverguje.

Pro $\alpha > 0$ je $n^\alpha < (n+1)^\alpha$, tedy $a_n > a_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$. Položíme-li $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, je f klesající funkce pro $x \geq 1$ a $f(n) = a_n$. Dále platí

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \ln x\big|_1^{+\infty} & \text{pro} \quad \alpha = 1, \\ \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\Big|_1^{+\infty} & \text{pro} \quad \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Tedy $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ konverguje pro $\alpha > 1$ a diverguje pro $\alpha \leq 1$. Odtud plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje pro $\alpha > 1$ a diverguje pro $\alpha \leq 1$.

(b) i. Buď $\alpha \leq 0$. Potom je $n^\alpha \leq 1$ a odtud $a_n \geq \ln^\beta n$. Poněvadž je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln^\beta n}{n} = 0$, platí, že $\ln^\beta n \leq n$ pro všechna dostatečně veliká n, neboli $\frac{1}{\ln^\beta n} \geq \frac{1}{n}$ a daná řada diverguje.

ii. Nechť $\alpha > 0$ a položme $f(x) = \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}$. Potom je

$$f'(x) = -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}\ln^\beta x} - \frac{\beta}{x^{\alpha+1}\ln^{\beta+1} x} = -\frac{1}{x^{\alpha+1}\ln^\beta x}\left(\alpha + \frac{\beta}{\ln x}\right).$$

Vzhledem k tomu, že je $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\beta}{\ln x} = 0$, je $f'(x) < 0$ pro dostatečně velká x a f je tedy klesající. Dále

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x} = \int_{\ln 2}^{+\infty} t^{-\beta} e^{(1-\alpha)t}\, dt,$$

jestliže zavedeme substituci $\ln x = t$.

Tento integrál konverguje pro $\alpha > 1$ a diverguje pro $\alpha < 1$.

Je-li $\alpha = 1$, pak integrál $\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta}$ konverguje pro $\beta > 1$.

Výsledně dostáváme, že řada $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ konverguje pro $\alpha > 1$ a libovolné β; je-li $\alpha = 1$, pak konverguje pro $\beta > 1$. Pro všechny ostatní hodnoty α, β řada diverguje.

(c) Položíme-li $f(x) = \frac{1}{x \ln^\alpha x \ln^\beta \ln x}$, je

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2 \ln^\alpha x \ln^\beta \ln x} - \frac{\alpha}{x^2 \ln^{\alpha+1} x \ln^\beta \ln x} - \frac{\beta}{x^2 \ln^{\alpha+1} x \ln^{\beta+1} \ln x} =$$
$$= -\frac{1}{x^2 \ln^\alpha x \ln^\beta \ln x}\left[1 + \frac{\alpha}{\ln x} + \frac{\beta}{\ln x \ln \ln x}\right] < 0$$

pro všechna dostatečně velká x. Dále je

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^\alpha x \ln^\beta \ln x} = \int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta t},$$

jestliže zavedeme substituci $\ln x = t$. To je však integrál z předchozího příkladu, tedy daná řada konverguje pro $\alpha > 1$ a libovolné β a je-li $\alpha = 1$, konverguje pro $\beta > 1$. Ve všech ostatních případech diverguje.

(d) Označme $f(x) = x^2 e^{-\sqrt{x}}$. Potom platí

$$f'(x) = \left(2x - \frac{x\sqrt{x}}{2}\right) e^{-\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x(4 - \sqrt{x})e^{-\sqrt{x}} < 0 \text{ pro } x > 16.$$

Pro integrál $\int_1^\infty f(x)\,dx$ platí

$$\int_1^{+\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}}\,dx = 2\int_1^{+\infty} t^5 e^{-t}\,dt,$$

zavedeme-li substituci $\sqrt{x} = t$. Integrál $\int_1^\infty t^5 e^{-t}\,dt$ konverguje a konverguje tedy i daná řada.

9. Pomocí integrálního kritéria rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^\infty a_n$, je-li

(a) $a_n = \frac{1}{n \ln^2 n}\,, n \geq 2$; $\left[\text{konverguje, vypočtěte } \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}\right]$

(b) $a_n = n^2 e^{-n}$; $\left[\text{konveruje, vypočtěte } \int_1^{+\infty} x^2 e^{-x}\,dx\right]$

(c) $a_n = n^2 e^{-n^3}$; $\left[\text{konverguje, vypočtěte } \int_1^{+\infty} x^2 e^{-x^3}\,dx\right]$

(d) $a_n = e^{-\sqrt[3]{n}}$; $\left[\text{konverguje, vypočtěte } \int_1^{+\infty} x^2 e^{-x}\,dx\right]$

2.3 Libovolné řady.

1. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^\infty a_n$, je-li

a) $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}\,, \alpha \in \mathbf{R}$;

b) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln^2(n+1)}\left(1 - \cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

c) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n - \ln n}$;

d) $a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{\ln^2 n}{n}$.

Řešení:

(a) Jestliže vyšetříme řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, je podle cvičení 2.2.8a) tato řada konvergentní pro $\alpha > 1$.

Pro $\alpha \leq 0$ není $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Je-li $0 < \alpha \leq 1$, potom $n^\alpha \leq (n+1)^\alpha$, tedy $\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$. Podle Leibnizova kritéria je tedy řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní. Shrbneme-li výsledek, dostaneme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ konverguje absolutně pro $\alpha > 1$ neabsolutně pro $0 < \alpha \leq 1$ a diverguje pro $\alpha \leq 0$.

(b) a_n nejdříve přepíšeme do tvaru $a_n = \frac{2(-1)^n \sin^2 \frac{1}{2\sqrt{n}}}{\ln^2(n+1)}$. Využitím odhadu $|\sin t| \leq t$ pro $\forall\, t \geq 0$ dostaneme

$$|a_n| \leq \frac{1}{2n\ln^2(n+1)} \leq \frac{1}{2n\ln^2 n} \quad \text{pro} \quad n \geq 2.$$

Řada $\frac{1}{2}\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$ je podle cvičení 2.2.9a) konvergentní a tedy daná řada konverguje absolutně.

(c) Poněvadž platí $n - \ln n \leq n$ pro $\forall\, n \in \mathbf{N}$, je $\frac{1}{n-\ln n} \geq \frac{1}{n}$ a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\ln n}$ diverguje. Dále

$$n - \ln n = n\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n-\ln n} = 0$. Předpokládejme, že

$$\frac{1}{(n+1) - \ln(n+1)} \leq \frac{1}{n - \ln n}.$$

Tato nerovnost je však ekvivalentní s nerovností

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1,$$

která platí pro všechna $n \in \mathbf{N}$. Odtud plyne, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ konverguje neabsolutně.

(d) Je sice $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln^2 n}{n} = 0$, ale poněvadž

$$\frac{\ln^2 n}{n} \geq \frac{1}{n} \quad \text{pro} \ \forall\, n \geq 3,$$

je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n}$ divergentní. Jestliže předpokládáme, že

$$\frac{\ln^2(n+1)}{n+1} \leq \frac{\ln^2 n}{n},$$

dostaneme po odmocnění ekvivalentní nerovnost

$$\frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{\ln n}{\sqrt{n}}, \quad \text{neboli} \quad \ln(n+1)^{\sqrt{n}} \leq \ln n^{\sqrt{n+1}}, \quad \text{tedy} \quad (n+1)^{\sqrt{n}} \leq n^{\sqrt{n+1}}.$$

Povýšením této nerovnosti na $\sqrt{n}$ dostaneme dále

$$(n+1)^n \le n^{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = n^{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\cdot n} \text{ a tedy ekvivalentně } \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \le n^{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}.$$

Tato nerovnost je však splněna pro všechna dostatečně velká n, poněvadž

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e, \text{ zatímco } \lim_{n\to\infty} n^{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}} = +\infty.$$

Daná řada je tedy neabsolutně konvergentní.

2. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, je-li

(a) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ [konverguje neabsolutně; užijte Leibnizova kritéria]

(b) $a_n = \frac{\sin n\alpha}{n^2}$, $\alpha \in \mathbf{R}$ [konverguje absolutně; užijte odhadu $|\sin n\alpha| \le 1$]

(c) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}n^3}{2^n}$ [konverguje absolutně; užijte d'Alembertova kritéria]

(d) $a_n = \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{(n+2)\ln^3(n+3)}$ [konverguje absolutně; užijte cvičení 2.2.8b)]

(e) $a_n = \frac{\operatorname{arctg}(-n)^n}{\sqrt[4]{2n^6+3n+1}}$ $\left[\text{konverguje absolutně; užijte odhadu } |\operatorname{arctg} t| \le \frac{\pi}{2} \text{ pro } \forall\, t \in \mathbf{R}\right]$

(f) $a_n = \frac{(-1)^n n}{(n+2)\sqrt[4]{n+1}}$ [konverguje neabsolutně; užijte Leibnizova kritéria]

(g) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{n^2+1}}$ $\left[\text{diverguje; ukažte, že } \lim\limits_{n\to\infty} a_n \ne 0\right]$

(h) $a_n = \frac{(-1)^n n^2 2^n}{3^n+1}$ [konverguje absolutně; užijte d'Alembertova kritéria]

(i) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n}+2}$ [konverguje neabsolutně; užijte Leibnizova kritéria]

(j) $a_n = \frac{(-1)^n(2n)!!}{(n+1)^n}$ [konverguje absolutně; užijte d'Alembertova kritéria]

Kapitola 3

Reálné funkce jedné reálné proměnné.

1. Najděte funkční hodnoty

$$\text{a)}\quad f(0), f(-x), f(x+1), f(x)+1, f\left(\frac{1}{x}\right), \frac{1}{f(x)}, \text{ je-li } f(x) = \frac{1-x}{1+x}.$$

$$\text{b)}\quad f(-4), f(-1), f\left(-\frac{1}{2}\right), f(1), f(2007), f(-\pi), f(-x), f\left(\frac{1}{x}\right),$$

kde

$$f(x) = \begin{cases} 2-|x| & \text{pro} \quad -1 < x < 2. \\ 1 & \text{pro} \quad x \le -1, \\ 0 & \text{pro} \quad x \ge 2. \end{cases}$$

Řešení:

(a) Je zřejmé, že

$$f(0) = 1\,, \quad f(-x) = \frac{1-(-x)}{1+(-x)} = \frac{1+x}{1-x}\,, \quad f(x+1) = \frac{1-(x+1)}{1+(x+1)} = \frac{-x}{2+x}\,,$$

$$f(x)+1 = \frac{1-x}{1+x} + 1 = \frac{2}{1+x}\,, \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x+1}\,, \quad \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1+x}{1-x}.$$

(b) Načrtneme-li si graf funkce f, je okamžitě vidět, že Obrázek

$$f(-4) = 1\,, \ f(-1) = 1\,, \ f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 - \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2}\,, \ f(1) = 1\,, \ f(2007) = 0.$$

Dále

$$f(-x) = \begin{cases} 2-|-x| = 2-|x| & \text{pro} \quad -1 < -x < 2, \quad \text{tedy} \quad -2 < x < 1\,, \\ 1 & \text{pro} \quad -x \le -1, \quad \text{neboli} \quad x \ge 1\,, \\ 0 & \text{pro} \quad -x \ge 2, \quad \text{tedy} \quad x \le -2. \end{cases}$$

Graf funkce $f(-x)$ je na následujícím obrázku. Obrázek Funkční hodnota $f\left(\frac{1}{x}\right)$ není definována pro $x = 0$. Dále platí $f\left(\frac{1}{x}\right) = 2 - \left|\frac{1}{x}\right|$ pro $-1 < \frac{1}{x} < 2$, neboli

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{x} & \text{pro} \quad 0 < \frac{1}{x} < 2, \quad \text{tedy} \quad x > \frac{1}{2}, \\ 2 + \frac{1}{x} & \text{pro} \quad -1 < \frac{1}{x} < 0, \quad \text{tedy} \quad x < -1, \\ 1 & \text{pro} \quad \frac{1}{x} \leq -1, \quad \text{neboli} \quad -1 \leq x < 0, \\ 0 & \text{pro} \quad \frac{1}{x} \geq 2, \quad \text{tedy} \quad 0 < x \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Graf funkce $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ vypadá následovně. <u>Obrázek</u>

2. Najděte funční hodnoty

(a) $f(0), f(1), f(2), f(-2), f\left(-\frac{1}{2}\right), \left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|, f(x+2), f(x)+2, f\left(\frac{1}{x}\right)$, je-li $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$.
$\left[-2, -\frac{1}{2}, 0, 4, -5, 1, \frac{x}{x+3}, \frac{3x}{x+1}, \frac{1-2x}{x+1}\right]$

(b) $f(3), f(a) + f(-a), f(b) - 1, f(b-1)$, je-li $f(x) = (1+x)^4 - (1-x)^4$.
$\left[240, 0, 8b^3 + 8b - 1, 8b^3 - 24b^2 + 32b - 16\right]$

(c)
$$f(-4), f(-1), f\left(-\frac{1}{2}\right), f(1), f(2007), f(x-1), f\left(\frac{1}{x}\right), \text{ je-li}$$
$$f(x) = \begin{cases} 2x - |x| & \text{pro} \quad x > -1, \\ 2^{x+1} & \text{pro} \quad x \leq -1. \end{cases}$$

Načrtněte si grafy funkcí $f(x), f(x-1), f\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$\left[\frac{1}{8}; 1; -\frac{3}{2}; 1; 2007; \quad \begin{matrix} 2(x-1) - |x-1| & \text{pro} & x > 0\,, \\ 2^x & \text{pro} & x \leq 0; \end{matrix} \quad \begin{matrix} \frac{3}{x} & \text{pro} & x < -1, \\ 2^{\frac{x+1}{x}} & \text{pro} & -1 \leq x < 0, \\ \frac{1}{x} & \text{pro} & x > 0. \end{matrix}\right]$$

3. Buďte $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = \sin 2x$. Najděte hodnoty

(a) $f\left(g\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$; $\left[-\frac{3}{8}\right]$
(b) $g(f(1))$; $[0]$
(c) $g(f(2))$; $[\sin 12]$
(d) $f(g(x))$; $[-\sin 2x \cos^2 2x]$
(e) $f(f(x))$; $[x^9 - 3x^7 + 3x^5 - 2x^3 + x]$
(f) $f(f(f(1)))$; $[0]$
(g) $g(g(x))$; $[\sin(2 \sin 2x)]$

4. Buďte $u = \sin x, v = \log_2 x, w = 1 + x, y = \frac{1}{x}, z = \sqrt{x}$. Najděte složené funkce

(a) $u \circ v \circ w \circ y \circ z$ $\left[\sin \log_2 \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right]$

(b) $z \circ y \circ w \circ v \circ u$ $\left[\frac{1}{\sqrt{1+\log_2 \sin x}}\right]$

(c) $w \circ y \circ v \circ z \circ u$ $\left[1+\frac{1}{\log_2 \sqrt{\sin x}}\right]$

(d) $y \circ v \circ z \circ u \circ w$ $\left[\frac{1}{\log_2 \sqrt{\sin(1+x)}}\right]$

5. Najděte funkci $f(x)$, je-li

a) $f(x+1) = x^2 - 3x + 2\,;$ b) $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}\,,\ x \neq 0\,;$ c) $f\left(x^2\right) = 1 - |x|^3.$

Řešení:

(a) Označíme-li $x + 1 = t$, potom

$$f(t) = (t-1)^2 - 3(t-1) + 2 = t^2 - 5t + 6, \text{ tedy } f(x) = x^2 - 5x + 6.$$

(b) Analogicky, je-li $t = x + \frac{1}{x}$, potom

$$t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \text{ a tedy } f(x) = x^2 - 2.$$

(c) Je

$$f\left(x^2\right) = 1 - |x|^3 = 1 - \left(x^2\right)^{\frac{3}{2}} \text{ a tedy } f(x) = 1 - x^{\frac{3}{2}}.$$

6. Najděte funkci $f(x)$, je-li

(a) $f(x-2) = \frac{1}{x+1}\,,\ x \neq -1\,;$ $\left[\frac{1}{x+3}\,,\ x \neq -3\right]$

(b) $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}\,,\ x \neq 0\,;$ $\left[\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\,,\ x \neq 0\right]$

(c) $f\left(\frac{x}{1+x}\right) = x^2\,,\ x \neq -1\,;$ $\left[\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\,,\ x \neq 1\right]$

(d) $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = x\,,\ x \neq -1\,.$ $\left[\frac{1+x}{1-x}\,,\ x \neq 1\right]$

7. Najděte funkci y jako řetězec základních elementárních funkcí, je-li

a) $y = 3^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln^2 x}}$ b) $y = \ln \dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\dfrac{1+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}}$

$$\text{c)} \quad y = \left[\frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}\right]^{\operatorname{arctg}^2 x}$$

Řešení:

(a) Vnější funkce je zřejmě $f(u) = 3^u$. Další funkce v pořadí je $g(v) = \operatorname{arctg} v$, pak $h(w) = \sqrt{w}$. Pod odmocninou je součet, neboli $\varphi(z) = 1 + z^2$, kde $z = \ln x$. Hledaný řetězec je tedy

$$y = 3^u\,,\ u = \operatorname{arctg} v\,,\ v = \sqrt{w}\,,\ w = 1 + z^2\,,\ z = \ln x.$$

(b) Daná funkce je součtem dvou elementárních funkcí, neboli $y = y_1 + y_2$, kde $y_1 = \ln u\,,\ y_2 = \sqrt{3}\operatorname{arctg} v$. Dále $u = \frac{u_1}{u_2}\,,\ u_1 = 1 - t\,,\ u_2 = \sqrt{s}\,,\ s = 1 + t + t^2\,,$ $v = \frac{1}{\sqrt{3}}(1+2t)\,,\ t = \sqrt[3]{x}.$

(c) Funkce je tvaru $y=[f(x)]^{g(x)}$, kterou vyjádříme nejdříve pomocí exponenciální funkce ve tvaru

$$[f(x)]^{g(x)}=e^{\ln[f(x)]^{g(x)}}=e^{g(x)\ln f(x)},$$

tedy v našem případě je

$$y=e^{\operatorname{arctg}^2 x\ln\frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}}.$$

Odtud plyne, že $y=e^u$, kde

$$u=v^2\ln w\,,\ v=\operatorname{arctg}x\,,\ w=\frac{\arcsin t}{\arccos z}\,,\ t=\alpha^2\,,\ z=\beta^2\,,\ \alpha=\sin x\,,\ \beta=\cos x.$$

8. Vyjádřete funkci y jako řetězec základních elementárních funkcí, je-li

(a) $y=\sin\left(1+2\operatorname{ch}\sqrt{3-\operatorname{tg}^2 2x}\right)$;

[$y=\sin u\,,u=1+2\operatorname{ch}v\,,\ v=\sqrt{w}\,,\ w=3-t^2\,,\ t=\operatorname{tg}z\,,\ z=2x$]

(b) $y=\ln\left(\ln^2\left(\ln^3 x\right)\right)$; [$y=\ln u\,,\ u=v^2\,,\ v=\ln w\,,\ w=z^3\,,\ z=\ln x$]

Poznámka: Označíme-li $h(x)=\ln\left(\ln^2\left(\ln^3 x\right)\right)$, $f_1(x)=\ln x$, $f_2(x)=x^2$, $f_3(x)=x^3$, potom je $h=f_1\circ f_2\circ f_1\circ f_3\circ f_1$.

(c) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$; [$y=\sqrt{u}\,,\ u=x+\sqrt{v}\,,\ v=x+\sqrt{x}$]

Poznámka: Označíme-li

$$h(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\,,\ s(u,v)=u+v\,,\ s\circ(f,g)(x)=f(x)+g(x)\,,\ q(x)=\sqrt{x}\,,\ r(x)=x\,,$$

potom $h=q\circ s\circ(r,q\circ s\circ(r,q))$.

(d) $y=(\sin x)^{\cos x}$. [$y=e^u\,,\ u=\cos x\cdot\ln v\,,\ v=\sin x$]

9. Vyšetřete monotonnost funkce $f(x)$, je-li

a) $f(x)=x^2\,,\ x\in\mathbf{R}$; b) $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $a,b,c,d,$ jsou konstanty, $x\in\mathbf{R}\,,cx+d\neq 0$;

c) $f(x)=2x+\sin x\,,\ x\in\mathbf{R}$.

Řešení:

(a) i. Je-li $x\in\langle 0,+\infty)$, $x_1<x_2$ dva libovolné body tohoto intervalu, potom je zřejmě $x_1^2<x_2^2$ (násobení dvou souhlasných nerovností mezi nezápornými čísly) a funkce f je rostoucí na intervalu $\langle 0,+\infty)$.

ii. Pro $x\in(-\infty,0\rangle$ a libovolnou dvojici bodů $x_1<x_2$ tohoto intervalu platí $-x_1>-x_2$ a tedy $x_1^2=(-x_1)^2>(-x_2)^2=x_2^2$. Funkce f je tedy klesající v intervalu $(-\infty,0\rangle$.

(b) Je-li $c=0$, pak dostaneme lineární funkci $y=\alpha x+\beta$ $\left(\alpha=\frac{a}{d}\,,\ \beta=\frac{b}{d}\right)$, která je rostoucí pro $\alpha>0$ a klesající pro $\alpha<0$ (grafem je přímka).

Nechť $c\neq 0$. Potom přepíšeme $f(x)$ do tvaru

$$f(x)=\frac{\frac{a}{c}(cx+d)+b-\frac{ad}{c}}{cx+d}=\frac{a}{c}-\frac{ad-bc}{c(cx+d)}.$$

Je-li $ad-bc=0$, je f konstantní a není ryze monotonní.

i. Buď $ad - bc > 0$, $x_1 < x_2 < -\frac{d}{c}$ dva libovolné body. Potom je

$$c^2x_1 + cd < c^2x_2 + cd < 0$$

a tedy

$$\frac{1}{c(cx_1+d)} > \frac{1}{c(cx_2+d)}.$$

Odtud

$$\frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c(cx_1+d)} < \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c(cx_2+d)}$$

a f je rostoucí v intervalu $\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right)$.
Pro $-\frac{d}{c} < x_1 < x_2$ platí $0 < c^2x_1 + cd < c^2x_2 + cd$ a tedy

$$\frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c(cx_1+d)} < \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c(cx_2+d)}$$

a f je rostoucí i v intervalu $\left(-\frac{d}{c}, +\infty\right)$.

ii. Pro $ad - bc < 0$ lze analogicky ukázat, že f je klesající v intervalu $\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right)$ a v intervalu $\left(-\frac{d}{c}, +\infty\right)$.

Poznámka: Výše uvedený výpočet si můžeme ušetřit, jestliže si uvědomíme, že grafem funkce f je hyperbola s asymptotou $x = -\frac{d}{c}$. Je-li $c \neq 0$, $ad-bc > 0$, pak f není rostoucí v $D(f) = \mathbf{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$!!

(c) Buďte $x_1 < x_2$ dvě libovolná reálná čísla. Ukážeme, že f je rostoucí, tedy

$$2x_1 + \sin x_1 < 2x_2 + \sin x_2.$$

Pokud toto platí, plyne odtud, že

$$2(x_2 - x_1) + \sin x_2 - \sin x_1 > 0, \text{ neboli } 2(x_2 - x_1) + 2\sin\frac{x_2 - x_1}{2}\cos\frac{x_2 + x_1}{2} > 0.$$

Využitím nerovnosti $|\sin t| < |t|\ \ \forall t \in \mathbf{R} - \{0\}$ dostaneme, že

$$2\left|\sin\frac{x_2 - x_1}{2}\cos\frac{x_2 + x_1}{2}\right| < x_2 - x_1$$

a daná nerovnost platí.

Poznámka: Ověřování monotonie z definice je poměrně nepříjemné a budeme se mu snažit vyhnout. Efektivní způsob určování intervalů monotonie funkce poskytuje diferenciální počet.

10. Vyšetřete monotonnost funkce $f(x)$, je-li

(a) $f(x) = x^3$, $x \in \mathbf{R}$; [rostoucí v $\mathbf{R}$]

(b) $f(x) = ax + b$, a, b konstanty, $x \in \mathbf{R}$; [rostoucí pro $a > 0$, klesající pro $a < 0$]

(c) $f(x) = ax^2 + bx + c$, a, b, c konstanty, $x \in \mathbf{R}$;
[pro $a > 0$ klesá v intervalu $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ a roste v intervalu $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$,
pro $a < 0$ roste v intervalu $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ a klesá v intervalu $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$]

(d) $f(x) = \frac{1-x^2}{x}$, $x \in (0, +\infty)$. [klesající]

Poznámka: Funkce $f(x) = \frac{1-x^2}{x}$ je klesající v $(-\infty, 0)$ i v $(-\infty, 0)$, ale není klesající v $\mathbf{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$!!

11. Najděte definiční obor funkce

a) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$; b) $y = \sqrt{\log \dfrac{5x - x^2}{4}}$; c) $y = \log \cos x$;

d) $y = \sqrt{\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}}$; e) $y = \ln \left(\sin \dfrac{\pi}{x} \right)$; f) $y = \sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\sin 3x}$.

Řešení:

(a) Aby daný zlomek i odmocnina byly definovány, je třeba, aby $x^2 - 3x + 2 > 0$. Tato nerovnice má řešení $M = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty) = D(f)$.

(b) Aby daná odmocnina měla smysl, je třeba, aby

$$\log \frac{5x - x^2}{4} \geq 0\,, \text{ neboli } \frac{5x - x^2}{4} \geq 1.$$

Odtud dostaneme nerovnici $x^2 - 5x + 4 \leq 0$, která má řešení $M = \langle 1, 4 \rangle = D(f)$.

(c) Aby logaritmus byl definován, musí platit $\cos x > 0$. Jestliže si představíme graf funkce $y = \cos x$, je $\cos x > 0$ pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right)$, kde $k \in \mathbf{Z}$. Hledaný definiční obor je tedy

$$M = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right).$$

(d) Daná odmocnina je definována, je-li $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \geq 0$. Tato nerovnice je však ekvivalentní s nerovnicí

$$(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x) = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x \geq 0\,, \sin x \neq \cos x,$$

neboli $\cos 2x \leq 0$, $\sin x \neq \cos x$. Z průběhu funkcí $\sin x$ a $\cos x$ plyne, že

$$2x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle,$$

tedy definiční obor je

$$M = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi \right\rangle.$$

(e) Vzhledem k definičnímu oboru logaritmu musí platit, že $\sin \frac{\pi}{x} > 0$, tedy

$$\frac{\pi}{x} \in (2k\pi, (2k+1)\pi) \text{ pro } k \in \mathbf{Z}.$$

Odtud plyne, že $2k < \frac{1}{x} < 2k + 1$. Buď $k = 0$, potom je $0 < \frac{1}{x} < 1$, neboli $x \in (1, +\infty)$. Pro $k \in \mathbf{Z} - \{0\}$ je $x \in \left(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k} \right)$. Shrnutím dostaneme, že definiční obor f je

$$M = \bigcup_{k \in \mathbf{Z} - \{0\}} \left(\frac{1}{2k + 1}, \frac{1}{2k} \right) \cup (1, +\infty).$$

Jestliže definiční obor načrtneme, dostaneme následující obrázek.

(f) Uvažme zatím jen interval $\langle 0, 2\pi\rangle$. Potom musí platit $\sin 2x \geq 0 \wedge \sin 3x \geq 0$. Tedy

$$2x \in \langle 0, \pi\rangle \cup \langle 2\pi, 3\pi\rangle \quad \wedge \quad 3x \in \langle 0, \pi\rangle \cup \langle 2\pi, 3\pi\rangle \cup \langle 4\pi, 5\pi\rangle .$$

Odtud

$$x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle \pi, \frac{3\pi}{2}\right\rangle \quad \wedge \quad x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{3}\right\rangle \cup \left\langle \frac{2\pi}{3}, \pi\right\rangle \cup \left\langle \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\rangle ,$$

neboli z intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ patří do definičního oboru dané funkce množina $\left\langle 0, \frac{\pi}{3}\right\rangle \cup \{\pi\} \cup \left\langle \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right\rangle$. Definiční obor dané funkce je tedy

$$M = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left\langle 2k\pi, \frac{6k+1}{3}\pi\right\rangle \cup \{(2k+1)\pi\} \cup \left\langle \frac{6k+4}{3}\pi, \frac{4k+3}{2}\pi\right\rangle .$$

12. Najděte definiční obor funkce

(a) $y = \frac{x^2}{1+x}$; $\quad [\, x \neq -1\,]$

(b) $y = \ln(x+3)$; $\quad [\, x > -3\,]$

(c) $y = \sqrt{5-2x}$; $\quad \left[\, x \leq \frac{5}{2}\,\right]$

(d) $y = \sqrt{3x - x^3}$; $\quad \left[\, \left(-\infty, -\sqrt{3}\right\rangle \cup \langle 0, \sqrt{3}\rangle\,\right]$

(e) $y = \arcsin \frac{1-2x}{4}$; $\quad \left[\, \left\langle -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\rangle\,\right]$

(f) $y = \ln \frac{3x-x^2}{x-1}$; $\quad [\, (-\infty, 0) \cup (1,3)\,]$

(g) $y = \ln \sin x$; $\quad \left[\, \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi)\,\right]$

(h) $y = \sqrt[3]{\frac{x+2}{\ln\cos x}}$; $\quad \left[\, \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2k\pi\right) \cup \left(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\,\right]$

(i) $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16 - x^2}$; $\quad [\, \langle -4, -\pi\rangle \cup \langle 0, \pi\rangle\,]$

(j) $y = \ln \frac{x-5}{x^2-10x+24} - \sqrt[3]{x+5}$; $\quad [\, (4,5) \cup (6 + \infty)\,]$

(k) $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}}$; $\quad [\, \emptyset\,]$

(l) $y = \frac{1}{\ln(1-x)} + \sqrt{x+2}$; $\quad [\, \langle -2, 0) \cup (0,1)\,]$

(m) $y = \log[1 - \log(x^2 - 5x + 16)]$; $\quad [\, (2,3)\,]$

(n) $y = \arcsin \frac{2x}{1+x}$; $\quad \left[\, \left\langle -\frac{1}{3}, 1\right\rangle\,\right]$

(o) $y = \sqrt{3-x} + \arcsin \frac{3-2x}{5}$; $\quad [\, \langle -1, 3\rangle\,]$

(p) $y = \arccos \frac{2}{2+\sin x}$; $\quad \left[\, \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \langle 2k\pi, (2k+1)\pi\rangle\,\right]$

(q) $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$; $\quad \left[\, \bigcup_{k=0}^{\infty} \left\langle 4k^2\pi^2, (2k+1)^2\pi^2\right\rangle\,\right]$

(r) $y = \log_2 \log_3 \log_4 x$; $\quad [\, x > 4\,]$

(s) $y = \ln\sin(x-3) + \sqrt{36 - x^2}$; $\quad [\, (3 - 2\pi, 3 - \pi) \cup (3,6)\,]$

(t) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$; $\quad [\, (-1, 1\rangle \cup \langle 2, 3)\,]$

(u) $y = \sqrt{\cos x^2}$; $\quad \left[\, |x| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}},\ \sqrt{(4k-1)\frac{\pi}{2}} \leq |x| \leq \sqrt{(4k+1)\frac{\pi}{2}}\ \right]$

(v) $y = \arccos(2\sin x)$; $\quad \left[\, \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left\langle -\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right\rangle\,\right]$

(w) $y = \sqrt[4]{\ln \mathrm{tg} x}$; $\quad \left[\, \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left\langle \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right\rangle\,\right]$

(x) $y = \log\cos\ln x$. $\left[\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}\left(e^{\frac{4k-1}{2}\pi}, e^{\frac{4k+1}{2}\pi}\right)\right]$

13. Najděte obor hodnot funkce

a) $y = \sqrt{2+x-x^2}$; b) $y = \ln(1-2\cos x)$; c) $y = \arcsin\left(\log\dfrac{x}{10}\right)$.

Řešení:

(a) Pro $x=-1$ a $x=2$ je $y=0$. Jestliže přepíšeme trojčlen $2+x-x^2$ do tvaru

$$2+x-x^2 = 2-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2+\frac{1}{4} = \frac{9}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2,$$

je vidět, že nabývá největší hodnoty pro $x=\frac{1}{2}$ (grafem je parabola s vrcholem $V\left[\frac{1}{2},\frac{9}{4}\right]$ otevřená dolů). Odtud plyne, že oborem hodnot dané funkce je interval $\langle 0, \frac{3}{2}\rangle$ $\left(\frac{3}{2}=\sqrt{\frac{9}{4}}\right)$.

(b) Funkce $1-2\cos x$ nabývá své největší hodnoty např. pro $x=\pi$, kde $y(\pi)=\ln 3$. Dále je např. $1-2\cos\frac{\pi}{3}=0$ a odtud plyne, že oborem hodnot dané funkce je interval $(-\infty, \ln 3)$.

(c) Poněvadž je funkce $\log\frac{x}{10}$ rostoucí s oborem hodnot $(-\infty,+\infty)$, plyne odtud okamžitě, že daná funkce má obor hodnot $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

14. Najděte obor hodnot funkce

(a) $y=-2x^2+x+1$; $\left[\,(-\infty, \frac{9}{8}\rangle\,\right]$

(b) $y=|x-1|$, $x\in\langle 0,5\rangle$; $[\,\langle 0,4\rangle$; v a) a b) si načrtněte grafy daných funkcí$]$

(c) $y=\frac{x^2+4}{x}$, $x\in(-\infty,0)$; $\left[\,(-\infty,-4\rangle\right.$; užijte grafů funkcí $y=x$, $y=\frac{4}{x}$ a nerovnosti $\frac{x^2+4}{x}\le -4$ pro $\left.x\in(-\infty,0)\right]$

(d) $y=\frac{2x}{x^2+9}$; $\left[\left\langle -\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right\rangle\right.$; užijte nerovnosti $\left.\frac{2|x|}{x^2+9}\le\frac{1}{3}\right]$

(e) $y=\sqrt{x(4-x)}$; $[\,\langle 0,2\rangle$; načrtněte si graf funkce $x(4-x)]$

(f) $y=\frac{x^2+2x-2}{x^2-x+1}$; $\left[\,\langle -2,2\rangle\right.$; ukažte, že $\left.-2\le\frac{x^2+2x-2}{x^2-x+1}\le 2\right]$

(g) $y=\log_3(5+4x-x^2)$; $\left[\,(-\infty,2\rangle\right.$; načrtněte si graf funkce $\left.y=5+4x-x^2\right]$

(h) $y=\arccos\frac{2x}{1+x^2}$. $\left[\,\langle 0,\pi\rangle\right.$; ukažte, že $\left.-1\le\frac{2x}{1+x^2}\le 1\right]$

15. Najděte inversní funkci k funkci

a) $y=x^2-2x$, $x\in(-\infty,1)$; b) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$, $x\ne -1$; c) $y=\mathrm{sh}x$, $x\in\mathbf{R}$;

d) $y=\mathrm{th}x$, $x\in\mathbf{R}$; e) $y=2\sin 3x$, $x\in\left\langle -\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right\rangle$; f) $y=2\sin 3x$, $x\in\left\langle \dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right\rangle$;

g) $y=\mathrm{cotg}x$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, $x\ne 0$; h) $y=\begin{cases} x & \text{pro } x\in(-\infty,1); \\ x^2 & \text{pro } x\in\langle 1,4\rangle; \\ 2^x & \text{pro } x\in(4,+\infty). \end{cases}$

Řešení:

(a) Jestliže si načrtneme graf dané funkce (část paraboly s vrcholem v bodě $[1,-1]$), zjistíme, že funkce je v daném intervalu klesající. Inversní funkce k ní tedy existuje a je také klesající. Jednoduchý výpočet nyní dává $y+1=(x-1)^2$, neboli $x-1=-\sqrt{y+1}$ a hledaná inversní funkce je

$$y = 1-\sqrt{x+1} \text{ pro } x \in (-1,+\infty).$$

(b) Funkce $y=\frac{1-x}{1+x}$ není sice ryze monotonní ve svém definičním oboru, ale je prostá, poněvadž z rovnice

$$y=\frac{1-x}{1+x}=-\frac{x-1}{x+1}=-1+\frac{2}{x+1}$$

lze jednoznačně vypočítat

$$x=\frac{2}{y+1}-1=\frac{1-y}{1+y} \text{ pro každé } y \neq -1.$$

Hledaná inversní funkce je tedy

$$y=\frac{1-x}{1+x}\,,\ x\neq -1,$$

tj. funkce původní. Jak poznáte z grafu funkce f, že $f^{-1}=f$?

(c) Poněvadž $y=\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ je součtem dvou rostoucích funkcí, je sama rostoucí v $\mathbf{R}$ a funkce k ní inversní je také rostoucí. Jestliže řešíme rovnici $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ vzhledem k x, dostaneme kvadratickou rovnici pro e^x tvaru $e^{2x}-2ye^x-1=0$, která má dva kořeny $(e^x)_{1,2}=y\pm\sqrt{1+y^2}$. Vzhledem k tomu, že $e^x>0$ pro všechna $x\in\mathbf{R}$, musíme vyloučit záporné znaménko. Odtud $x=y+\sqrt{1+y^2}$ a hledaná inversní funkce je tvaru

$$y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\,,\ x\in\mathbf{R}.$$

(d) Rovnice $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ má pro $y\in(-1,1)$ právě jedno řešení $e^{2x}(1-y)=1+y$, tedy $x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}$; pro $y\in(-\infty,-1\rangle\cup\langle 1,+\infty)$ řešení nemá. Tedy hledaná inversní funkce je

$$y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\,,\ \ x\in(-1,1).$$

(e) Poněvadž funkce $y=2\sin 3x$ je pro $x\in\left\langle -\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right\rangle$ rostoucí (načrtněte si graf) a jejím oborem hodnot je interval $\langle -2,2\rangle$, dostaneme okamžitě, že

$$\frac{y}{2}=\sin 3x\,,\ x=\frac{1}{3}\arcsin\frac{y}{2}$$

a hledaná inversní funkce je

$$y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}\,,\ x\in\langle -2,2\rangle.$$

(f) Funkce $y=2\sin 3x$ je na intervalu $\left\langle \frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right\rangle$ klesající (načrtněte si opět její graf) a platí

$$y=2\sin 3x=2\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right).$$

Dále pro $x\in\left\langle \frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right\rangle$ je $3x-\frac{\pi}{2}\in\langle 0,\pi\rangle$, kde je inversní funkcí k $y=\cos x$ funkce $y=\arccos x$. Odtud jednoduchým výpočtem dostaneme, že inversní funkce má tvar

$$y=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{3}\arccos\frac{x}{2}\,,\ \ x\in\langle -2,2\rangle.$$

(g) Funkce $y = \mathrm{cotg} x$ je pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $x \neq 0$ prostá a existuje k ní tedy funkce inversní. Pro $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ je ekvivalentně $x = \mathrm{arccotg}\, y$ a pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ je

$$y = \mathrm{cotg} x = \mathrm{cotg}(x + \pi)\,, \quad x + \pi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right),$$

tedy ekvivalentně $x = \mathrm{arccotg}\, y - \pi$. hledaná inversní funkce je tedy tvaru

$$y = \begin{cases} \mathrm{arccotg}\, x - \pi & \text{pro} \quad x \in (-\infty, 0)\,, \\ \mathrm{arccotg}\, x & \text{pro} \quad x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

(h) Načrtneme-li si graf dané funkce, zjistíme, že tato funkce je rostoucí pro $x \in \mathbf{R}$ a odtud dostaneme, že inversní funkce je tvaru

$$y = \begin{cases} x & \text{pro} \quad x \in (-\infty, 1)\,, \\ \sqrt{x} & \text{pro} \quad x \in \langle 1, 16 \rangle\,, \\ \log_2 x & \text{pro} \quad x \in (16, +\infty). \end{cases}$$

16. Najděte inversní funkci k funkci

(a) $y = 2x + 3\,,\ x \in \mathbf{R}\,;$ $\left[y = \frac{1}{2}(x - 3)\,,\ x \in \mathbf{R} \right]$

(b) $y = 10^{x+1}\,,\ x \in \mathbf{R}\,;$ $[y = \log x - 1\,,\ x \in (0, +\infty)]$

(c) $y = 1 + \log(x + 2)\,,\ x \in (-2, +\infty)\,;$ $\left[y = 10^{x-1} - 2\,,\ x \in \mathbf{R} \right]$

(d) $y = \log_x 2\,,\ x > 0\,,\ x \neq 1\,;$ $\left[y = 2^{\frac{1}{x}}\,,\ x \neq 0 \right]$

(e) $y = \mathrm{ch} x\,,\ x \in \mathbf{R}\,;$ [inversní funkce neexistuje pro $x \in \mathbf{R}$, ale pro $x \in (-\infty, 0\rangle$ je $y = \ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)\,,\ x \in \langle 1, +\infty)$ pro $x \in \langle 0, +\infty)$ je $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\,,\ x \in \langle 1, +\infty)$]

(f) $y = \mathrm{cth} x\,,\ x \neq 0\,;$ $\left[y = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}\,,\ x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \right]$

(g) $y = \frac{3^x - 2^x}{3^x + 2^x}\,,\ x \in \mathbf{R}\,;$ $\left[y = \log_{\frac{3}{2}} \frac{1+x}{1-x}\,,\ x \in (-1, 1) \right]$

(h) $y = 4 \arcsin \sqrt{1 - x^2}\,,\ x \in \langle -1, 1 \rangle\,;$ [inversní funkce neexistuje pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$, ale pro $x \in \langle -1, 0 \rangle$ je $y = -\cos \frac{x}{4}\,,\ x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$ je $y = \cos \frac{x}{4}\,,\ x \in \langle 0, 2\pi \rangle$]

(i) $y = 3 \cos \frac{x}{2}\,,\ x \in \langle 0, 2\pi \rangle\,;$ $\left[y = 2 \arccos \frac{x}{3}\,,\ x \in \langle -3, 3 \rangle \right]$

(j) $y = 3 \cos \frac{x}{2}\,,\ x \in \langle 2\pi, 4\pi \rangle\,;$ [$y = 3\pi + 2 \arcsin \frac{x}{3}\,,\ x \in \langle -3, 3 \rangle;$ užijte identity $\cos \frac{x}{2} = \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{3\pi}{2}\right)$]

(k) $y = 3 \cos \frac{x}{2}\,,\ x \in \langle -\pi, \pi \rangle\,;$ [inversní funkce neexistuje pro $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$, ale pro $x \in \langle -\pi, 0 \rangle$ je $y = 2 \arcsin \frac{x}{3} - \pi\,,\ x \in \langle 0, 3 \rangle$ pro $x \in \langle 0, \pi \rangle$ je $y = 2 \arccos \frac{x}{3}\,,\ x \in \langle 0, 3 \rangle$]

(l) $y = \mathrm{tg}\, x\,,\ x \in (0, \pi)\,,\ x \neq \frac{\pi}{2}\,;$ $[y =]$

(m) $y = \begin{cases} 2x & \text{pro} \quad x \in (-\infty, 0)\,, \\ x^3 & \text{pro} \quad x \in \langle 0, 1 \rangle\,, \\ 3^x - 2 & \text{pro} \quad x \in (1, +\infty)\,; \end{cases}$ $\left[y = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{pro} \quad x \in (-\infty, 0)\,, \\ \sqrt[3]{x} & \text{pro} \quad x \in \langle 0, 1 \rangle\,, \\ \log_3(x + 2) & \text{pro} \quad x \in (1, +\infty)\,; \end{cases} \right]$ načrtněte si graf dané funkce.

(n) $y = 1 + 2 \sin \frac{x-1}{x+1}\,,\ x \in \left(-\infty, \frac{2+\pi}{2-\pi}\right\rangle \cup \left\langle \frac{2-\pi}{2+\pi}, +\infty\right)\,.$

$\left[y = \frac{1 + \arcsin \frac{x-1}{2}}{1 - \arcsin \frac{x-1}{2}}\,,\ x \in \langle -1, 3 \rangle\,,\ x \neq 1 + 2 \sin 1\,;\ \text{načrtněte si graf funkce } y = \frac{x-1}{x+1} \right]$

17. Rozhodněte, které z následujících funkcí jsou sudé a které liché.

(a) $y = 3x - x^3$; [lichá]
(b) $y = x^4 - 2x^2$; [sudá]
(c) $y = a^x + a^{-x}$, $a > 1$; [sudá]
(d) $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$; [lichá]
(e) $y = 2^{-x^2}$; [sudá]
(f) $y = \sin x - \cos x$; [ani sudá, ani lichá]
(g) $y = x\, \frac{a^x-1}{a^x+1}$, $a > 0$; [sudá]
(h) $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$; [lichá]
(i) $y = \mathrm{ch}(x + \mathrm{sh}x)$; [sudá]
(j) $y = \frac{2^x+2^{-x}}{3^x-3^{-x}}$; [lichá]
(k) $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{x+2}$; [ani sudá, ani lichá]
(l) $y = \frac{|\sin x|}{1-\cos x}$ [sudá]

18. Buďte f, g sudé funkce, φ, ψ liché funkce. Ukažte, že $\varphi \pm \psi$, $f \cdot \varphi$, $\frac{f}{\varphi}$ jsou liché funkce a $f \pm g$, $f \cdot g$, $\varphi \cdot \psi$, $\frac{f}{g}$, $\frac{\varphi}{\psi}$ jsou sudé funkce.
Návod: Užijte definice sudé a liché funkce.

19. Určete, které z následujících funkcí jsou periodické a najděte jejich nejmenší kladné periody.

a) $y = 4\sin \pi x$; b) $y = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$, $\lambda \neq 0$; c) $y = \sin|x|$;

d) $y = \sin^2 x$; e) $y = \sin x^2$; f) $y = \mathrm{tg}(x + \sin x)$; g) $y = \sin x + \sin(\sqrt{2}x)$.

Řešení:

(a) Buď $T > 0$ perioda dané funkce. Potom musí platit $\sin \pi x = \sin \pi(x+T)$ pro všechna $x \in \mathbf{R}$. Poněvadž je

$$\sin\pi(x+T) - \sin\pi x = 2\cos\left(\pi x + \frac{\pi T}{2}\right)\sin\frac{\pi T}{2} = 0 \;\text{ pro } \forall\, x \in \mathbf{R},$$

plyne odtud, že $\sin\frac{\pi T}{2} = 0$ tedy $\pi T = 2k\pi$, $T = 2k$, kde $k \in \mathbf{N}$. Tedy nejmenší kladná perioda dané funkce je $p = 2$.

(b) Je-li $A = B = 0$, je daná funkce konstantní. Je-li $r = \sqrt{A^2+B^2} > 0$, pak existuje $\varphi_0 \in \mathbf{R}$ tak, že

$$y = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x = r\sin(\lambda x + \varphi_0)\,;\ \text{ je }\ \sin\varphi_0 = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\,,\ \cos\varphi_0 = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Stejným postupem jako v předešlém příkladu dostaneme, že tato funkce má nejmenší kladnou periodu $p = \frac{2\pi}{|\lambda|}$.

(c) Nechť $T > 0$ je perioda dané funkce. Potom $\sin(x+T) = \sin x$ pro všechna $x \geq 0$. Jako v příkladu a) odtud plyne, že $T = 2k\pi$, kde $k \in \mathbf{N}$. Nyní $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, tj.

$$1 = \sin\frac{\pi}{2} = \sin\left|-\frac{\pi}{2}\right| = \sin\left|-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right| = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1,$$

což je spor a daná funkce není periodická.

(d) Protože $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, je zřejmé, že nejmenší kladná perioda této funkce je $p = \pi$. Totéž platí pro funkci $y = |\sin x| = \sqrt{\sin^2 x}$.

(e) Buď $T > 0$ perida dané funkce. Potom $\sin T^2 = 0$, tj. $T^2 = k\pi$, $T = \sqrt{k}\sqrt{\pi}$, kde $k \in \mathbf{N}$. Pak

$$0 = f\left(\sqrt{\pi(k+1)}\right) = f\left(\sqrt{\pi(k+1)} - T\right) = f\left(\sqrt{\pi(k+1)} - \sqrt{k\pi}\right),$$

což je spor, poněvadž

$$0 < \sqrt{\pi}\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} < \sqrt{\pi} \text{ a } \sin x^2 > 0 \text{ pro } x \in \left(0, \sqrt{\pi}\right).$$

Daná funkce tedy není periodická.

(f) Je-li $T > 0$ perioda dané funkce, pak musí platit pro všechna $x \in D(f)$

$$0 = \operatorname{tg}\left(x + T + \sin(x+T)\right) - \operatorname{tg}(x + \sin x) = \frac{\sin\left(T + \sin(x+T) - \sin x\right)}{\cos\left(x + T + \sin(x+T)\right)\,\cos(x + \sin x)}.$$

Odtud plyne, že existuje $k \in \mathbf{Z}$ tak, že

$$\sin(x+T) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{T}{2}\right)\sin\frac{T}{2} = k\pi - T,$$

tj. funkce $2\cos\left(x + \frac{T}{2}\right)\sin\frac{T}{2}$ je konstantní. To je možné jen tehdy, je-li $T = 2l\pi$, $k = 2l$, $l \in \mathbf{N}$. Tedy nejmenší kladná perioda dané funkce je $p = 2\pi$.

(g) Buď $T > 0$ perioda dané funkce. Potom platí

$$\sin(x+T) + \sin\left(x\sqrt{2} + T\sqrt{2}\right) = \sin x \cos T + \cos x \sin T +$$

$$+ \sin\sqrt{2}x\cos\sqrt{2}T + \cos\sqrt{2}x\sin\sqrt{2}T = \sin x + \sin\sqrt{2}x.$$

Tuto rovnost lze splnit jedině tak, že

$$\cos T = 1\,,\ \sin T = 0 \text{ a zároveň } \cos\sqrt{2}T = 1\,,\ \sin\sqrt{2}T = 0.$$

To však znamená, že

$$T = 2k\pi \text{ a } \sqrt{2}T = 2l\pi\,, \text{ kde } k, l \in \mathbf{N}.$$

Odtud plyne, že $\frac{l}{k} = \sqrt{2}$, což není možné, poněvadž podíl $\frac{l}{k}$ je racionální číslo. Tedy daná funkce není periodická.

Poznámky: i. V předchozím příkladu jsme užili netriviálního faktu, že funkce

$$\cos x\,,\ \sin x\,,\ \cos\sqrt{2}x\,,\ \sin\sqrt{2}x$$

jsou lineárně nezávislé v $\mathbf{R}$.

ii. Nechť funkce f_1 má periodu $T_1 > 0$, f_2 periodu $T_2 > 0$. Potom má funkce $f = f_1 + f_2$ periodu $T > 0$, kde T je společný násobek period T_1, T_2 tj. existují $m, n \in \mathbf{N}$ tak, že $T = mT_1 = nT_2$. Totéž platí i pro více sčítanců. Tohoto výsledku můžeme využít v příkladech 20 c) a j).

iii. Je možné ukázat, že funkce $y = \sin\lambda x + \sin\mu x$ $(\lambda, \mu > 0)$ je periodická právě když je podíl $\frac{\lambda}{\mu}$ racionální číslo. Je-li $\frac{\lambda}{\mu} \in \mathbf{Q}$, pak je $y = \sin\lambda x + \sin\mu x$ periodická podle předchozí poznámky. Obrácené tvrzení je však podstatně komplikovanější a nebudeme jej zde provádět.

20. Určete, které z následujících funkcí jsou periodické a najděte jejich nejmenší kladné periody, je-li

(a) $y = -\cos\frac{x-1}{2}$; $[\,4\pi\,]$

(b) $y = \sin\frac{2x+3}{6\pi}$; $\left[\,6\pi^2\,\right]$

(c) $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$; $[\,2\pi\,]$

(d) $y = \cos 2x \cos 6x$; $\left[\,\frac{\pi}{2}\,,\right.$ vyjádřete součin jako rozdíl sinů$\left.\right]$

(e) $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$; $[\,\pi\,]$

(f) $y = \operatorname{tg}\sqrt{x}$; [neperiodická]

(g) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$; $\left[\,\frac{\pi}{2}\,,\right.$ vyjádřete $\sin^4 x$ a $\cos^4 x$ pomocí $\cos 2x$ a $\left.\cos 4x\right]$

(h) $y = \sin(\cos x)$; $[\,2\pi\,]$

(i) $y = \cos(\sin x)$; $[\,\pi\,]$

(j) $y = 8\sin\frac{9x}{8} + 2\cos\frac{3x}{2}$. $\left[\,\frac{16\pi}{3}\,\right]$

Kapitola 4

Limita a spojitost funkce.

1. Pomocí definice limity funkce ukažte, že

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x^2-4x} = 2\,; \qquad\qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+1}} = 1\,.$$

Řešení:

(a) Máme ukázat, že

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in (4-\delta, 4+\delta)\,,\ x \neq 4\,,\ \text{ je } \left|\frac{x^2-16}{x^2-4x} - 2\right| < \varepsilon.$$

Poněvadž však

$$\left|\frac{x^2-16}{x^2-4x} - 2\right| = \left|\frac{x-4}{x}\right| < \frac{|x-4|}{2} \ \text{ pro } \ x > 2,$$

plyne odtud,že jakmile $0 < |x-4| < \delta \le 2$, potom stačí volit $\delta = \min(2\varepsilon, 2)$, aby

$$\left|\frac{x^2-16}{x^2-4x} - 2\right| < \frac{\delta}{2} \le \varepsilon.$$

(b) Podle definice

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \text{Ł} > 0 \ \forall x > L \ \text{ platí } \ \left|\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+1}} - 1\right| < \varepsilon.$$

Pro $x > 0$ je však

$$\left|\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+1}} - 1\right| = \frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x}+1+\sqrt{x+1}\right)} \le$$

$$\le \frac{2}{\sqrt{x}+1+\sqrt{x+1}} \le \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Stačí tedy, aby $\frac{2}{\sqrt{x}} < \varepsilon$. Tato nerovnost však platí pro $x > \frac{4}{\varepsilon^2}$. V definici limity můžeme tedy zvolit $L = \frac{4}{\varepsilon^2}$.

2. Pomocí definice limity dokažte, že

(a) $\lim\limits_{x\to 1_-} \sqrt{1-x^2} = 0\,;$ $\qquad$ $\left[\text{volte například } \delta = \min\left(\frac{\varepsilon^2}{2}, 2\right)\right]$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty\,.$ $\qquad$ $\left[\text{stačí položit } \delta = \frac{1}{\sqrt{K}}\right]$

3. Ukažte, že následující limity neexistují

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\,; \qquad\qquad \text{b)}\quad \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}\,; \qquad\qquad \text{c)}\quad \lim_{x\to +\infty} \cos x\,.$$

Řešení:

(a) Z grafu funkce $y = \frac{1}{x}$ je vidět, že

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{1}{x} = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to 0_-} \frac{1}{x} = -\infty$$

(ověřte toto tvrzení též pomocí definice), tedy daná limita neexistuje.

(b) Zvolme

$$a_n = \frac{1}{n\pi}\,,\ \ b_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}\,,\ \ \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

Potom je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, ale

$$\sin\frac{1}{a_n} = \sin n\pi = 0 = ;\ \ \sin\frac{1}{b_n} = \sin\frac{(4n+1)\pi}{2} = 1\,,$$

tedy neexistuje ani $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$.

(c) Jestliže zvolíme $a_n = 2n\pi$, $b_n = \frac{2n+1}{2}\pi$, potom platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, ale $\cos a_n = 1$, $\cos b_n = 0$, tedy daná limita opět neexistuje.

Poznámka: Je možné ukázat, že pro libovolnou periodickou funkci f, která není konstantní, neexistují $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ani $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

4. Ukažte, že následující limity neexistují.

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2n+1}}\,,\ n\in\mathbf{N}\,; \qquad \text{b)}\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x\,; \qquad \text{c)}\quad \lim_{x\to 0} \operatorname{cotg} x\,;$$

$$\text{d)}\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2}}{x}\,; \qquad \text{e)}\quad \lim_{x\to 0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x}.$$

Návod: Ukažte, že jednostranné limity jsou v daných bodech různé.

5. Vypočtěte

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}\,; \qquad \text{b)}\quad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}\,; \qquad \text{c)}\quad \lim_{x\to 1} \frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}\,;$$

$$\text{d)}\quad \lim_{x\to 1} \left\{\frac{3}{1-x^3} + \frac{1}{x-1}\right\}; \qquad \text{e)}\quad \lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1}\,,\ m,n\in\mathbf{N}\,; \qquad \text{f)}\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4}{x^2-x-2}\,;$$

$$\text{g)}\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4-1}}\,; \qquad \text{h)}\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2+\sqrt{x^3+x^4}}}{\sqrt{x^2+4}}\,; \qquad \text{i)}\quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+6}-x}{\sqrt[6]{x^4+2}+x}\,.$$

Řešení:

(a) Je
$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{2}{3}.$$

(b) Použitím vzorce pro $(a+b)^5$ dostaneme
$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}=\lim_{x\to0}\frac{1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5-1-5x}{x^2(1+x^3)}=$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{10+10x+5x^2+x^3}{1+x^3}=10.$$

(c) Analogicky jako v předchozím příkladu platí
$$\lim_{x\to1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}=\lim_{x\to1}\frac{x^{99}+x^{98}+\cdots+x^2+x-1}{x^{49}+x^{48}+\cdots+x^2+x-1}=\frac{98}{48}=\frac{49}{24}.$$

(d) Je
$$\lim_{x\to1}\left\{\frac{3}{1-x^3}+\frac{1}{x-1}\right\}=\lim_{x\to1}\frac{3-x^2-x-1}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to1}\frac{(1-x)(2+x)}{(1-x)(1+x+x^2)}=1.$$

(e) Platí
$$\lim_{x\to1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}=\frac{m}{n},$$
jestliže využijeme vzorce pro rozklad rozdílu a^k-b^k, $k\in\mathbf{N}$.

(f) Jako u limit posloupností vydělením čitatele i jmenovatele nejvyšší mocninou ve jmenovateli dostaneme
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4}{x^2-x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{4}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=1.$$

(g) Vydělením čitatele i jmenovatele x dostaneme
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{9x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[4]{x^4+1}\sqrt[5]{x^4-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}-\sqrt[3]{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}}{\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^4}}-\sqrt[5]{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^5}}}=3.$$

(h) Analogickým postupem dostaneme
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+\sqrt{x^3+x^4}}}{\sqrt{x^2+4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4+\sqrt{\frac{1}{x}+1}}}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}=\sqrt{5}.$$

(i) Jestliže vydělíme čitatele i jmenovatele x, dostaneme
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+6}-x}{\sqrt[6]{x^4+2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2+6}}{x}-1}{\frac{\sqrt[6]{x^4+2}}{x}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{6}{x^2}}-1}{-\sqrt[6]{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^6}}+1}=-2.$$

(Je $x<0$).

6. Vypočtěte následující limity

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+5}{x^2-3}$; [9]

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; [1]

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^7+5x^6+4x^3}{x^7+2x^3}$; [2]

(d) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$; $\left[-\frac{1}{2}\right]$

(e) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$; $\left[\frac{1}{2}\right]$

(f) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$; [1]

(g) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4-2x+1}{x^8-2x+1}$; $\left[\frac{1}{3}\right]$

(h) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4-x^3+x^2-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$; [2]

(i) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$; [6]

(j) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$; $\left[\frac{1}{4}\right]$

(k) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$; $\left[\frac{1}{3}\right]$

(l) $\lim\limits_{x\to -5} \frac{(x^2+2x)^2-14(x^2+2x)-15}{x^4-29x^2+100}$; $\left[\frac{64}{105}\right]$

(m) $\lim\limits_{x\to 2} \left\{\frac{2}{2x-x^2} + \frac{1}{x^2-3x+2}\right\}$; $\left[-\frac{1}{2}\right]$

(n) $\lim\limits_{x\to 1} \left\{\frac{x^2-4x+6}{x^2-5x+4} + \frac{x-4}{3x^2-9x+6}\right\}$; [1]

(o) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{(x+5)^5+(x+6)^5+(x+7)^5}{x^5+5^5}$; [3]

(p) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$; $\left[5^{-5}\right]$

(q) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{(x+1)^2(3-7x)^2}{(2x-1)^4}$; $\left[\frac{49}{16}\right]$

(r) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{(2x^3+7x-1)^6}{(2x^6-13x^2+x)^3}$; [8]

(s) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{(1+x^{11}+7x^{13})^3}{(1+x^4)^{10}}$; [0]

(t) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$; [1]

(u) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$; $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

(v) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left\{\frac{x^3+3x^2}{x^2+1} - x\right\}$; [3]

(w) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left\{\frac{x^2}{2x+1} + \frac{x^3+4x^2-2}{1-2x^2}\right\}$. $\left[-\frac{9}{4}\right]$

Návod: V příkladech d) - l) rozložte čitatele i jmenovatele na součin, v příkladech m) a n) sečtěte příslušné zlomky, v příkladech o) - u) vydělte čitatele i jmenovatele nejvyšší mocninou ve jmenovateli, ve cvičeních v) a w) sečtěte příslušné zlomky.

7. Vypočtěte

a) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$; c) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{32+x}-2}{x}$;

g) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[k]{x}-1}$, $n,k\in\mathbf{N}$; h) $\lim\limits_{x\to 1}\left\{\dfrac{n}{1-x^n}-\dfrac{k}{1-x^k}\right\}$, $n,k\in\mathbf{N}$;

i) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+14}+x}{\sqrt{x^2-2}+x}$; j) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{4}{x}}-\sqrt[4]{1+\frac{3}{x}}}{1-\sqrt[5]{1-\frac{5}{x}}}$;

k) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+4x}-\sqrt[3]{x^3-3x^2+4}\right)$; l) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$.

Řešení:

(a) Jestliže doplníme čitatele na rozdíl čtverců, dostaneme

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25}=\lim_{x\to 5}\frac{-3(x-5)}{(x-5)(x+5)\left(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1}\right)}=-\frac{3}{80}.$$

(b) Doplněním jmenovatele na rodíl třetích mocnin dostáváme

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1\right)}{x}=3.$$

(c) Platí

$$\lim_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to -8}\frac{-(x+8)}{(2+\sqrt[3]{x})\left(\sqrt{1-x}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -8}\frac{-\left(2+\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4\right)}{(2+\sqrt[3]{x})\left(\sqrt{1-x}+3\right)}=-\frac{12}{6}=-2,$$

jestliže využijeme vzorce $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

(d) Doplněním čitatele na rozdíl třetích mocnin dostaneme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\left(1+2\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{(27+x)^2}+\sqrt[3]{27^2-x^2}+\sqrt[3]{(27-x)^2}\right)}=\frac{2}{27}.$$

(e) Danou limitu přepíšeme do tvaru

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1+1-\sqrt[4]{1-2x}}{x(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x(x+1)}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[4]{1-2x}}{x(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x(1+x)\left\{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right\}}+$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(1+x)\left\{\sqrt[4]{(1-2x)^3}+\sqrt{1-2x}+\sqrt[4]{1-2x}+1\right\}}=\frac{1}{2};$$

využili jsme rozkladu výrazu $\alpha^3-\beta^3$, resp. $\alpha^4-\beta^4$ na součin.

(f) Doplněním čitatele na rozdíl $\alpha^5-\beta^5$ dostaneme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{32+x}-2}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left\{\sqrt[5]{(32+x)^4}+2\sqrt[5]{(32+x)^3}+4\sqrt[5]{(32+x)^2}+8\sqrt[5]{32+x}+16\right\}}=\frac{1}{80}.$$

(g) Rozkladem výrazu $\alpha^p-\beta^p$ $(p\in\mathbf{N})$ na součin dostaneme

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[k]{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt[k]{x^{k-1}}+\sqrt[k]{x^{k-2}}+\cdots+\sqrt[k]{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}}+\cdots+\sqrt[n]{x}+1\right)}=\frac{k}{n}.$$

(h) Limitu vypočteme nejdříve pro $k=1$. Platí

$$\lim_{x\to 1}\left\{\frac{n}{1-x^n}-\frac{1}{1-x}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{n-(1+x+\cdots+x^{n-1})}{(1-x)(1+x+\cdots+x^{n-1})}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)+(1-x^2)+\cdots+(1-x^{n-1})}{(1-x)(1+x+\cdots+x^{n-1})}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1+(1+x)+\cdots+(1+x+\cdots+x^{n-2})}{1+x+\cdots+x^{n-1}}=\frac{1+2+\cdots+(n-1)}{n}=\frac{n-1}{2}$$

podle vzorce pro součet prvých n členů aritmetické posloupnosti a rozkladu výrazů $1-x^i$ $\ i=2,\dots,n$ na součin. Pomocí tohoto výsledku dostaneme

$$\lim_{x\to 1}\left\{\frac{n}{1-x^n}-\frac{k}{1-x^k}\right\}=\lim_{x\to 1}\left[\left\{\frac{n}{1-x^n}-\frac{1}{1-x}\right\}-\left\{\frac{k}{1-x^k}-\frac{1}{1-x}\right\}\right]=$$

$$\frac{n-1}{2}-\frac{k-1}{2}=\frac{n-k}{2}.$$

(i) Platí

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+14}+x}{\sqrt{x^2-2}+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{14\left(\sqrt{x^2-2}-x\right)}{-2\left(\sqrt{x^2+14}-x\right)}=-7\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}+1}{\sqrt{1+\frac{14}{x^2}}+1}=-7,$$

jestliže nejdříve doplníme čitatele i jmenovatele na rozdíl čtverců a pak je vydělíme $-x$.

(j) Zavedením nové proměnné $\frac{1}{x} = t$ dostaneme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{4}{x}} - \sqrt[4]{1+\frac{3}{x}}}{1-\sqrt[5]{1-\frac{5}{x}}} = \lim_{t\to 0_+} \frac{\sqrt[3]{1+4t} - \sqrt[4]{1+3t}}{1-\sqrt[5]{1-5t}} = \lim_{t\to 0_+} \frac{\sqrt[3]{1+4t}-1}{1-\sqrt[5]{1-5t}} +$$

$$+ \lim_{t\to 0_+} \frac{1-\sqrt[4]{1+3t}}{1-\sqrt[5]{1-5t}} = \lim_{t\to 0_+} \frac{4t\left(1+\sqrt[5]{1-5t}+\sqrt[5]{(1-5t)^2}+\sqrt[5]{(1-5t)^3}+\sqrt[5]{(1-5t)^4}\right)}{5t\left(\sqrt[3]{(1+4t)^2}+\sqrt[3]{1+4t}+1\right)} +$$

$$+ \lim_{t\to 0_+} \frac{-3t\left(1+\sqrt[5]{1-5t}+\sqrt[5]{(1-5t)^2}+\sqrt[5]{(1-5t)^3}+\sqrt[5]{(1-5t)^4}\right)}{5t\left(1+\sqrt[4]{1+3t}+\sqrt[4]{(1+3t)^2}+\sqrt[4]{(1+3t)^3}\right)} = \frac{4}{3} - \frac{3}{4} = \frac{7}{12},$$

jestliže příslušné rozdíly doplňujeme postupně na $\alpha^3 - \beta^3$, $\alpha^4 - \beta^4$ a $\alpha^5 - \beta^5$.

Poznámka: Výpočet můžeme zkrátit, jestliže si předem vypočteme $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+\alpha t}-1}{t}$ pro $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 0$. Platí totiž

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+\alpha t}-1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\alpha t}{t\left[(1+\alpha t)^{\frac{n-1}{n}} + (1+\alpha t)^{\frac{n-2}{n}} + \cdots + 1\right]} = \frac{\alpha}{n}$$

a odtud

$$\lim_{t\to 0_+} \frac{\sqrt[3]{1+4t} - \sqrt[4]{1+3t}}{1-\sqrt[5]{1-5t}} = \lim_{t\to 0_+} \left[\frac{\sqrt[3]{1+4t}-1}{t} - \frac{\sqrt[4]{1+3t}-1}{t}\right] \cdot \frac{-t}{\sqrt[5]{1-5t}-1} =$$

$$= \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{-5}{-5} = \frac{7}{12}.$$

(k) Doplněním na rozdíl třetích mocnin dostaneme

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+4x} - \sqrt[3]{x^3-3x^2+4}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2+4x-4}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2+4x)^2} + \sqrt[3]{x^3+3x^2+4x}\cdot\sqrt[3]{x^3-3x^2+4} + \sqrt[3]{(x^3-3x^2+4)^2}} = 2,$$

jestliže čitatele i jmenovatele vydělíme x^2.

(l) Danou limitu přepíšeme do tvaru

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt{x^2-2x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+3x^2} - x\right) + \lim_{x\to+\infty} \left(x - \sqrt{x^2-2x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3+3x^2} + x^2} + \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x+\sqrt{x^2-2x}} = 2.$$

Poznámka: Předchozí limitu můžeme počítat analogicky jako ve cvičení j). Zavedeme-li substituci $t = \frac{1}{x}$, dostaneme

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt{x^2-2x}\right) = \lim_{x\to+\infty} x \left\{\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}} - \sqrt{1-\frac{2}{x}}\right\} =$$

$$= \lim_{t\to 0_+} \frac{\sqrt[3]{1+3t} - \sqrt{1-2t}}{t}$$

a pro další výpočet využijeme $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+\alpha t}-1}{t} = \frac{\alpha}{n}$.

8. Vypočtěte limitu

(a) $\lim\limits_{x\to a} \frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$, $a>0$; $[2\sqrt{a}]$

(b) $\lim\limits_{x\to 6} \frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$; $\left[\frac{1}{4}\right]$

(c) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$; $[3]$

(d) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; $\left[\frac{4}{3}\right]$

(e) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$; $\left[-\frac{1}{16}\right]$

(f) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{7+2x-x^2}-\sqrt{1+x+x^2}}{2x-x^2}$; $\left[\frac{\sqrt{7}}{4}\right]$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sqrt{x^2+x+1}-2-x}{x^2}$; $\left[\frac{3}{4}\right]$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$; $\left[\frac{3}{2}\right]$

(i) $\lim\limits_{x\to -8} \frac{\sqrt[3]{9+x}+\sqrt[3]{x+7}}{\sqrt[3]{15+2x}+1}$; $[1]$

(j) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$; $\left[\frac{5}{3}\right]$

(k) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{a+x}-\sqrt[n]{a-x}}{x}$, $n\in\mathbf{N}$, $a>0$; $\left[\frac{2\sqrt[n]{a}}{na}\right]$

(l) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$, $m,n\in\mathbf{N}$, $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$; $\left[\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}\right]$

(m) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}\right)$; $[0]$

(n) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{4x^4+13x^2-7}-2x^2\right)$; $\left[\frac{13}{4}\right]$

(o) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^4+2x^2+1}-\sqrt{x^4-2x^2-1}\right)$; $[2]$

(p) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}}-x\right)$; $\left[\frac{1}{2}\right]$

(q) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^4+8x^2+3}-\sqrt{x^4+x^2}\right)$; $\left[\frac{7}{2}\right]$

(r) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\left(\sqrt{x^4+x^2\sqrt{x^4+1}}-\sqrt{2x^4}\right)$; $\left[\frac{\sqrt{2}}{8}\right]$

Návod: V příkladech a) - g) doplňte rozdíly odmocnin na rozdíly čtverců; v příkladech h) a i) užijte rozkladu výrazů $\alpha^2-\beta^2$, $\alpha^3-\beta^3$, $\alpha^3+\beta^3$ na součin; v příkladech j) a k) využijte rozkladu $\alpha^k-\beta^k$, $k\in\mathbf{N}$. V příkladu l) doplňte v čitateli $+1-1$ a užijte postupu z poznámky k příkladu 7j); v příkladech m) - r) doplňte rozdíly na rozdíl čtverců.

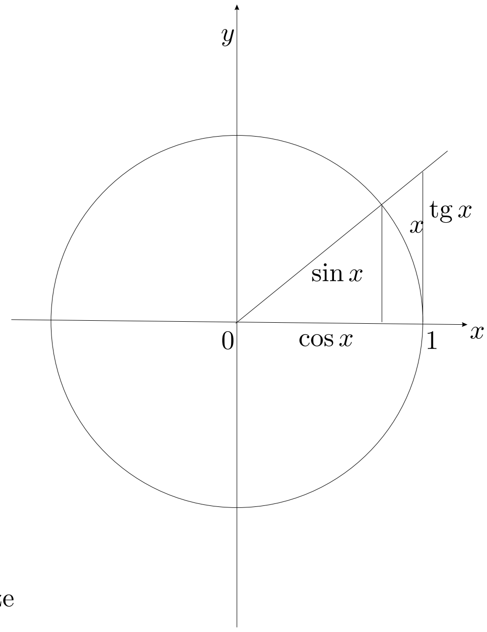
9. Ukažte, že

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}=1$; b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}=1$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}=1$.

Řešení:

(a) Ukážeme nejdříve, že $\lim\limits_{x\to 0_+} \frac{\sin x}{x} = 1 \ \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$.



Z obrázku plyne, že pro obsahy pravoúhlých trojúhelníků s výškami $\sin x$ a $\operatorname{tg} x$ a pro obsah kruhové výseče, odpovídající oblouku x platí

$$\frac{1}{2}\sin x\cos x \le \frac{1}{2}x \le \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{\cos x},$$

neboli po jednoduché úpravě

$$\cos x \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x}.$$

Přechodem k převráceným hodnotám dostaneme dále

$$\frac{1}{\cos x} \ge \frac{\sin x}{x} \ge \cos x.$$

Poněvadž $\lim\limits_{x\to 0_+} \cos x = 1$, plyne odtud, že $\lim\limits_{x\to 0_+} \frac{\sin x}{x} = 1$. Funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je sudá a odtud dostaneme, že

$$\lim_{x\to 0_-}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0_+}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

(b) i. Buď $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná posloupnost taková, že $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ a označme $k_n = [x_n]$. Potom pro všechna $n \in \mathbf{N}$ platí

$$k_n \le x_n < k_n + 1$$

a odtud pro dostatečně velká n

$$1 + \frac{1}{k_n+1} \le 1 + \frac{1}{x_n} \le 1 + \frac{1}{k_n}.$$

Dále

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} \le \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \le \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}.$$

(Nejmenší číslo umocňujeme na nejmenší exponent a největší číslo na největší exponent. Základy všech mocnin jsou při tom větší než 1.) Limitním přechodem dostaneme, že

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{-1} = e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}\left(1+\frac{1}{k_n}\right) = e$$

a tedy

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

ii. Položme $x = -t - 1$. Potom platí

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-t-1} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1} = e.$$

iii. Je

$$\lim_{x\to0_+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$$

a analogicky

$$\lim_{x\to0_-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e.$$

Odtud plyne, že $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

(c) Platí

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x) = \lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Poněvadž je $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, plyne odtud, že

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln e = 1.$$

(d) Položme $e^x - 1 = t$. Potom je

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{t\to0}\frac{t}{\ln(1+t)} = 1.$$

10. Vypočtěte

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$, $\alpha,\beta\in\mathbf{R},\beta\neq0$; c) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin kx}{\sin nx}$, $k,n\in\mathbf{N}$;

d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos3x-\cos7x}{x^2}$; e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$; f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$;

g) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos3x^3-1}{\sin^6 2x}$; h) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$; i) $\lim\limits_{x\to0_+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$;

j) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}(a+2x)-2\operatorname{tg}(a+x)+\operatorname{tg}a}{x^2}$, $x\neq\dfrac{(2k+1)\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$; k) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\,\cos2x\,\cos3x}{1-\cos x}$.

Řešení:

(a) Platí

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}.$$

(b) Je

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x} = \lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\cdot\frac{\beta x}{\sin\beta x}\cdot\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

(c) Položíme-li $x-\pi = t$, dostaneme

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin kx}{\sin nx} = \lim_{t\to0}\frac{\sin k(t+\pi)}{\sin n(t+\pi)} = \lim_{t\to0}\frac{\sin kt\,\cos k\pi}{\sin nt\,\cos n\pi} = \lim_{t\to0}\frac{(-1)^k\sin kt}{(-1)^n\sin nt} =$$

$$= (-1)^{k-n}\lim_{t\to0}\frac{\sin kt}{\sin nt} = (-1)^{k-n}\frac{k}{n}$$

podle předchozího příkladu.

(d) Použitím vzorce pro $\cos\alpha - \cos\beta$ dostaneme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x\,\sin 5x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 20 = 20.$$

(e) Položme $y = \operatorname{arctg} x$. Potom je $x = \operatorname{tg} y$ a platí tedy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg} y} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}\cdot\cos y = 1.$$

(f) Je

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\cdot\frac{\sin 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x}{(\cos x + \sin x)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} = \frac{1}{2}.$$

(g) Platí

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x^3 - 1}{\sin^6 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{(2x)^6}{\sin^6 2x}\cdot\frac{1-\cos 3x^3}{(3x^3)^2}\cdot\left(-\frac{9}{64}\right) = -\frac{9}{128},$$

vzhledem k tomu, že

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2x)^6}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{\sin 2x}\right)^6 = 1 \text{ a } \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x^3}{(3x^3)^2} = \frac{1}{2}$$

podle příkladu a).

(h) Danou limitu přepíšeme do tvaru

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x} - 1 + 1 - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{1-\cos x} - \frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos x}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}} - \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12}.$$

(i) Doplněním čitatele i jmenovatele na rozdíl čtverců dostáváme

$$\lim_{x\to 0_+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0_+}\frac{1-\cos x}{1-\cos^2\sqrt{x}}\cdot\frac{1+\cos\sqrt{x}}{1+\sqrt{\cos x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0_+}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x}{\sin^2\sqrt{x}}\cdot\frac{x(1+\cos\sqrt{x})}{1+\sqrt{\cos x}} = 0.$$

(j) Danou limitu přepíšeme do tvaru

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(a+2x) - 2\operatorname{tg}(a+x) + \operatorname{tg} a}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(a+2x) - \operatorname{tg}(a+x) - [\operatorname{tg}(a+x) - \operatorname{tg} a]}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left\{\frac{\sin(a+2x)\cos(a+x) - \sin(a+x)\cos(a+2x)}{\cos(a+2x)\cos(a+x)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin(a+x)\cos a - \sin a\,\cos(a+x)}{\cos(a+x)\cos a}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left\{\frac{\sin x}{\cos(a+2x)\cos(a+x)} - \frac{\sin x}{\cos(a+x)\cos a}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\cos a - \cos(a+2x)}{x\cos(a+2x)\cos(a+x)\cos a} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{2\sin x \sin(a+x)}{x\cos(a+2x)\cos(a+x)\cos a} =$$

$$2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{\sin(a+x)}{\cos a\,\cos(a+x)\cos(a+2x)} = \frac{2\sin a}{\cos^3 a}.$$

Poznámka: Až se v následující kapitole seznámíme s pojmeme derivace, uvidíme, že předchozí limita není nic jiného než druhá derivace funkce $\operatorname{tg} x$ v bodě a, vyjádřená pomocí definice.

(k) Protože platí $\cos x\,\cos 2x = \frac{1}{2}(\cos x + \cos 3x)$, je dále

$$\cos x\,\cos 2x\,\cos 3x = \frac{1}{2}(\cos x + \cos 3x)\cos 3x = \frac{1}{4}(\cos 2x + \cos 4x) + \frac{1}{2}\cos^2 3x$$

a danou limitu můžeme přepsat do tvaru

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\,\cos 2x\,\cos 3x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}(1-\cos 2x)+\frac{1}{4}(1-\cos 4x)+\frac{1}{2}(1-\cos^2 3x)}{1-\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}\left\{\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2} + \frac{1-\cos 4x}{(4x)^2}\cdot 4 + \frac{\sin^2 3x}{(3x)^2}\cdot\frac{9}{2}\right\} =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 4 + 1\cdot\frac{9}{2}\right) = 14.$$

11. Vypočtěte

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}$; [0, využijte omezenosti funkce $\sin x$]

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x}$, $\alpha\in\mathbf{R}$; [α]

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$; [1, užijte postupu z příkladu 10e)]

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 6x-\sin 7x}$; [$-1$, užijte vzorce pro $\sin\alpha-\sin\beta$]

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$; [4, užijte vzorce pro $\cos\alpha-\cos\beta$]

(f) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi^2-x^2}$;

[$\frac{1}{2\pi}$, zaveďte novou proměnnou $t=\pi-x$ a užijte vztahu $\sin(\pi-t)=\sin t$]

(g) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$; [$\frac{1}{2}$]

(h) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2 x+|sinx-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$; [$-3$, rozložte čitatele i jmenovatele]

(i) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$; [$\frac{1}{\sqrt{3}}$, převeďte na limitu v bodě 0]

(j) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)}{\sqrt{3}-2\cos x}$; [1, převeďte na limitu v bodě 0]

(k) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$; [$\frac{4}{3}$, doplňte rozdíl ve jmenovateli na rozdíl čtverců]

(l) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$; [$\frac{1}{4}$ doplňte čitatele na rozdíl čtverců]

(m) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[4]{\sin x}-\sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x}$; [$\frac{1}{24}$, přičtěte a odečtěte 1 v čitateli a rozdělte limitu na 2 limity]

(n) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$, $p\in\mathbf{R}-\{0\}$; [$\frac{1}{p}$, vydělte čitatele i jmenovatele x]

(o) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}$; $\left[\,\frac{2}{\pi}\,,\;\text{položte } t=1-x\,\right]$

(p) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$; $\left[\,0\,,\;\text{užijte vzorce pro } \sin\alpha-\sin\beta\,\right]$

(q) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$; $\left[\,\sqrt{2}\,,\;\text{vydělte čitatele i jmenovatele } x^2\,\right]$

(r) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin\,a}{x^2}$; $[\,-\sin a\,,$ napište čitatele ve tvaru $[\sin(a+2x)-\sin(a+x)]-[\sin(a+x)-\sin a]$ a použijte vzorce pro $\sin\alpha-\sin\beta\,]$

(s) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,2x-3\arcsin 4x}{\sin 5x-6\mathrm{arctg}\;7x}$; $\left[\,\frac{10}{37}\,,\;\text{vydělte čitatele i jmenovatele } x\,\right]$

(t) $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\frac{2}{\sin x\,\sin 2x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right\}$; $\left[\,\frac{1}{2}\,,\;\text{sečtěte oba zlomky}\,\right]$

12. Vypočtěte limity

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\mathrm{tg}\,x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$;

d) $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$, $a\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}$; e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}$;

f) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}$, $a>0$; g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(2+e^{3x}\right)}{\ln\left(3+e^{2x}\right)}$; h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}{\ln\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)}$;

i) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\log(x+h)+\log(x-h)-2\log x}{h^2}$, $x>0$; j) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$, $b\neq 0$;

k) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}$, $a>0$; l) $\lim\limits_{x\to} a\frac{a^x-x^a}{x-a}$, $a>0$; m) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$;

n) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^{n}$, $a,b>0$; o) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^{n}$, $a,b>0$;

p) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a,b,c>0$; q) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a,b>0$.

Řešení:

(a) Poněvadž je $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{2x-1}=\frac{1}{2}$, existuje $R>0$ tak, že pro všechna $x\geq R$ platí

$$0\leq\frac{x+2}{2x-1}\leq\frac{3}{4}\quad\text{a tedy}\quad 0\leq\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}\leq\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Odtud plyne, že $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}=0.$

(b) Platí

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x^2-2}\right)^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left\{\left(1+\frac{3}{x^2-2}\right)^{\frac{x^2-2}{3}}\right\}^{\frac{3x^2}{x^2-2}}.$$

Poněvadž

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x^2-2}\right)^{\frac{x^2-2}{3}}=e\ \text{ a }\ \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^2-2}=3\,,\ \text{ je }\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}=e^3.$$

Poznámka: Limitovanou funkci lze také zapsat jako mocninu o základu e :

$$\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2} = e^{x^2 \ln \frac{x^2+1}{x^2-2}}.$$

Protože

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \ln\frac{x^2+1}{x^2-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\frac{x^2+1}{x^2-2}}{\frac{x^2+1}{x^2-2}-1} \cdot \frac{3x^2}{x^2-2} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} \cdot \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^2-2} = 3$$

(substitucí $t = \frac{3}{x^2-2}$ podle příkladu 9c)), máme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2} = e^3$. Tento postup lze použít i v příkladech 12c) - e) i jinde.

(c) Platí

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0}\left\{\left(1+\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1+\sin x}{\operatorname{tg} x-\sin x}}\right\}^{\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin x(1+\sin x)}}.$$

Poněvadž

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin x(1+\sin x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{\sin x(1+\sin x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x(1+\sin x)} = 0,$$

je daná limita rovna $e^0 = 1$.

(d) Platí

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x\to a}\left\{\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{\sin a}{\sin x-\sin a}}\right\}^{\frac{\sin x-\sin a}{(x-a)\sin a}} = e^{\operatorname{cotg} a},$$

poněvadž

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{(x-a)\sin a} = \frac{1}{\sin a}\lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-2}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a} =$$

$$= \frac{1}{\sin a}\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cdot \lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2} = \operatorname{cotg} a.$$

(e) Je

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to 0_+}(\sin t+\cos t)^{\frac{1}{t}} =$$

$$= \lim_{t\to 0_+}\left\{(1+\sin t+\cos t-1)^{\frac{1}{\sin t+\cos t-1}}\right\}^{\frac{\sin t+\cos t-1}{t}} = e,$$

vzhledem k tomu, že

$$\lim_{t\to 0_+}\frac{\sin t+\cos t-1}{t} = \lim_{x\to 0_+}\frac{\sin t}{t} - \lim_{x\to 0_+}\frac{1-\cos t}{t^2}\cdot t = 1-\frac{1}{2}\cdot 0 = 1.$$

(f) Jestliže položíme $t = x-a$, dostaneme, že

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+a)-\ln a}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(\frac{t}{a}+1\right)}{\frac{t}{a}}\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{a}.$$

(g) Platí

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(2+e^{3x}\right)}{\ln\left(3+e^{2x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left[e^{3x}\left(2e^{-3x}+1\right)\right]}{\ln\left[e^{2x}\left(3e^{-2x}+1\right)\right]} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x+\ln\left(1+2e^{-3x}\right)}{2x+\ln\left(1+3e^{-2x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{\ln\left(1+2e^{-3x}\right)}{x}}{2+\frac{\ln\left(1+3e^{-2x}\right)}{x}} = \frac{3}{2}.$$

(h) Je

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}{\ln\left(1+\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left[\sqrt{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1+\frac{1}{\sqrt[6]{x}}\right)\right]}{\ln\left[\sqrt[3]{x}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+1+\frac{1}{\sqrt[12]{x}}\right)\right]} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}\ln x+\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1+\frac{1}{\sqrt[6]{x}}\right)}{\frac{1}{3}\ln x+\ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+1+\frac{1}{\sqrt[12]{x}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}+\frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1+\frac{1}{\sqrt[6]{x}}\right)}{\ln x}}{\frac{1}{3}+\frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+1+\frac{1}{\sqrt[12]{x}}\right)}{\ln x}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

(i) Dekadický logaritmus vyjádříme nejdříve pomocí přirozeného logaritmu. Je-li $y=\log x$, potom $x=10^y$, tedy $\ln x = y\ln 10$ a odtud $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$. Nyní platí

$$\lim_{h\to0} \frac{\log(x+h)+\log(x-h)-2\log x}{h^2} = \frac{1}{\ln 10}\cdot\lim_{h\to0} \frac{\ln(x+h)+\ln(x-h)-2\ln x}{h^2} =$$

$$= \frac{1}{\ln 10}\cdot\lim_{h\to0} \frac{\ln\left(\frac{x^2-h^2}{x^2}\right)}{h^2} = \frac{1}{\ln 10}\cdot\lim_{h\to0} \frac{\ln\left(1-\frac{h^2}{x^2}\right)}{-\frac{h^2}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2\ln 10}.$$

(j) Platí

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx} = \lim_{x\to0} \frac{\ln(1+\cos ax-1)}{\ln(1+\cos bx-1)} =$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+\cos ax-1)}{\cos ax-1}\cdot\lim_{x\to0} \frac{\cos bx-1}{1+\cos bx-1}\cdot\lim_{x\to0} \frac{1-\cos ax}{1-\cos bx} = \lim_{x\to0} \frac{1-\cos ax}{1-\cos bx} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{1-\cos ax}{(ax)^2}\cdot\lim_{x\to0} \frac{(bx)^2}{1-\cos bx}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2.$$

(k) Je

$$\lim_{x\to a} \frac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta} = \lim_{x\to a} \frac{e^{\alpha\ln x}-e^{\alpha\ln a}}{e^{\beta\ln x}-e^{\beta\ln a}} = \lim_{x\to a} \frac{e^{\alpha\ln a}\left(e^{\alpha(\ln x-\ln a)}-1\right)}{e^{\beta\ln a}\left(e^{\beta(\ln x-\ln a)}-1\right)} =$$

$$= a^{\alpha-\beta}\lim_{x\to a} \frac{e^{\alpha(\ln x-\ln a)}-1}{\alpha(\ln x-\ln a)}\cdot\lim_{x\to a} \frac{\beta(\ln x-\ln a)}{e^{\beta(\ln x-\ln a)}-1}\cdot\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}a^{\alpha-\beta}.$$

(l) Platí

$$\lim_{x\to a} \frac{a^x-x^a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{a^x-a^a-(x^a-a^a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{a^x-a^a}{x-a} - \lim_{x\to a} \frac{x^a-a^a}{x-a} =$$

$$\lim_{x\to a} \frac{e^{x\ln a}-e^{a\ln a}}{x-a} - \lim_{x\to a} \frac{e^{a\ln x}-e^{a\ln a}}{x-a} = a^a\lim_{x\to a} \frac{e^{(x-a)\ln a}-1}{(x-a)\ln a}\cdot\ln a -$$

$$-a^a\lim_{x\to a} \frac{e^{a(\ln x-\ln a)}-1}{a(\ln x-\ln a)}\cdot\frac{\ln x-\ln a}{x-a}\cdot a = a^a\ln a - a^a = a^a(\ln a-\ln e) = a^a\ln\frac{a}{e}.$$

(m) Analogickým postupem jako v příkladech b) - e) dostaneme

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+a}{x+a+b}\right)^{x+a}\left(\frac{x+b}{x+a+b}\right)^{x+b}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left\{\left(1-\frac{b}{x+a+b}\right)^{-\frac{x+a+b}{b}}\right\}^{-\frac{b(x+a)}{x+a+b}}\cdot$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left\{\left(1-\frac{a}{x+a+b}\right)^{-\frac{x+a+b}{a}}\right\}^{-\frac{a(x+b)}{x+a+b}}=e^{-b}\cdot e^{-a}=e^{-(a+b)}.$$

(n) Poněvadž je

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left\{\left(1+\frac{\sqrt[n]{b}-1}{a}\right)^{\frac{a}{\sqrt[n]{b}-1}}\right\}^{\frac{n(\sqrt[n]{b}-1)}{a}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt[n]{b}-1)}{a}},$$

dostaneme dále, jestliže položíme $t=\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n(\sqrt[n]{b}-1)}{a}=\frac{1}{a}\cdot\lim_{t\to0_+}\frac{b^t-1}{t}=\frac{1}{a}\cdot\lim_{t\to0_+}\frac{e^{t\ln b}-1}{t\ln b}\cdot\ln b=\frac{\ln b}{a}=\ln b^{\frac{1}{a}}.$$

Hledaná limita je tedy $e^{\ln b^{\frac{1}{a}}}=b^{\frac{1}{a}}$.

(o) Platí

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left\{\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}{2}\right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}}\right\}^{\frac{n(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2)}{2}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}}$$

a dále

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}{2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\{\,n(\sqrt[n]{a}-1)+n(\sqrt[n]{b}-1)\,\}=\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)=\ln\sqrt{ab}$$

podle předchozího příkladu. Tedy daná limita je rovna $e^{\ln\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}$.

(p) Je

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left\{\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}}\right\}^{\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}}.$$

Vzhledem k tomu, že podle příkladu 13q) platí $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$, je

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\left\{\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}+\frac{c^x-1}{x}\right\}=$$

$$=\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)=\ln\sqrt[3]{abc}$$

a daná limita je rovna $e^{\ln\sqrt[3]{abc}}=\sqrt[3]{abc}$.

(q) Protože

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{a^x+b^x}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{a^x+b^x-2}{2}\right)}{\frac{a^x+b^x-2}{2}}\cdot\frac{a^x+b^x-2}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^x+b^x-2}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}\right)=\frac{1}{2}(\ln a+\ln b),$$

je také

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\ln\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{2}=\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)\ \text{ a tedy }\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{2}=0.$$

Z těchto limit můžeme vypočítat

$$\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\ln\left\{\frac{\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{2}}{\frac{a^x+b^x}{2}}\right\}^{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\ln\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{2}-\ln\frac{a^x+b^x}{2}\right]=-\frac{1}{2}(\ln a+\ln b).$$

Tedy

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)}=\frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

13. Vypočtěte následující limity:

(a) $\lim\limits_{x\to 0_+}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$; $\left[\frac{1}{2},\ \text{dosaďte}\right]$

(b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$; $\left[\sqrt{\frac{2}{3}},\ \text{vypočtěte limitu exponentu}\right]$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$; $[0]$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$; $[0]$

(e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\operatorname{tg}2x}$; $[0]$

(f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}-}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\operatorname{tg}2x}$; $[+\infty$, ve cvičeních d)-f) užijte postupu z příkladu 12a)$]$

(g) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$; $\left[e^{-2}\right]$

(h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$; $\left[e^{2a}\right]$

(i) $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{cotg}\pi x}$; $\left[e^{-1}\right]$

(j) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{cotg}^2 x}$; $[e]$

(k) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; $\left[e^{\frac{3}{2}}\right]$

(l) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$; $\left[e^{-1}\right]$

(m) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$; $\Big[1$, v příkladech g)-m) využijte $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$ a postupů z příkladů 12c)-e)$\Big]$

(n) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\{\ln(x+1)-\ln x\}$; [1]

(o) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$; $\left[0\,,\ \text{v úlohách n) a o) užijte limity } \lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1\right]$

(p) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$; $\left[\frac{\ln 3}{\ln 2}\,,\ \text{v čitateli vytkněte } 3^x,\ \text{ve jmenovateli } 2^x\right]$

(q) $\lim\limits_{x\to0} \frac{a^x-1}{x}\,,\ a>0$; $\left[\ln a\,,\ \text{využijte limitu } \lim\limits_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=1\right]$

(r) $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}\,,\ \alpha\neq\beta$; $\left[1\,,\ \text{v čitateli vytkněte } e^{\beta x}\right]$

(s) $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^x-a^a}{x-a}\,,\ a>0$; $\left[a^a\ln(ae)\,,\ \text{postupujte jako v příkladu 12l)}\right]$

(t) $\lim\limits_{x\to b} \frac{a^x-a^b}{x-b}\,,\ a>0$; $\left[a^b\ln a\,,\ \text{mocniny v čitateli napište jako mocniny o základu } e\right]$

(u) $\lim\limits_{h\to0} \frac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}\,,\ a>0$; $\left[a^x\ln^a\right]$

(v) $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{x}-1)\,,\ x>0$; $[\ln x]$

(w) $\lim\limits_{x\to0} \frac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}\,,\ a,b>0\,,\ a\neq b$. $\left[\left(\ln\frac{a}{b}\right)^{-1}\right]$

14. Najděte body nespojitosti funkce f a určete jejich charakter, je-li

a) $f(x)=\dfrac{1+x}{1+x^3}$; b) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}$; c) $f(x)=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}\right)$;

d) $f(x)=\sqrt{x}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$; e) $f(x)=\cos^2\dfrac{1}{x}$; f) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-\cos\pi x}{4-x^2}}$;

g) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$; h) $f(x)=1-e^{-\frac{1}{x^2}}$; i) $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$;

j) $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{\operatorname{tg}x}}$; k) $f(x)=\dfrac{1}{x+3^{\frac{1}{3-x}}}$; l) $f(x)=x-[x]$;

m) $f(x)=[x]\,\sin\pi x$; n) $f(x)=\operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$; o) $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}$;

p) $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^{xt})}{\ln(1+e^t)}$; q) $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} x\operatorname{arctg}(n\operatorname{cotg}x)$.

Řešení:

(a) Funkce f není definována pro $x=-1$. Poněvadž je

$$\lim_{x\to-1}\frac{1+x}{1+x^3}=\lim_{x\to-1}\frac{1}{1-x+x^2}=\frac{1}{3},$$

je bod $x=-1$ bodem odstranitelné nespojitosti. Definujeme-li novou funkci g vztahem

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) \quad \text{pro} \quad x\neq-1,\\ g(-1) &= \tfrac{1}{3}, \end{aligned}$$

je funkce g spojitá pro $x\in\mathbf{R}$.

Poznámka: Protože

$$\operatorname{graf} g=\operatorname{graf} f\cup\left\{\left[-1;-\frac{1}{3}\right]\right\},$$

říkáme stručně, že jsme funkci f dodefinovali spojitě v bodě $x=-1$.

(b) Platí
$$f(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{x+1}{(x-1)(x+2)}$$
a tedy f má dva body nespojitosti $x_1=1$, $x_2=-2$. Poněvadž je dále
$$\lim_{x\to 1_+} f(x)=+\infty\,,\ \lim_{x\to 1_-} f(x)=-\infty\,,\ \lim_{x\to -2_+} f(x)=+\infty\,,\ \lim_{x\to -2_-} f(x)=-\infty\,,$$
jsou oba body body nespojitosti 2. druhu.

(c) Funkce f má tři body nespojitosti $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$. Jestliže označíme
$$\varphi(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2},$$
platí
$$\lim_{x\to 0_+}\varphi(x)=\lim_{x\to 1_+}\varphi(x)=\lim_{x\to 2_+}\varphi(x)=+\infty\,,$$
$$\lim_{x\to 0_-}\varphi(x)=\lim_{x\to 1_-}\varphi(x)=\lim_{x\to 2_-}\varphi(x)=-\infty.$$
Odtud plyne, že
$$\lim_{x\to 0_+} f(x)=\lim_{x\to 1_+} f(x)=\lim_{x\to 2_+} f(x)=\frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to 0_-} f(x)=\lim_{x\to 1_-} f(x)=\lim_{x\to 2_-} f(x)=-\frac{\pi}{2}$$
a všechny tři body jsou body nespojitosti 2. druhu se skokem π.

Poznámka: Jestliže si uvědomíme, že dále $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$, máme docela slušný podklad k tomu, abychom načrtli graf dané funkce. Tato funkce má navíc dva nulové body $1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(d) Funkce f je definována pro $x\in(0,+\infty)$. Platí však
$$0\le\sqrt{x}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\le\frac{\pi}{3}\cdot\sqrt{x}\underset{x\to 0_+}{\longrightarrow}1.$$
Definujeme-li novou funkci g vztahem
$$\begin{aligned} g(x)&=\quad f(x)\quad\text{pro}\quad x\ne 0,\\ g(-1)&=\quad 0,\end{aligned}$$
je funkce g spojitá pro $x\in\langle 0,+\infty)$.

(e) Poněvadž je $\lim\limits_{x\to 0_+}\frac{1}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0_+}\cos^2\frac{1}{x}$ neexistuje. Bod $x=0$ je tedy bod nespojitosti 2. druhu. Analogicky dostaneme, že $\lim\limits_{x\to 0_-}\cos^2\frac{1}{x}$ neexistuje.

(f) Funkce f je definována pro $x\in(-2,2)$. Dále
$$\lim_{x\to 2}\frac{1-\cos\pi x}{(2-x)(2+x)}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 2}\frac{1-\cos\pi x}{2-x}=\frac{1}{4}\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos(2-t)\pi}{t}=\frac{1}{4}\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos\pi t}{t}=0,$$
$$\lim_{x\to -2}\frac{1-\cos\pi x}{(2-x)(2+x)}=\frac{1}{4}\lim_{x\to -2}\frac{1-\cos\pi x}{2+x}=\frac{1}{4}\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos(t-2)\pi}{t}=\frac{1}{4}\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos\pi t}{t}=0.$$
Definujeme-li novou funkci g vztahem
$$\begin{aligned} g(x)&=\quad f(x)\quad\text{pro}\quad x\in(-2,2)\,,\\ g(-2)=g(2)&=\quad 0\,,\end{aligned}$$
je funkce g spojitá pro $x\in\langle -2,2\rangle$.

(g) Body nespojitosti funkce f jsou $x = 2k\pi$ pro $k \in \mathbf{Z}$. Položíme-li $x - 2k\pi = t$, dostaneme

$$\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} = \frac{\sin(t+2k\pi)}{\sqrt{1-\cos(t+2k\pi)}} = \frac{\sin t}{\sqrt{1-\cos t}}.$$

Poněvadž je

$$\lim_{t\to 0_+} \frac{\sin t}{\sqrt{1-\cos t}} = \lim_{t\to 0_+} \frac{\sin t}{t}\sqrt{\frac{t^2}{1-\cos t}} = \sqrt{2}\,,$$

$$\lim_{t\to 0_-} \frac{\sin t}{\sqrt{1-\cos t}} = \lim_{t\to 0_-} \frac{\sin t}{t}\left(-\sqrt{\frac{t^2}{1-\cos t}}\right) = -\sqrt{2}\,,$$

jsou body nespojitosti dané funkce všechny 1. druhu se skokem $2\sqrt{2}$.

(h) Bod nespojitosti funkce f je $x = 0$. Dále platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty\,, \text{ tedy } \lim_{x\to 0} f(x) = 1.$$

Definujeme-li novou funkci g vztahem

$$\begin{aligned} g(x) &= \ f(x) \quad \text{pro} \quad x \neq 0\,, \\ g(0) &= \ 1\,, \end{aligned}$$

je funkce g spojitá pro $x \in \mathbf{R}$.

(i) Body nespojitosti funkce f jsou $x = 0$ a $x = 1$. Dále

$$\frac{x}{1-x} \underset{x\to 0_+}{\longrightarrow} 0_+\,, \quad e^{\frac{x}{1-x}} \underset{x\to 0_+}{\longrightarrow} 1_+\,, \quad 1-e^{\frac{x}{1-x}} \underset{x\to 0_+}{\longrightarrow} 0_-\,, \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0_+} f(x) = -\infty\,,$$

$$\frac{x}{1-x} \underset{x\to 0_-}{\longrightarrow} 0_-\,, \quad e^{\frac{x}{1-x}} \underset{x\to 0_-}{\longrightarrow} 1_-\,, \quad 1-e^{\frac{x}{1-x}} \underset{x\to 0_-}{\longrightarrow} 0_+\,, \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0_-} f(x) = +\infty\,,$$

Pro bod $x = 1$ platí

$$\lim_{x\to 1_-} \frac{x}{1-x} = +\infty\,, \text{ tedy } \lim_{x\to 1_-} f(x) = 0\,, \quad \lim_{x\to 1_+} \frac{x}{1-x} = -\infty\,, \text{ tedy } \lim_{x\to 1_+} f(x) = 1\,.$$

Odtud dostáváme, že $x = 0$ je bod nespojitosti 2. druhu a bod $x = 1$ je bod nespojitosti 1. druhu se skokem 1. Poněvadž dále $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{1}{1-e^{-1}}$, můžeme zhruba načrtnout graf dané funkce. Obrázek

(j) Daná funkce je $\pi-$periodická s body nespojitosti $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ pro $k \in \mathbf{Z}$. Poněvadž

$$\lim_{x\to \frac{(2k+1)\pi}{2}_+} \operatorname{tg} x = -\infty\,, \quad \lim_{x\to \frac{(2k+1)\pi}{2}_-} \operatorname{tg} x = +\infty\,,$$

je

$$\lim_{x\to \frac{(2k+1)\pi}{2}_+} f(x) = 1\,, \quad \lim_{x\to \frac{(2k+1)\pi}{2}_-} f(x) = 0\,.$$

Všechny body nespojitosti f jsou tedy 1. druhu se skokem 1.

(k) Body nespojitosti funkce f jsou $x = 3$ a bod x_0, pro nějž $x_0 + 3^{\frac{1}{3-x_0}} = 0$. Pro $x \in (0,3) \cup (3,+\infty)$ je $g(x) = x + 3^{\frac{1}{3-x}} > 0$. Na intervalu $(-\infty, 0)$ je funkce g rostoucí a spojitá, $g(-2) = -2 + 3^{\frac{1}{5}} < 0\,,\ g(-1) = -1 + 3^{\frac{1}{4}} > 0$, tj. existuje právě jeden bod x_0 tak, že $g(x_0) = 0$, a $x_0 \in (-2,-1)$. Přesnější hodnota x_0 je $x_0 = -1,29173$. Dále

$$\lim_{x \to x_{0+}} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x \to x_{0-}} f(x) = -\infty$$

a bod x_0 je bod nespojitosti 2. druhu. Pro $x = 3$ platí

$$\lim_{x \to 3_+} \frac{1}{3-x} = -\infty\,, \quad \lim_{x \to 3_-} \frac{1}{3-x} = +\infty\,, \quad \text{tedy} \quad \lim_{x \to 3_+} f(x) = \frac{1}{3}\,, \quad \lim_{x \to 3_-} f(x) = 0$$

a bod $x = 3$ je bodem nespojitosti 1. druhu se skokem $\frac{1}{3}$.

(l) Poněvadž body nespojitosti funkce $g(x) = [x]$ jsou celá čísla, má funkce f body nespojitosti v bodech $x_n = n$ pro $n \in \mathbf{Z}$.

$$\begin{array}{llll} \text{Pro} \quad x \in \langle n-1, n) & \text{je} \quad [x] = n-1\,, & \text{tedy} \quad f(x) = x - n + 1\,, \\ \text{pro} \quad x \in \langle n, n+1) & \text{je} \quad [x] = n\,, & \text{tedy} \quad f(x) = x - n. \end{array}$$

Odtud plyne, že $\lim\limits_{x \to n_+} f(x) = 0$ a $\lim\limits_{x \to n_-} f(x) = 1$, tedy f má v bodech $x_n = n$ nespojitosti 1. druhu se skokem -1. Jestliže si danou funkci načrtneme, zjistíme, že je periodická s periodou 1.Obrázek

(m) Je-li $n \in \mathbf{Z}$, platí $f(n) = n \sin \pi n = 0$ a poněvadž pro $x \in \langle n, n+1)$ je $f(x) = n \sin \pi x$, je daná funkce spojitá pro $x \in \mathbf{R}$. Její graf vypadá následovně. Obrázekpar

(n) Funkce $\operatorname{sgn} x$ je definována následujícím způsobem:

$$g(x) = -1 \ \text{ pro } \ x < 0\,, \qquad g(x) = 0 \ \text{ pro } \ x = 0\,, \qquad g(x) = 1 \ \text{ pro } \ x > 0.$$

Má tedy v bodě $x = 0$ nespojitost 1. druhu se skokem 2. Funkce f je tedy nespojitá ve všech bodech, kde $\sin \frac{\pi}{x} = 0$, neboli v bodech $x_n = \frac{1}{n}$ pro $n \in \mathbf{Z} - \{0\}$ a v bodě $x = 0$, neboť $0 \notin D(f)$. Funkce f je lichá a dále

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \text{ pro } n \in \mathbf{N}\,, \quad f(n) = 1 \,\text{pro}\, x > 1\,, \quad f(x) = (-1)^n \,\text{pro}\, x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)\,, \ n \in \mathbf{N}.$$

Graf funkce f vypadá tedy následovně: Obrázek

Všechny body $x_n = \frac{1}{n}$ pro $n \in \mathbf{Z} - \{0\}$ jsou body nespojitosti 1. druhu se skokem $2(-1)^{n+1}$. Poněvadž ani jedna z limit $\lim\limits_{x \to 0_+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0_-} f(x)$ neexistuje (přesvědčte se), je bod $x = 0$ bodem nespojitosti 2. druhu.

(o) Poněvadž

$$f(x)=0 \text{ pro } |x|<1\,,\quad f(x)=1 \text{ pro } |x|>1\,,\quad -1\notin D(f)\,,\ f(1)=\frac{1}{2}\,,$$

jsou $x_1=-1$ a $x_2=1$ body nespojitosti dané funkce. Je zřejmé, že obě nespojitosti jsou 1. druhu, skok v bodě $x_1=-1$ je -1, v bodě $x_2=1$ je 1.

(p) Je zřejmé, že $f(x)=0$ pro $x\le 0$. Je-li $x>0$, potom

$$f(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{xt})}{\ln(1+e^{t})}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln\{e^{xt}(1+e^{-xt})\}}{\ln\{e^{t}(1+e^{-t})\}}=$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{xt+\ln(1+e^{-xt})}{t+\ln(1+e^{-t})}=\lim_{t\to+\infty}\frac{x+\frac{\ln(1+e^{-xt})}{t}}{1+\frac{\ln(1+e^{-t})}{t}}=x.$$

Tedy funkce f je spojitá na celém $\mathbf{R}$. Načrtněte si obrázek!

(q) Poněvadž je

$$f(x)=\frac{\pi}{2}\,x \text{ pro } \operatorname{cotg}x>0\,,\quad f(x)=-\frac{\pi}{2}\,x \text{ pro } \operatorname{cotg}x<0\,,\quad f(x)=0 \text{ pro } \operatorname{cotg}x=0\,,$$

jsou body nespojitosti funkce f tvaru $x_k=k\pi$ pro $k\in\mathbf{Z}$ (v těchto bodech není definována funkce $\operatorname{cotg}x$) a $x'_k=\frac{(2k+1)\pi}{2}$ ($k\in\mathbf{Z}$) (nulové body funkce $\operatorname{cotg}x$, kde tato funkce mění znaménko). Dále

$$\lim_{x\to k\pi_+}f(x)=\frac{k\pi^2}{2}\,,\qquad \lim_{x\to k\pi_-}f(x)=-\frac{k\pi^2}{2}\,,$$

tedy všechny body x_k jsou body nespojitosti 1. druhu se skokem $k\pi^2$. Tím také dostáváme, že pro $k=0$ je tato nespojitost odstranitelná. Pro body x'_k platí

$$\lim_{x\to\frac{(2k+1)\pi}{2}_+}f(x)=-\frac{(2k+1)\pi^2}{4}\,,\qquad \lim_{x\to\frac{(2k+1)\pi}{2}_-}f(x)=\frac{(2k+1)\pi^2}{4}\,.$$

Odtud plyne, že všechny body x'_k jsou body nespojitosti 1. druhu se skokem $-\frac{(2k+1)\pi^2}{2}$. Definujeme-li novou funkci g vztahem

$$g(x)=f(x) \text{ pro } x\ne 0\,,\qquad g(0)=0\,,$$

je funkce g spojitá v bodě $x=0$.

15. Najděte body nespojitosti funkce f a určete jejich charakter, je-li

(a) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{1-x}$; [$x=1$, 1. druhu, skok $-\pi$]

(b) $f(x)=\frac{x}{(1+x)^2}$; [$x=-1$, 2. druhu]

(c) $f(x)=\frac{x}{\sin x}$; [$x_k=k\pi$, ($k\in\mathbf{Z}$), $x_0=0$ odstranitelná nespojitort, $f(0)=1$, ostatní 2. druhu]

(d) $f(x)=x\,\sin\frac{1}{x}$; [$x=0$, odstranitelná nespojitost, $f(0)=0$]

(e) $f(x)=\frac{x-|x|}{2x}$; [$x=0$, 1. druhu, skok -1]

(f) $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$; [$x=0$, 2. druhu]

(g) $f(x)=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$; [$x=0$, 1. druhu, skok -1]

(h) $f(x)=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$; [$x=1$, 1. druhu, skok -1]

(i) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pro} \quad x \in \langle 0,1 \rangle\,, \\ 2-x & \text{pro} \quad x \in (1,2\rangle\,; \end{cases}$ [spojitá v intervalu $\langle 0,2\rangle$]

(j) $f(x) = \begin{cases} \cos\frac{\pi x}{2} & \text{pro} \quad |x| < 1\,, \\ |x-1| & \text{pro} \quad |x| \geq 1\,; \end{cases}$ [$x=-1$, 1. druhu, skok -2]

(k) $f(x) = \operatorname{sgn} \sin x\,;$ [$x_n = n$ $(n \in \mathbf{N})$, 1. druhu, skok $2(-1)^n$]

(l) $f(x) = x[x]\,;$ [$x_n = n$ $(n \in \mathbf{Z} - \{0\})$, 1. druhu, skok n]

(m) $f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}\,]\,;$ [$x_n = n^2$ $(n \in \mathbf{N})$, 1. druhu, skok -1]

(n) $f(x) = x + [x^2\,]\,;$ [$x_n = \sqrt{n}\,,\ x'_n = -\sqrt{n}$ $(n \in \mathbf{N})$, 1. druhu, skok 1 v bodech x_n, skok -1 v bodech x'_n]

(o) $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}\,;$ [$x = \pm 1$ 1. druhu, skok -2 v bodě $x=-1$, skok 2 v bodě $x=1$]

(p) $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos^{2n} x$ [$x_k = k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$, odstranitelné nespojitosti, jestliže předefinujeme $f(k\pi) = 0$ $(k \in \mathbf{Z})$]

(q) $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+x^n}$ [$x = \pm 1$, 1. druhu, skok 1 v bodě $x=-1$, skok -1 v bodě $x=1$; $-1 \notin D(f)$]

(r) $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2x^n-3}{x^n+1}$ [$x = \pm 1$, 1. druhu, skok -5 v bodě $x=-1$, skok 5 v bodě $x=1$; $-1 \notin D(f)$]

(s) $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1+x^{2n}}$ [spojitá v celém $\mathbf{R}$, $f(x) = \max\{1, x^2\}$]

16. Rozhodněte o stejnoměrné spojitosti funkce f, je-li

a) $f(x) = \dfrac{x}{4-x^2}\,,\ x \in \langle -1,1\rangle\,;$ b) $f(x) = \sqrt{x}\,,\ x \in \langle 0,+\infty)\,;$

c) $f(x) = \ln x\,,\ x \in (0,1)\,;$ d) $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}\,,\ x \in (0,+\infty)\,;$

e) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}\,,\ x \in (0,\pi)\,;$ f) $f(x) = x \sin\dfrac{1}{x}\,,\ x \in (0,+\infty)\,.$

Řešení:

(a) Funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle -1,1\rangle$, je tedy podle obecné věty stejnoměrně spojitá. Tuto skutečnost však můžeme dokázat též rovnou. Buďte $x_1, x_2 \in \langle -1,2\rangle$ dva libovolné body. Potom platí

$$\left|\frac{x_1}{4-x_1^2} - \frac{x_2}{4-x_2^2}\right| = \frac{|x_1(4-x_2^2) - x_2(4-x_1^2)|}{(4-x_1^2)(4-x_2^2)} =$$

$$= \frac{|4(x_1-x_2) + x_1x_2(x_1-x_2)|}{(4-x_1^2)(4-x_2^2)} = \frac{|x_1-x_2||4+x_1x_2|}{(4-x_1^2)(4-x_2^2)} \leq \frac{5|x_1-x_2|}{9}.$$

Je-li tedy $\varepsilon > 0$ libovolné, pak pro $\delta = \frac{9}{5}\varepsilon$ platí: je-li $|x_1 - x_2| < \delta$, potom $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Funkce f je dokonce lipšicovská.

(b) Buď $\delta > 0$ a nechť $x_1, x_2 \in \langle 0,+\infty)$ tak, že $|x_1 - x_2| < \delta$. Předpokládejme, že platí $x_1 > x_2$. Potom je

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \sqrt{x_2 + (x_1 - x_2)} - \sqrt{x_2} < \sqrt{x_2 + \delta} - \sqrt{x_2} = \frac{\delta}{\sqrt{x_2+\delta} + \sqrt{x_2}} \leq \frac{\delta}{\sqrt{\delta}} = \sqrt{\delta}.$$

Jestliže položíme $\delta = \varepsilon^2$, dostaneme, že f je stejnoměrně spojitá. Není však lipšicovská.

(c) Ukážeme, že f není stejnoměrně spojitá pro $x \in (0,1)$. Máme tedy ukázat, že

$$\exists\,\varepsilon > 0\ \ \forall\,\delta_n = \frac{1}{n}\ \text{ (například) } \exists\,x'_n, x''_n \in (0,1)\,,\ \ |x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}\,,\ \text{ ale } |f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon.$$

Položme $\varepsilon = 1$ a buď $x'_n = e^{-n}$, $x''_n = e^{-2n}$. Potom je

$$|x'_n - x''_n| = \frac{1}{e^n} - \frac{1}{e^{2n}} < \frac{1}{e^n} < \frac{1}{n}\ \ \forall\, n \in \mathbf{N}\,,\ \text{ ale } |f(x'_n) - f(x''_n)| = |\ln e^{-n} - \ln e^{-2n}| = n \geq 1.$$

(d) Ukážeme opět, že f není stejnoměrně spojitá pro $x \in (0,+\infty)$. Buď $\varepsilon = 1$ a volme

$$x'_n = \frac{1}{2\pi n}\,,\quad x''_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}\quad (n \in \mathbf{N})\,.$$

Potom je

$$|x'_n - x''_n| = \frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi n\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)} = \frac{1}{4n\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)} < \frac{1}{n}\,,\ \text{ ale } \left|\sin\frac{1}{x'_n} - \sin\frac{1}{x''_n}\right| = 1 \geq \varepsilon.$$

(e) Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Poněvadž $\lim\limits_{x\to 0_+} \frac{\sin x}{x} = 1$, existuje $\triangle \in (0,\pi)$ tak, že

$$\left|\frac{\sin x_1}{x_1} - \frac{\sin x_2}{x_2}\right| < \varepsilon\,,\ \text{ jakmile } x_1, x_2 \in (0,\triangle).$$

Buďte $x_1, x_2 \in (0,\pi)$ libovolná. Potom

$$\left|\frac{\sin x_1}{x_1} - \frac{\sin x_2}{x_2}\right| = \left|\frac{x_1 - \sin x_2}{x_1} + \sin x_2\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{x_1}|\sin x_1 - \sin x_2| + \frac{|\sin x_2|}{x_1 x_2}|x_1 - x_2| \leq \frac{2}{x_1}|x_1 - x_2|.$$

Je zřejmé, že lze x_1 a x_2 zaměnit. Tedy, je-li $\max\{x_1, x_2\} \geq \triangle$, pak

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{2}{\triangle}|x_1 - x_2| < \varepsilon\,,\ \text{ pokud } |x_1 - x_2| < \frac{\triangle\varepsilon}{2} = \delta.$$

Tedy ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x_1, x_2 \in (0,\pi)$, taková, že $|x_1 - x_2| < \delta$ platí $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

(f) Zvolme $\varepsilon > 0$. Protože $\lim\limits_{x\to 0_+} x \sin\frac{1}{x} = 0$, existuje $\triangle > 0$ tak, že

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|x_1 \sin\frac{1}{x_1} - x_2 \sin\frac{1}{x_2}\right| < \varepsilon\,,\ \text{ jakmile } x_1, x_2 \in (0,\triangle).$$

Buďte $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ libovolná Potom

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|x_1 \sin\frac{1}{x_1} - x_2 \sin\frac{1}{x_2}\right| = \left|(x_1 - x_2)\sin\frac{1}{x_1} + x_2\left(\sin\frac{1}{x_1} - \sin\frac{1}{x_2}\right)\right| \leq$$

$$\leq |x_1 - x_2| + \frac{1}{x_1}|x_1 - x_2| = \left(1 + \frac{1}{x_1}\right)|x_1 - x_2|.$$

Je opět zřejmé, že lze x_1 a x_2 zaměnit. Je-li tedy $\max\{x_1, x_2\} \geq \triangle$, potom

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \left(1 + \frac{1}{\triangle}\right)|x_1 - x_2| < \varepsilon\,,\ \text{ pokud } |x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon\triangle}{\triangle + 1} = \delta.$$

Tedy opět $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, jakmile $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ a $|x_1 - x_2| < \delta$.

17. Rozhodněte o stejnoměrné spojitosti funkce f, je-li

(a) $f(x) = \frac{1}{x}\,,\ \ x \in \langle a, +\infty)\,,\ \ a > 0\,;$ [stejnoměrně spojitá]

(b) $f(x) = \frac{1}{x}\,,\ \ x \in (0, a\rangle\,,\ \ a > 0\,;$ [není stejnoměrně spojitá]

(c) $f(x) = e^x\,,\ \ x \in \mathbf{R}\,;$ [není stejnoměrně spojitá; volte např. $x'_n = n + \frac{1}{n}\,,\ x''_n = n$]

(d) $f(x) = x + \sin x\,,\ \ x \in \mathbf{R}\,;$ [stejnoměrně spojitá; využijte odhadu $|\sin t| \le |t|$ pro $t \in \mathbf{R}$]

(e) $f(x) = x\,\sin x\,,\ \ x \in \langle 0, +\infty).$ [není stejnoměrně spojitá; volte např. $x'_n = \left(2n + \frac{1}{2n}\right)\pi\,,\ x''_n = 2n\pi$ a užijte toho, že $\sin x \ge \frac{2}{\pi}(x - 2\pi n)$ pro $x \in \left\langle 2\pi n, 2\pi n + \frac{\pi}{2}\right\rangle$ pro každé $n \in \mathbf{N}$]

Kapitola 5

Diferenciální počet funkcí jedné proměnné.

1. Užitím definice najděte derivaci funkce f v bodě x_0, je-li

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\,,\ x_0 = 1\,;$ b) $f(x) = \cos x\,,\ x_0 = x \in \mathbf{R}\,;$

c) $f(x) = |x|\,,\ x_0 = 0\,;$ d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,,\ x_0 = 0\,;$

e) $f(x) = \operatorname{sgn} x\,,\ x_0 = 0\,;$ f) $f(x) = x + x - 1 \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}\,,\ x_0 = 1\,;$

g) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x\,,\ x_0 = x \in \mathbf{R} - \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\,,\ k \in \mathbf{Z}\right\}\,;$ h) $f(x) = 3^x \sin x\,,\ x_0 = x \in \mathbf{R}\,.$

Řešení:

(a) Platí

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{1}{(1+h)^2} - 1 \right\} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1 - (1+h)^2}{h(1+h)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{-2h - h^2}{h(1+h)^2} = -2.$$

(b) Je

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -2 \lim_{h\to 0} \frac{\sin\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} =$$
$$= -\lim_{h\to 0} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x.$$

(c) Podle definice platí

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}.$$

Je-li $h > 0$, potom $f'_+(0) = \lim\limits_{h\to 0_+} \frac{h}{h} = 1$, a pro $h < 0$ platí $f'_-(0) = \lim\limits_{h\to 0_-} \frac{-h}{h} = -1$, tedy $f'(0)$ neexistuje.

(d) Je
$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{h}}.$$
Tato limita však neexistuje, poněvadž
$$\lim_{h\to 0_+}\frac{1}{\sqrt[3]{h}}=+\infty\,,\qquad \lim_{h\to 0_-}\frac{1}{\sqrt[3]{h}}=-\infty.$$

(e) Platí
$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sgn} h}{h}.$$
Pro $h>0$ je $f'_+(0)=\lim\limits_{h\to 0_+}\frac{1}{h}=+\infty$ a pro $h<0$ platí $f'_-(0)=\lim\limits_{h\to 0_-}\frac{-1}{h}=+\infty$. Je tedy $f'(0)=+\infty$.

(f) Podle definice platí
$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1+h+h\arcsin\sqrt{\frac{1+h}{2+h}}-1}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(1+\arcsin\sqrt{\frac{1+h}{2+h}}\right)=1+\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}=1+\frac{\pi}{4}.$$

(g) Platí
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2(x+h)-\operatorname{tg}^2 x}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{\operatorname{tg}(x+h)-\operatorname{tg}x\}\{\operatorname{tg}(x+h)+\operatorname{tg}x\}}{h}=2\operatorname{tg}x\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x+h)-\operatorname{tg}x}{h}=$$
$$=2\operatorname{tg}x\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)\cos x-\sin x\cos(x+h)}{h\,\cos x\,\cos(x+h)}=\frac{2\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=\frac{2\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}.$$

(h) Je
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3^{x+h}\sin(x+h)-3^x\sin x}{h}=$$
$$=3^x\lim_{h\to 0}\frac{3^h(\sin x\,\cos h+\cos x\,\sin h)-\sin x}{h}=$$
$$3^x\lim_{h\to 0}\frac{3^h(\sin x\,\cos h+\cos x\,\sin h)-3^h\sin x+3^h\sin x-\sin x}{h}=$$
$$=3^x\left\{\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\cdot 3^h-\sin x\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h}\cdot 3^h+\sin x\lim_{h\to 0}\frac{3^h-1}{h}\right\}=$$
$$=3^x(\cos x+\ln 3\cdot\sin x).$$

Poznámka: Příklady g) a h) ukazují, že výpočet derivace pomocí definice není nejvhodnější cesta, a proto se v dalším budeme opírat o sadu vzorců pro derivování. Tyto vzorce jsou uvedeny v následující tabulce.

2. Užitím definice vypočtěte derivaci funkce f v bodě x_0, je-li

Funkce $f(x)$	Derivace $f'(x)$	Podmínky
$\alpha u+\beta v$	$\alpha u'+\beta v$;	α,β konstanty u,v funkce
$u\cdot v$		

(a) $f(x) = x^2$, $x_0 = 3$; $[\,6\,]$

(b) $f(x) = \sqrt{2+x}$, $x_0 = 0$; $\left[\,\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\right]$

(c) $f(x) = x\sqrt{x}$, $x_0 = 4$; $[\,3\,]$

(d) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = t+1$, $t \in \mathbf{R} - 0\{-1\}$; $\left[\,-\frac{1}{(t+1)^2}\,\right]$

(e) $f(x) = 3|x+1|$, $x_0 = -2$; $[\,-3\,]$

(f) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0$; $[\,+\infty\,]$

(g) $f(x) = x + \operatorname{cotg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; $[\,-1\,]$

(h) $f(x) = x^2 \sin(x-2)$, $x_0 = 2$; $[\,4\,]$

(i) $f(x) = \log^2 x$, $x_0 = 10$; $\left[\,\frac{1}{5 \ln 10}\,\right]$

Základní vzorce pro derivování.

Funkce $f(x)$	Derivace $f'(x)$	Podmínky
$\alpha u + \beta v$	$\alpha u' + \beta v'$	$\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ konstanty, u, v funkce
$u \cdot v$	$u'v + uv'$	
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$v \neq 0$
$y = f(x)\,,\ x = f^{-1}(y)$	$\left[f^{-1}(y)\right]' = \frac{1}{f'(x)}$	f, f^{-1} navzájem inversní funkce
$f(\varphi(x))$	$f'(\varphi(x) \cdot \varphi'(x)$	
C	0	C je konstanta
x	1	$x \in \mathbf{R}$
x^n	nx^{n-1}	$x \in \mathbf{R}\,,\ n \in \mathbf{N}$
x^{-n}	$-nx^{-n-1}$	$x \in \mathbf{R} - \{0\}\,,\ n \in \mathbf{N}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x > 0\,,\ \alpha \in \mathbf{R}$
e^x	e^x	$x \in \mathbf{R}$
a^x	$a^x\ \ln a$	$x \in \mathbf{R}\,,\ a > 0$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\log_a x$	$\frac{1}{x\ \ln a}$	$x > 0\,,\ a > 0\,,\ a \neq 1$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbf{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbf{R}$
$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \in \mathbf{R}\,,\ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\,,\ k \in \mathbf{Z}$
$\mathrm{cotg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \in \mathbf{R}\,,\ x \neq k\pi\,,\ k \in \mathbf{Z}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\mathrm{arctg}\ x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbf{R}$
$\mathrm{arccotg}\ x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbf{R}$
$\mathrm{sh}x$	$\mathrm{ch}x$	$x \in \mathbf{R}$
$\mathrm{ch}x$	$\mathrm{sh}x$	$x \in \mathbf{R}$
$\mathrm{th}x$	$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	$x \in \mathbf{R}$
$\mathrm{cth}x$	$-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$	$x \in \mathbf{R} - \{0\}$
$\mathrm{argsh}x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$x \in \mathbf{R}$
$\mathrm{argch}x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \in (1, +\infty)$
$\mathrm{argth}x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$x \in (-1, 1)$
$\mathrm{argcth}x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

3. Vypočtěte derivaci funkce f, je-li

(a) $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$; $\quad [5x^4 - 12x^2 + 2]$

(b) $f(x) = \frac{\pi}{x} + \ln 2$; $\quad [-\frac{\pi}{x^2},\ x \neq 0]$

(c) $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{5}{2}} + x^{-2}$; $\quad \left[2x^{-\frac{1}{3}} - 5x^{\frac{3}{2}} - 2x^{-3},\ x \neq 0\right]$

(d) $f(x) = x^2\sqrt[3]{x^2}$; $\quad \left[\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}\right]$

(e) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$; $\quad \left[-\frac{2}{(x-1)^2},\ x \neq 1\right]$

(f) $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-5x+5}$; $\quad \left[\frac{-2x^2-6x+25}{(x^2-5x+5)^2},\ x \neq \frac{5\pm\sqrt{5}}{2}\right]$

(g) $f(z) = \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}$; $\quad \left[\frac{1}{\sqrt{z}(1-\sqrt{z})^2},\ z > 0,\ z \neq 1\right]$

(h) $f(x) = \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{b}{x\sqrt[3]{x}}$, a, b konstanty; $\quad \left[\frac{4b}{3x^2\sqrt[3]{x}} - \frac{2a}{3x\sqrt[3]{x^2}},\ x \neq 0\right]$

(i) $f(x) = 5\sin x + 3\cos x$; $\quad [5\cos x - 3\sin x]$

(j) $f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$; $\quad \left[\frac{4}{\sin^2 2x},\ x \neq k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}\right]$

(k) $f(t) = 2t\sin t - (t^2 - 2)\cos t$; $\quad [t^2 \sin t]$

(l) $f(x) = x \arcsin x$; $\quad \left[\arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1, 1)\right]$

(m) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$; $\quad \left[\frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2},\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right]$

(n) $f(x) = \frac{\arccos x}{\arcsin x}$; $\quad \left[-\frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x},\ x \in (-1, 0) \cup (0, 1)\right]$

(o) $f(x) = x^7 \cdot e^x$; $\quad [x^6 e^x (x + 7)]$

(p) $f(x) = e^{-x}\operatorname{arctg} x$; $\quad \left[e^{-x}\left(\frac{1}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x\right)\right]$

(q) $f(x) = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3}$; $\quad [3x^2 \ln x,\ x > 0]$

(r) $f(x) = \frac{1}{x} + 2\ln x - \frac{\ln x}{x}$; $\quad \left[\frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x^2} - \frac{2}{x^2},\ x > 0\right]$

(s) $f(x) = \ln x \log x - \ln a \log_a x$; $\quad \left[\frac{2\ln x}{x \ln 10} - \frac{1}{x},\ x > 0\right]$

(t) $f(t) = 5^t \operatorname{tg} t$; $\quad \left[\frac{5^t(\ln 5\ \sin 2t + 2)}{2\cos^2 t},\ t \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}\right]$

(u) $f(u) = (u^2 - 2u - 1)\operatorname{ch} u$; $\quad [(2u - 2)\operatorname{ch} u + (2u^2 - 2u - 1)\operatorname{sh} u]$

(v) $f(v) = 3\operatorname{th} v - v^2 \operatorname{cth} v$; $\quad \left[\frac{3}{\operatorname{ch}^2 v} - 2v\operatorname{cth} v + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 v},\ v \neq 0\right]$

(w) $f(x) = \frac{x^2}{\operatorname{sh} x}$; $\quad \left[\frac{2x\operatorname{sh} x - x^2 \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x},\ x \neq 0\right]$

(x) $f(x) = \frac{3\operatorname{cth} x}{\ln x}$; $\quad \left[\frac{-3(x \ln x + \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x)}{x \ln^2 x \cdot \operatorname{sh}^2 x},\ x > 0\right]$

(y) $f(y) = \arccos y \cdot \operatorname{argsh} y$; $\quad \left[\frac{\sqrt{1-y^2}\arccos y - \sqrt{1+y^2}\operatorname{argsh} y}{\sqrt{1-y^4}},\ y \in (-1, 1)\right]$

(z) $f(z) = \frac{\operatorname{argth} z}{1-z^2}$; $\quad \left[\frac{1 + 2z \operatorname{argth} z}{(1-z^2)^2},\ z \in (-1, 1)\right]$

4. Vypočtěte derivaci funkce f, je-li

a) $f(x) = 2^{\sin x^2}$; b) $f(x) = \ln(\arcsin 5x)$; c) $f(x) = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{1 + x^2}$;

d) $f(x) = \sin\left(e^{x^2+3x-2}\right)$; e) $f(x) = e^{\sqrt{\ln(x^2+x+1)}}$; f) $f(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt[4]{\arcsin\sqrt{x^2 + 2x}}$;

g) $f(x) = 4\sqrt[3]{\operatorname{cotg}^2 x} + \sqrt[3]{\operatorname{cotg}^8 x}$; h) $f(x) = \ln\left(\ln^2\left(\ln^3 x\right)\right)$;

i) $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$; j) $f(x)=3^{\operatorname{arctg}\left(x\,\sin x+\sqrt[3]{\operatorname{cotg} x}\right)}$.

Poznámka: Než nabudeme dostatečné zručnosti při výpočtu derivací, bývá vhodné si složené funkce napsat jako řetězce základních elementárních funkcí (viz 3. kapitola, příklady 7 a 8).

Řešení:

(a) Platí $y=2^u$, $u=\sin v$, $v=x^2$, tedy

$$y'=2^u\ln 2\cdot u'=2^u\ln 2\,\cos v\cdot v'=2^u\ln 2\,\cos v\,\cdot(2x).$$

Jestliže tento výsledek shrneme, dostaneme

$$f'(x)=2x\cdot 2^{\sin x^2}\cdot\ln 2\cdot\cos x^2=x\,2^{1+\sin x^2}\ln 2\,\cos x^2.$$

(b) Analogicky jako v předchozím příkladu je $y=\ln u$, $u=\arcsin v$, $v=5x$, tedy

$$y'=\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\cdot v'=\frac{5}{u\sqrt{1-v^2}},$$

neboli

$$f'(x)=\frac{5}{\arcsin 5x\,\sqrt{1-25x^2}},\qquad x\in\left(0,\frac{1}{5}\right)$$

Poznámka: Je-li určení $D(f)$ nebo $D(f')$ příliš obtížné, vynecháme jej, ale pak riskujeme, že správně spočteme f' pro funkci takovou, že $D(f)=\emptyset$, (resp. $D(f')=\emptyset$).

(c) Je $y=\ln u$, $u=\operatorname{arctg}\,v$, $v=\sqrt{w}$, $w=1+x^2$, tedy

$$y'=\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{1+v^2}\cdot v'=\frac{1}{u(1+v^2)}\cdot\frac{1}{2\sqrt{w}}\cdot w'=\frac{2x}{2u\sqrt{w}(1+v^2)}.$$

Vrátíme-li se k původní proměnné, dostaneme

$$f'(x)=\frac{x}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}\,\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}}.$$

(d) Protože je $y=\sin u$, $u=e^v$, $v=x^2+3x-2$, dostáváme

$$y'=\cos u\cdot u'=\cos u\cdot e^v\cdot v'=\cos u\cdot e^v(2x+3),$$

tedy

$$f'(x)=(2x+3)\,e^{x^2+3x-2}\,\cos\left(e^{x^2+3x-2}\right).$$

(e) Jestliže postupujeme rychleji, můžeme psát

$$f'(x)=e^{\sqrt{\ln(x^2+x+1)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\ln(x^2+x+1)}}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1}=$$

$$=\frac{2x+1}{2(x^2+x+1)\sqrt{\ln(x^2+x+1)}}\cdot e^{\sqrt{\ln(x^2+x+1)}},\quad x\in\mathbf{R}-\langle -1,0\rangle.$$

(f) Analogicky

$$f'(x) = \frac{1}{8\sqrt[4]{\arcsin^3\sqrt{x^2+2x}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2-2x}} \cdot \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}} =$$

$$= \frac{x+1}{8\sqrt{x^2+2x}\sqrt{1-2x-x^2}\sqrt[4]{\arcsin^3\sqrt{x^2+2x}}}, \quad x \in (-1-\sqrt{2},-2) \cup (0,\sqrt{2}-1).$$

(g) Je $y = 4\,u^{\frac{2}{3}} + u^{\frac{8}{3}}$, kde $u = \operatorname{cotg} x$, tedy

$$y' = \left(\frac{8}{3}u^{-\frac{1}{3}} + \frac{8}{3}u^{\frac{5}{3}}\right) \cdot u' = \frac{8}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{u}} + u\sqrt[3]{u^2}\right)\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right).$$

Odtud

$$f'(x) = \frac{-8}{3\sin^2 x}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{cotg} x}} + \sqrt[3]{\operatorname{cotg}^5 x}\right) = \frac{-8}{3\sin^4 x\sqrt[3]{\operatorname{cotg} x}}, \quad x \neq \frac{k\pi}{2}, \, k \in \mathbf{Z}.$$

(h) Poněvadž je $y = \ln u$, $u = v^2$, $v = \ln w$, $w = t^3$, $t = \ln x$, platí

$$y' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{2v}{u} \cdot v' = \frac{2v}{uw} \cdot w' = \frac{6vt^2}{uw} \cdot t' = \frac{6vt^2}{uwx},$$

neboli

$$f'(x) = \frac{6\ln^2 x \ln(\ln^3 x)}{x\ln^3 x \ln^2(\ln^3 x)} = \frac{6}{x\ln x \ln(\ln^3 x)} = \frac{2}{x\ln x \ln(\ln x)}, \quad x > 1.$$

Pro $x > e$ lze také počítat $f(x) = \ln(\ln^2(\ln^3 x)) = \ln(9\ln^2(\ln x)) = \ln 9 + 2\ln(\ln(\ln x))$ a tedy

$$f'(x) = \frac{2}{x\ln x \ln(\ln x)}.$$

(i) Hledaný řetězec základních elementárních funkcí má tvar $y = \sqrt{u}$, $u = x + \sqrt{v}$, $v = x + \sqrt{x}$, tedy

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot v'\right) = \frac{1}{2\sqrt{u}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{v}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)$$

a odtud

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right) =$$

$$= \frac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} + 1}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}, \qquad x > 0.$$

(j) Platí $y = 3^u$, $u = \operatorname{arctg} v$, $v = x\sin x + \sqrt[3]{w}$, $w = \operatorname{cotg} x$, tedy

$$f'(x) = 3^u \ln 3 \cdot u' = 3^u \ln 3 \frac{1}{1+v^2} \cdot v' = \frac{3^u \ln 3}{1+v^2}\left(\sin x + x\cos x + \frac{1}{3\sqrt[3]{w^2}} \cdot w'\right) =$$

$$= \frac{3^u \ln 3}{1+v^2}\left(\sin x + x\cos x - \frac{1}{3\sqrt[3]{w^2}\sin^2 x}\right)$$

a odtud

$$f'(x) = \frac{3^{\operatorname{arctg}\left(x\sin x + \sqrt[3]{\operatorname{cotg} x}\right)}\ln 3}{1 + (x\sin x + \sqrt[3]{\operatorname{cotg} x})^2}\left(\sin x + x\cos x - \frac{1}{3\sqrt[3]{\operatorname{cotg}^2 x}\sin^2 x}\right), \, x \neq \frac{k\pi}{2}, \, k \in \mathbf{Z}.$$

5. Vypočtěte derivaci funkce f, je-li

(a) $f(x) = \left(1 + 3x - 5x^2\right)^{30}$; $\left[30(3-10x)\left(1+3x-5x^2\right)^{29}\right]$

(b) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$; $\left[\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1,1)\right]$

(c) $f(x) = \frac{1-\sqrt[3]{2x}}{1+\sqrt[3]{2x}}$; $\left[\frac{-4}{3\sqrt[3]{4x^2}\left(1+\sqrt[3]{2x}\right)^2},\ -\frac{1}{2} \neq x \neq 0\right]$

(d) $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}$; $\left[\frac{x-1}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}},\quad x \neq 0\right]$

(e) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}},\quad a \neq 0$; $\left[\frac{x(x^2+2a^2)}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}\right]$

(f) $f(x) = \frac{x^3}{3\sqrt{(1+x^2)^3}}$; $\left[\frac{x^2}{\sqrt{(1+x^2)^5}}\right]$

(g) $f(x) = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}},\quad a > 0$; $\left[-\frac{\sqrt{a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{x}},\quad x \in (-a,a)\right]$

(h) $f(x) = \cos^2 x$; $[-\sin 2x]$

(i) $f(x) = 3\sin^2 x - \sin^3 x$; $\left[\frac{3}{2}(2-\sin x)\sin 2x\right]$

(j) $f(x) = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$; $\left[1+\operatorname{tg}^6 x,\ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z};\right.$ vyjádřete $\cos^2 x$ pomocí $\left.\operatorname{tg} x\right]$

(k) $f(x) = \sin^2(\cos 3x)$; $[-3\sin 3x\ \sin(2\cos 3x)]$

(l) $f(x) = \sin\sqrt{1+x^2}$; $\left[\frac{x\cos\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right]$

(m) $f(x) = \arcsin\frac{1}{x^2}$; $\left[\frac{-2}{x\sqrt{x^4-1}},\quad |x| > 1\right]$

(n) $f(x) = \frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{ch}^2 x}$; $\left[\frac{1-3\operatorname{th}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}\right]$

(o) $f(x) = \arccos\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$; $\left[-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+2x-2x^2}},\quad x \in \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

(p) $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}$; $\left[\frac{5}{x^4+13x^2+36}\right]$

(q) $f(x) = \ln^2 x - \ln(\ln x)$; $\left[\frac{2\ln x}{x} - \frac{1}{x\ln x},\quad x > 1\right]$

(r) $f(x) = e^{\sin^2 x}$; $\left[e^{\sin^2 x}\sin 2x\right]$

(s) $f(x) = 3^{\operatorname{cotg}\frac{1}{x}}$; $\left[\frac{3^{\operatorname{cotg}\frac{1}{x}}\ln 3}{x^2\sin^2\frac{1}{x}},\quad 0 \neq x \neq \frac{1}{k\pi},\ k \in \mathbf{Z} - \{0\}\right]$

(t) $f(x) = \log_2\log_3\log_5 x$; $\left[\frac{1}{x\ln 2\ln 3\ln 5\log_5 x\log_3\log_5 x},\quad x > 5\right]$

(u) $f(x) = \sqrt[4]{\frac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x}}$; $\left[\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}},\right.$ upravte $f(x)$ pomocí definice $\left.\operatorname{th} x\right]$

(v) $f(x) = \sqrt{a^2-x^2} + a\arcsin\frac{x}{a},\quad a > 0$; $\left[\sqrt{\frac{a-x}{a+x}},\quad x \in (-a,a)\right]$

(w) $f(x) = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$; $\left[\frac{1}{27\sqrt[3]{x^2(1+\sqrt[3]{x})^2}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}\right)^2}},\quad x \neq 0,\ x \neq -1,\ x \neq -8\right]$

(x) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$; $\left[-\frac{1+2\sqrt{x}}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{(x+\sqrt{x})^4}},\quad x > 0\right]$

(y) $f(x) = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$; $\left[\frac{e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}}{(2x+3)\{2+\ln(2x+3)\}\sqrt{1+\ln(2x+3)}},\quad x > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}-3\right)\right]$

(z) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{e^{2x}-1}} + \operatorname{arccotg}\sqrt{e^{2x}-1}\,;$ $\left[-\frac{x\,e^{2x}}{\sqrt{(e^{2x}-1)^3}}\,,\quad x>0\right]$

Poznámka: Nedílnou součástí výpočtu derivace je její úprava. Velmi často se stává, že úprava derivace je delší a obtížnější, než její vlastní výpočet. Někdy lze funkci upravit už před derivováním. Následující cvičení tyto skutečnosti ilustrují.

6. Vypočtěte derivaci funkce f, je-li

a) $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$, $a>0\,;$ b) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)\,;$

c) $f(x) = \cos(3\arccos x)\,;$ d) $f(x) = \dfrac{1-\cos(8x-3\pi)}{\operatorname{tg}2x-\operatorname{cotg}2x}\,;$

e) $f(x) = -\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x} + \ln\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{\sin x}}\,;$ f) $f(x) = \operatorname{arccotg}\left(\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)\,;$

g) $f(x) = \dfrac{1}{1-k}\ln\dfrac{1+x}{1-x} - \dfrac{\sqrt{k}}{1-k}\ln\dfrac{1+x\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}}\,,\quad 0<k<1\,;$

h) $f(x) = \ln\dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}} + \dfrac{a}{b}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{b}\,,\ b\neq 0\,;$ i) $f(x) = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x} - \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}\,;$

j) $f(x) = \sqrt{1-x^2}\,\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} + \arcsin x\,.$

Řešení:

(a) Je

$$f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

(b) Platí

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)^2}\left(1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) =$$

$$\frac{1}{1+x^2-2x\sqrt{1+x^2}+1+x^2}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2\left(1+x^2-x\sqrt{1+x^2}\right)}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2(1+x^2)}.$$

Poznámka: Z výsledku je vidět, že funkce má stejnou derivaci jako funkce $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$. Odtud plyne, že

$$\operatorname{arctg}(x-\sqrt{1+x^2}) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C,$$

kde C je konstanta. O tom se přesvědčíte v kapitole, věnované neurčitému integrálu. Dosazením $x=0$ dostaneme

$$\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 0 + C,\ \text{ tedy } C = -\frac{\pi}{4}.$$

(c) Je

$$f'(x) = \sin(3 \arccos x) \cdot \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Jestliže pomocí Moivreovy věty odvodíme vzorec pro $\sin 3\alpha$, dostaneme

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.$$

(Je totiž $\cos 3\alpha + i \sin 3\alpha = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^3$ a odtud $\sin 3\alpha = 3 \cos^2 \alpha \, \sin \alpha - \sin^3 \alpha$). Využitím tohoto vzorce můžeme přepsat danou derivaci do tvaru

$$f'(x) = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \left\{ 3 \sin(\arccos x) - 4 \sin^3(\arccos x) \right\} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \left\{ 3\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} - 4 \left[\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} \right]^3 \right\} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \left\{ 3\sqrt{1-x^2} - 4(1-x^2)\sqrt{1-x^2} \right\} = 12x^2 - 3.$$

Poznámka: Výsledek je polynom, definovaný na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ (definiční obor funkce $\arccos x$). Tedy daná funkce je též polynom. Jeho tvar jsme mohli odvodit přímo, kdybychom využili vyjádření pro $\cos 3\alpha$. Polynomy $T_n(x) = \cos(n \, \arccos x)$ pro $n = 0, 1, 2, \ldots$, se nazývají Čebyševovy polynomy a hrají důležitou roli v teorii aproximací. Snadno se ukáže, že

$$T_0(x) = 1\,, \quad T_1(x) = x\,, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1\,, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x\,, \text{ atd.}$$

(d) Danou funkci si nejdříve upravíme. Je

$$1 - \cos(8x - 3\pi) = 1 + \cos 8x = 2 \cos^2 4x\,,$$

$$\operatorname{tg} 2x - \operatorname{cotg} 2x = \frac{\sin^2 2x - \cos^2 2x}{\frac{1}{2} \sin 4x} = \frac{-\cos 4x}{\frac{1}{2} \sin 4x} = -2\operatorname{cotg} 4x.$$

Tedy

$$f(x) = \frac{2 \cos^2 4x}{-2\operatorname{cotg} 4x} = -\sin 4x \, \cos 4x = -\frac{1}{2} \sin 8x.$$

Odtud

$$f'(x) = -4 \cos 8x\,, \qquad x \neq k\frac{\pi}{8}\,, \ \ k \in \mathbf{Z}.$$

(e) Funkci f upravíme nejdříve do tvaru

$$f(x) = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln(1 + \cos x) - \frac{1}{2} \ln \sin x \quad (\text{je } \ \sin x > 0\,),$$

tedy (podíl $-\frac{\cos x}{2 \sin^2 x}$ derivujeme jako součin)

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin x}{\sin^2 x} + \frac{2 \cos^2 x}{\sin^3 x} - \frac{\sin x}{1 + \cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1 - \cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{2 \cos^2 x}{\sin^3 x} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1 - \cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x (1 + \cos x)} + \frac{2 \cos^2 x}{\sin^3 x} \right\} =$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} \quad \text{pro} \quad x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)\ , \ \ k \in \mathbf{Z}.$$

(f) Je

$$f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)^2}\frac{(\cos x-\sin x)(\sin x-\cos x)-(\cos x+\sin x)(\sin x+\cos x)}{(\sin x-\cos x)^2} =$$

$$= \frac{(\sin x-\cos x)^2+(\sin x+\cos x)^2}{(\sin x-\cos x)^2+(\sin x+\cos x)^2} = 1\,, \quad x \neq \frac{\pi}{4}+k\pi\,, \ \ k \in \mathbf{Z}.$$

Poznámka: Danou funkci můžeme před derivováním upravit. Platí

$$\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x} = \frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} = \operatorname{cotg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

a je tedy

$$f(x) = \operatorname{arccotg}\left(\operatorname{cotg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right) = x-\frac{\pi}{4}\,, \quad x \in \left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right).$$

Dále je f $\pi-$periodická.

(g) Snadno zjistíme, že definiční obor f je interval $(-1,1)$ a můžeme ji tedy přepsat do tvaru

$$f(x) = \frac{1}{1-k}\left[\ln(1+x)-\ln(1-x)\right] - \frac{\sqrt{k}}{1-k}\left[\ln\left(1+x\sqrt{k}\right)-\ln\left(1-x\sqrt{k}\right)\right].$$

Odtud

$$f'(x) = \frac{1}{1-k}\left[\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right] - \frac{\sqrt{k}}{1-k}\left[\frac{\sqrt{k}}{1+x\sqrt{k}}+\frac{\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}}\right] =$$

$$= \frac{1}{1-k}\cdot\frac{2}{1-x^2} - \frac{k}{1-k}\cdot\frac{2}{1-kx^2} = \frac{2}{1-k}\cdot\frac{1-kx^2-k(1-x^2)}{(1-x^2)(1-kx^2)} =$$

$$= \frac{2}{(1-x^2)(1-kx^2)}\,, \quad |x|<1.$$

(h) Funkce f je zřejmě definováma pro $x \in (-a,+\infty)$ a v tomto oboru ji můžeme přepsat do tvaru

$$f(x) = \ln(x+a) - \frac{1}{2}\ln(x^2+b^2) + \frac{a}{b}\operatorname{arctg}\frac{x}{b}.$$

Tedy

$$f'(x) = \frac{1}{x+a} - \frac{x}{x^2+b^2} + \frac{a}{b^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{b^2}} = \frac{1}{x+a} + \frac{a-x}{x^2+b^2} =$$

$$= \frac{x^2+b^2+a^2-x^2}{(x+a)(x^2+b^2)} = \frac{a^2+b^2}{(x+a)(x^2+b^2)}.$$

(i) Pro $x \neq 0$ platí

$$f'(x) = \frac{1}{4}\,\frac{\sqrt[4]{1+x^4}-x}{\sqrt[4]{1+x^4}+x}\cdot$$

$$\cdot\frac{\left(\frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}+1\right)\left(\sqrt[4]{1+x^4}-x\right)-\left(\frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}-1\right)\left(\sqrt[4]{1+x^4}+x\right)}{\left(\sqrt[4]{1+x^4}-x\right)^2}-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}}\cdot\frac{\frac{x^4}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}-\sqrt[4]{1+x^4}}{x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt[4]{1+x^4}-\frac{x^4}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}}{\sqrt[4]{1+x^4}-x^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt[4]{1+x^4}-\frac{x^4}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}}{\sqrt[4]{1+x^4}+x^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}(\sqrt[4]{1+x^4}-x^2)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}(\sqrt[4]{1+x^4}+x^2)} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt[4]{(1+x^4)^3}} \left\{ \sqrt[4]{1+x^4} + x^2 + \sqrt[4]{1+x^4} - x^2 \right\} = \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$$

Poznámka: Výpočet by byl trochu kratší, kdybychom si nejdříve rozepsali daný logaritmus jako rozdíl logaritmů.

(j) Je zřejmé, že funkce f je definována pro $x \in (-1,) \cup (0,1)$ a před derivováním ji přepíšeme do tvaru

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \{ \ln(1-x) - \ln(1+x) \} + \frac{1}{2} \left\{ \ln\left(1 - \sqrt{1-x^2}\right) - \ln\left(1 + \sqrt{1-x^2}\right) \right\} +$$

$$+ \sqrt{1-x^2} + \arcsin x.$$

Tedy

$$f'(x) = \frac{-x}{2\sqrt{1-x^2}} \{ \ln(1-x) - \ln(1+x) \} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \left\{ -\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right\} +$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-\sqrt{1-x^2}} + \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1+\sqrt{1-x^2}} \right\} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \cdot \frac{2}{1-x^2} + \frac{x}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{2}{x^2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1-x^2}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

7. Vypočtěte derivaci funkce f, je-li

(a) $f(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{4}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2(1+x)}$; $\left[\frac{1}{(1+x)^2(1+x^2)}, \quad x > -1 \right]$

(b) $f(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}$; $\left[\frac{x}{x^4-1}, \quad |x| > 1 \right]$

(c) $f(x) = \frac{1}{4(1+x^2)} + \frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{1+x^4}$; $\left[\frac{1}{x(1+x^4)^2}, \quad x \neq 0 \right]$

(d) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; $\left[\frac{1}{3x^2-2}, \quad |x| > \sqrt{\frac{2}{3}} \right]$

(e) $f(x) = \sqrt{x+1} - \ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)$; $\left[\frac{1}{2(1+\sqrt{x+1})}, \quad x > -1 \right]$

(f) $f(x) = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$; $\left[\sqrt{x^2+a^2} \right]$

(g) $f(x) = \frac{2+3x^2}{x^4}\sqrt{1-x^2} + 3\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$; $\left[-\frac{8}{x^2\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (0,1) \right]$

(h) $f(x) = \ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$; $\left[\frac{1}{\cos x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right), k \in \mathbf{Z} \right]$

(i) $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2 x + \ln\sin x$; $\left[-\operatorname{cotg}^3 x, \quad x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbf{Z} \right]$

(j) $f(x) = \ln\frac{b+a\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a+b\cos x}, \quad 0 \le a < b$; $\left[\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos x}, \right.$
$\left. x \in \left(\arccos\frac{a}{b} - \pi + 2k\pi, \pi - \arccos\frac{a}{b} + 2k\pi\right), k \in \mathbf{Z} \right]$

(k) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right), \quad 0 \le b < a$; $\left[\frac{1}{a+b\cos x}, \quad x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z} \right]$

(l) $f(x) = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}, \quad a > 0$; $\left[\sqrt{a^2-x^2}, \quad x \in (-a,a) \right]$

(m) $f(x) = \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$; $\left[\frac{1}{x^3+1}, \quad x \neq -1 \right]$

(n) $f(x)=\frac{1}{4\sqrt2}\ln\frac{x^2+x\sqrt2+1}{x^2-x\sqrt2+1}-\frac{1}{2\sqrt2}\text{arctg}\,\frac{x\sqrt2}{x^2-1}$; $\quad\left[\frac{1}{x^4+1}\,,\quad |x|\neq 1\right]$

(o) $f(x)=\frac{1}{12}\ln\frac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2\sqrt3}\text{arctg}\,\frac{\sqrt3}{2x^2-1}$; $\quad\left[\frac{x^3}{x^6+1}\,,\quad |x|\neq \frac{1}{\sqrt2}\right]$

(p) $f(x)=\ln\frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}}+\sqrt3\text{arctg}\,\frac{1+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt3}$; $\quad\left[\frac{1}{(x-1)\sqrt[3]{x}}\,,\quad x<1\right]$

(q) $f(x)=\text{arccotg}\,\frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}\,,\quad a>0$; $\quad\left[\frac{1}{\sqrt{ax-x^2}}\,,\quad x\in(0,a)\right]$

(r) $f(x)=\frac{3-x}{2}\sqrt{1-2x-x^2}+2\arcsin\frac{1+x}{\sqrt2}$; $\quad\left[\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}\,,\quad |x+1|<\sqrt2\right]$

(s) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt2}\text{arctg}\,\frac{x\sqrt2}{\sqrt{1+x^4}}-\frac{1}{4\sqrt2}\ln\frac{\sqrt{1+x^4}-x\sqrt2}{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt2}$; $\quad\left[\frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}\,,\quad |x|\neq 1\right]$

(t) $f(x)=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt2}\text{arccotg}\,\frac{x\sqrt2}{\sqrt{1-x^2}}$; $\quad\left[\frac{4}{(1+x^2)^2\sqrt{1-x^2}}\,,\quad |x|<1\right]$

8. Vypočtěte derivaci funkce f, je-li

a) $f(x)=\sqrt[x]{x}$; b) $f(x)=(\sin x)^{x^2}$; c) $f(x)=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}$, $a>0$;

d) $f(x)=x+x^x+x^{x^x}$; e) $f(x)=x^{x^a}+x^{a^x}+a^{x^x}$.

Řešení:

(a) Funkci f nejdříve vyjádříme pomocí exponenciální funkce ve tvaru

$$f(x)=e^{\frac{1}{x}\ln x}.$$

Odtud

$$f'(x)=e^{\frac{1}{x}\ln x}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}=x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)\,,\quad x>0.$$

Poznámka: Tento postup lze také zapsat tak, že danou finkci nejdříve zlogaritmujeme, tedy

$$\ln f(x)=\frac{\ln x}{x}\ \text{ a odtud }\ \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1-\ln x}{x^2},$$

tedy

$$f'(x)=f(x)\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x).$$

Vzorec

$$f'(x)=f(x)\,[\ln f(x)]'\,,\quad x\in D(f')\cap\{x\in D(f);\,f(x)>0\,\}$$

(tzv. logaritmické derivování) lze užít i pro výpočet derivace složitých součinů.

(b) Analogicky $f(x)=e^{x^2\ln\sin x}$, tedy

$$f'(x)=e^{x^2\ln\sin x}(2x\ln\sin x+x^2\text{cotg}\,x)=$$

$$=(\sin x)^{x^2}(2x\ln\sin x+x^2\text{cotg}\,x)\,,\quad x\in(2k\pi,(2k+1)\pi)\ ,\ k\in\mathbf{Z}$$

(c) Je

$$f'(x)=a^a x^{a^a-1}+a^{x^a}\ln a\cdot ax^{a-1}+a^{a^x}\ln a\cdot a^x\ln a=a^a x^{a^a-1}+ax^{a-1}a^{x^a}\ln a+a^x a^{a^x}\ln^2 a.$$

Pro lepší porozumění je vhodné si napsat řetězec základních elementárních funkcí, ze kterých se daná funkce f skládá. Je $f(x)=x^n+a^u+a^v$, kde $n=a^a$ je konstanta, $u=x^a$ a $v=a^x$ jsou funkce.

(d) Platí

$$f(x) = x + e^{x \ln x} + e^{x^x \ln x} = x + e^{x \ln x} + e^{e^{x \ln x} \ln x}$$

a tedy

$$f'(x) = 1 + e^{x \ln x}(\ln x + 1) + e^{e^{x \ln x} \ln x} \left(e^{x \ln x}(\ln x + 1) \ln x + e^{x \ln x} \cdot \frac{1}{x} \right) =$$

$$= 1 + x^x(\ln x + 1) + x^{x^x} \cdot x^x \left(\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x} \right), \quad x > 0.$$

(e) Poněvadž je

$$f(x) = e^{x^a \ln a} + e^{a^x \ln x} + a^{e^{x \ln x}},$$

dostaneme

$$f'(x) = e^{x^a \ln a} \left(a x^{a-1} \ln x + \frac{x^a}{x} \right) + e^{a^x \ln x} \left(a^x \ln a \ln x + \frac{a^x}{x} \right) + a^{e^{x \ln x}} \ln a \, e^{x \ln x}(\ln x + 1) =$$

$$= x^{x^a} x^{a-1}(a \ln x + 1) + x^{a^x} a^x \left(\ln a \ln x + \frac{1}{x} \right) + a^{x^x} x^x \ln a (\ln x + 1), \quad x > 0.$$

9. Vypočtěte derivaci funkce f, je-li

(a) $f(x) = x^{\ln x}$; $\quad \left[2x^{\ln x - 1} \cdot \ln x, \quad x > 0 \right]$

(b) $f(x) = x^{x^2}$; $\quad \left[x^{1+x^2}(2 \ln x + 1), \quad x > 0 \right]$

(c) $f(x) = (x+1)^{x^2}$; $\quad \left[x(x+1)^{x^2} \left(2 \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} \right), \quad x > -1 \right]$

(d) $f(x) = (x^2+1)^x$; $\quad \left[(x^2+1)^x \left(\ln(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1} \right) \right]$

(e) $f(x) = \left(\frac{x}{x+1} \right)^x$; $\quad \left[\left(\frac{x}{x+1} \right)^x \left(\frac{1}{x+1} + \ln \frac{x}{x+1} \right), \quad x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) \right]$

(f) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$; $\quad [(\sin x)^{\cos x} (\cos x \operatorname{cotg} x - \sin x \ln \sin x),$
$x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), \ k \in \mathbf{Z}]$

(g) $f(x) = (x^2+1)^{\sin x}$; $\quad \left[(x^2+1)^{\sin x} \left(\frac{2x \sin x}{x^2+1} + \cos x \ \ln(x^2+1) \right) \right]$

(h) $f(x) = (\sin x)^{\arcsin x}$; $\quad \left[(\sin x)^{\arcsin x} \left(\frac{\ln \sin x}{\sqrt{1-x^2}} + \operatorname{cotg} x \ \arcsin x \right), \right.$
$\left. x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), \ k \in \mathbf{Z} \right]$

(i) $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$; $\quad \left[\frac{1}{x} (\ln x)^{\ln x} (1 + \ln \ln x), \quad x > 1 \right]$

(j) $f(x) = \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$; $\quad \left[\frac{(\ln x)^{x-1}}{x^{\ln x + 1}} (x - 2 \ln^2 x + x \ \ln x \ \ln \ln x), \quad x > 1 \right]$

(k) $f(x) = \left(\frac{a}{b} \right)^x \left(\frac{b}{x} \right)^a \left(\frac{x}{a} \right)^b, \quad a, b, c > 0$; $\quad \left[\left(\frac{a}{b} \right)^x \left(\frac{b}{x} \right)^a \left(\frac{x}{a} \right)^b \left(\ln \frac{a}{b} + \frac{b-a}{x} \right), \quad x > 0 \right]$

(l) $f(x) = x^{2^x} + 2^{x^x}$; $\quad \left[2^x x^{2^x} \left(\ln x \ \ln 2 + \frac{1}{x} \right) + x^x 2^{x^x} \ln 2 (\ln x + 1), \quad x > 0 \right]$

10. Ukažte, že funkce $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ vyhovuje rovnici

$$(1 - x^2) y' - xy = 1.$$

Řešení: Poněvadž $y' = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x \arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}, \ x \in (-1, 1)$, je

$$(1 - x^2) y' - xy = 1 + \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = 1, \quad x \in (-1, 1)$$

a rovnice je splněna.

11. Ukažte, že funkce y vyhovuje dané rovnici

a) $y = xe^{-x}$, $xy' = (1-x)y$; b) $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$, $xy' = (1-x^2)y$;

c) $y = \dfrac{1}{1+x+\ln x}$, $xy' = y(y\ln x - 1)$; d) $y = \dfrac{1}{3\sqrt{1-x^2}-1}$, $(1-x^2)y' - xy = xy^2$.

Poznámka: Rovnice z příkladu c) je splněna v

$$D(f) = \{x > 0;\ 1 + x + \ln x \neq 0\} = (0, x_0) \cup (x_0, +\infty).$$

Rozmyslete si, že rovnice $1 + x + \ln x = 0$ má jediné řešení x_0 a zkuste je spočítat přibližně. Rovnice z příkladu d) má smysl pro x taková, že $\frac{2\sqrt{2}}{3} \neq |x| < 1$. Až se naučíte řešit diferenciální rovnice 1. řádu, uvidíte, že rovnice z příkladů a) a b) jsou separovatelné, rovnice z příkladů c) a d) Bernoulliovy.

12. Buďte f a g funkce, které mají pro $x \in \mathbf{R}$ vlastní derivaci. Najděte derivaci následujících funkcí:

(a) $f(\ln x)$; $\left[\frac{f'(\ln x)}{x}, \quad x > 0\right]$

(b) $f(e^x)e^{f(x)}$; $\left[e^{f(x)}\left\{e^x f'(e^x) + f'(x)f(e^x)\right\}\right]$

(c) $f\left(\sin^2 x\right) + g\left(\cos^2 x\right)$; $\left[\sin 2x\left\{f'\left(\sin^2 x\right) + g'\left(\cos^2 x\right)\right\}\right]$

(d) $\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$; $\left[\frac{f(x)f'(x)+g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}, \quad f(x) \neq 0 \vee g(x) \neq 0\right]$

(e) $\operatorname{arctg} \frac{f(x)}{g(x)}$; $\left[\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{f^2(x)+g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0\right]$

(f) $\ln\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$; $\left[\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{f(x)\,g(x)}, \quad f(x) \neq 0,\ g(x) \neq 0\right]$

(g) $[\,f(x)\,]^{g(x)}$; $\left[[\,f(x)\,]^{g(x)}\left\{g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right\}, \quad f(x) > 0\right]$

(h) $\log_{g(x)} f(x)$; $\left[\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \frac{1}{\ln g(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)} \cdot \frac{\ln f(x)}{\ln^2 g(x)}, \quad f(x) > 0,\ g(x) > 0,\ g(x) \neq 1\right]$

[vyjádřete daný logaritmus pomocí přirozeného logaritmu]

13. Vypočtěte derivaci funkce f, je-li

a) $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$; b) $f(x) = |\sin x|$; c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{pro} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{pro} \quad x = 0; \end{cases}$

d) $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$; e) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{pro} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{pro} \quad x = 0; \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} x & \text{pro} \quad x \leq 0 \\ \sqrt[3]{x^4}\ln x & \text{pro} \quad x > 0; \end{cases}$ g) $f(x) = \begin{cases} 1 + e^{\frac{1}{x}} & \text{pro} \quad x < 0 \\ \sqrt{1 + \sqrt[3]{x^4}} & \text{pro} \quad x \geq 0; \end{cases}$

h) $f(x) = [\,x\,]$; i) $f(x) = x\,[\,x\,]$; j) $f(x) = [\,x\,]\sin \pi x$; k) $f(x) = \arcsin(\cos x)$.

Řešení:

(a) Je

$$f(x) = x^2 - 5x + 6 \quad \text{pro} \quad x \in (-\infty, 2\rangle \cup \langle 3, +\infty)\,,$$

tedy

$$f'(x) = 2x - 5 \quad \text{pro} \quad x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)\,, \quad f'_-(2) = -1\,, \quad f'_+(3) = 1.$$

Dále

$$f(x) = -x^2 + 5x - 6 \quad \text{pro} \quad x \in \langle 2, 3\rangle,$$

tedy

$$f'(x) = -2x + 5 \quad \text{pro} \quad x \in (2, 3)\,, \quad f'_+(2) = 1\,, \quad f'_-(3) = -1.$$

(b) Pro $x \in \langle 0, \pi\rangle$ je $f(x) = \sin x$. Tedy

$$f'(x) = \cos x \quad \text{pro} \quad x \in (0, \pi)\,, \quad f'_+(0) = \cos 0 = 1\,, \quad f'_-(\pi) = \cos \pi = -1.$$

Protože funkce f je $\pi-$periodická, máme

$D(f') = \mathbf{R} - \{k\pi\,,\ k \in \mathbf{Z}\,,\ f'(x) = \cos x \cdot \operatorname{sgn} \sin x$ pro $x \in D(f')\,,\quad f_\pm(k\pi) = \pm 1\,,\ k \in \mathbf{Z}$.

Funkce f' je $\pi-$periodická. Načrtněre grafy funkcí f a f'.

(c) Pro $x \neq 0$ je zřejmě

$$f'(x) = \frac{x + e^{\frac{1}{x}}(x+1)}{x\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)^2}.$$

Derivace

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{h}}}$$

neexistuje, poněvadž $f'_+(0) = 0\,,\quad f'_-(0) = 1$. Ukažte, že navíc platí

$$f'(0_+) = \lim_{x\to 0_+} f(x) = f'_+(0)\,, \quad f'(0_-) = \lim_{x \to 0_-} f(x) = f'_-(0).$$

(d) Funkce f je sudá a $x \in D(f)$ právě když $x^2 \in \langle 2n\pi, (2n+1)\pi\rangle$, $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, tedy

$$D(f) = \left\{x \in \mathbf{R};\ |x| \in \left\langle \sqrt{2n\pi}, \sqrt{(2n+1)\pi}\right\rangle\,, \quad n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\right\}.$$

Je-li

$$x \in D(f) - \bigcup_{n=0}^{\infty} \left\{-\sqrt{n\pi}, \sqrt{n\pi}\right\}\,, \text{ pak } f'(x) = \frac{x\,\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}.$$

Dále

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{\sqrt{\sin h^2}}{h} = \lim_{h\to 0_+} \sqrt{\frac{\sin h^2}{h^2}} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0_-} \frac{\sqrt{\sin h^2}}{h} = -\lim_{h\to 0_-} \sqrt{\frac{\sin h^2}{h^2}} = -1\,,$$

$$f'_-(\sqrt{\pi}) = \lim_{h \to 0_-} \frac{\sqrt{\sin\left(\sqrt{\pi} + h\right)^2}}{h} = \lim_{h\to 0_-} \frac{\sqrt{-\sin\left(2\sqrt{\pi}h + h^2\right)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0_-} \sqrt{\frac{\sin(2\sqrt{\pi}h + h^2)}{2\sqrt{\pi}h + h^2}} \cdot \frac{\sqrt{-2\sqrt{\pi}h - h^2}}{h} = -\lim_{h \to 0_-} \sqrt{\frac{-2\sqrt{\pi}h - h^2}{h^2}} = -\infty.$$

Ze sudosti funkce f plyne, že $f'_+(-\sqrt{\pi}) = +\infty$. Analogicky můžeme ukázat, že

$$f'_-\left(\sqrt{(2n+1)\pi}\right) = -\infty\,, \qquad f'_+\left(-\sqrt{(2n+1)\pi}\right) = +\infty\,,$$

$$f'_+\left(\sqrt{2n\pi}\right) = +\infty\,, \qquad f'_-\left(-\sqrt{2n\pi}\right) = -\infty\,, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Poznámka: Stejný výsledek dostaneme, jestliže vypočteme příslušné jednoatranné limity funkce f v bodech $\sqrt{n\pi}$.

(e) Pro $x \neq 0$ je

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

Je-li $x = 0$, potom

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin\frac{1}{h} = 0,$$

zatímco

$$f'(0_+) = \lim_{h\to 0_+} f'(x) \quad \text{ani} \quad f'(0_-) = \lim_{h\to 0_-} f'(x)$$

neexistují. Jak uvidíme později, znamená to, že f je spojitá v bodě $x = 0$, poněvadž existuje vlastní derivace $f'(0)$, ale $f'(x)$ spojitá v bodě $x = 0$ není.

(f) Je zřejmé, že

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad x < 0, \\ \sqrt[3]{x}\left(\frac{4}{3}\ln x + 1\right) & \text{pro} \quad x > 0. \end{cases}$$

Dále

$$f'_-(0) = 1 \quad \text{a} \quad f'_+(0) = \lim_{h\to 0_+} \frac{\sqrt[3]{h^4}\,\ln h}{h} = 0.$$

(g) Platí

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} & \text{pro} \quad x < 0, \\ \frac{2\sqrt[3]{x}}{3\sqrt{1+\sqrt[3]{x^4}}} & \text{pro} \quad x > 0. \end{cases}$$

Dále je zřejmě

$$f'_+(0) = 0 \quad \text{a} \quad f'_-(0) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0_-} \frac{1 + e^{\frac{1}{h}} - 1}{h} = \lim_{t\to -\infty} te^t = 0.$$

Ukažte, že funkce f' je spojitá v bodě $x = 0$.

(h) Poněvadž je f konstantní na každém intervalu $\langle n, n+1)$ pro $n \in \mathbf{Z}$, je $f'(x) = 0$ pro $x \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}$. Pro $n \in \mathbf{Z}$ platí

$$f'_+(n) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(n+h) - f(n)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{n - n}{h} = 0\,, \quad f'_-(n) = \lim_{h\to 0_-} \frac{n - 1 - n}{h} = +\infty.$$

(i) Pro $x \in (n, n+1)$ $(n \in \mathbf{Z})$ je $f(x) = nx$, tedy $f'(x) = n$. Dále

$$f'_+(n) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(n+h) - f(n)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{n(n+h) - n^2}{h} = n.$$

$$f'_-(n) = \lim_{h\to 0_-} \frac{(n-1)(n+h) - n^2}{h} = \lim_{h\to 0_-} \frac{(n-1)h - n}{h} = \begin{cases} -1 & \text{pro} \quad n = 0, \\ +\infty & \text{pro} \quad n \in \mathbf{N}, \\ -\infty & \text{pro} \quad -n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

(j) Pro $x \in (n, n+1) \quad (n \in \mathbf{Z})$ je $f(x) = n \sin \pi x$, tedy

$$f'(x) = \pi n \cos \pi x = \pi [x] \cos \pi x .$$

Dále

$$f'_+(n) = \lim_{h \to 0_+} \frac{f(n+h) - f(n)}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{n \sin \pi (n+h)}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{n(-1)^n \sin \pi h}{h} = \pi n (-1)^n ,$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0_-} \frac{(n-1) \sin \pi (n+h)}{h} = \lim_{h \to 0_-} \frac{(n-1)(-1)^n \sin \pi h}{h} = \pi (n-1)(-1)^n , \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Srovnejte výsledek s obrázkem za příkladem 4.14.m).

(k) Daná funkce je definována pro $x \in \mathbf{R}$, spojitá, sudá a $2\pi-$periodická. Dále pro $x \in \langle 0, \pi \rangle$ platí

$$f(x) = \arcsin(\cos x) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{\pi}{2} - x ,$$

neboť pro $x \in \langle 0, \pi \rangle$ je $\frac{\pi}{2} - x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Ze sudosti funkce f je $f(x) = \frac{\pi}{2} - |x|$ pro $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$. Jestliže si namalujeme graf funkce f na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$, a doplníme jej $2\pi-$periodicky, dostaneme, že graf funkce f vypadá následovně. Obrázek.

Odtud

$$f'(x) = (-1)^{n+1} \quad \text{pro} \quad x \in (n\pi, (n+1)\pi) , \quad n \in \mathbf{Z},$$

$$f'_+(2n\pi) = f'_-((2n+1)\pi) = -1 , \quad f'_-(2n\pi) = f'_+((2n-1)\pi) = 1 , \qquad n \in \mathbf{Z}.$$

14. Vypočtěte derivaci funkce f, je-li

(a) $f(x) = \ln |x|$; $\left[\ \frac{1}{x} ,\ x \neq 0 \right]$

(b) $f(x) = x|x|$; $[\,2|x|\,]$

(c) $f(x) = \arcsin \frac{1}{|x|}$; $\left[-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \text{ pro } |x| > 1 , \quad f'_+(1) = -\infty , \quad f'_-(-1) = +\infty \right]$

(d) $f(x) = |(x-1)^2(x+1)^3|$; $\left[\ (x-1)(x+1)^2(5x-1)\mathrm{sgn}\,(x+1) \right]$

(e) $f(x) = |\mathrm{arctg}\ x|$; $\left[\frac{\mathrm{sgn}\, x}{1+x^2} \text{ pro } x \neq 0 , \quad f'_-(0) = -1 ,\ f'_+(0) = 1 \right]$

(f) $f(x) = |\sin^3 x|$; $\left[\ \frac{3}{2} \sin 2x \cdot |\sin x| \right]$

Poznámka: Označme $g(x) = |f(x)|$ a nechť existuje $f'(x_0) \in \mathbf{R}$. Pokuste se formulovat podmínky, za kterých existuje $g'(x_0)$. Čemu se tato derivace rovná?

(g) $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$; $\left[\frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}} \quad \text{pro} \quad x \neq 0 , \quad f'_-(0) = -1 , \quad f'_+(0) = 1 \right]$

(h) $f(x) = [x] \sin^2 \pi x$; $[\,\pi [x] \sin 2\pi x\,]$

(i) $f(x) = \begin{cases} x & \text{pro} \quad x < 0, \\ \ln(1+x) & \text{pro} \quad x \geq 0 ; \end{cases}$ $\left[f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad x < 0 \\ \frac{1}{1+x} & \text{pro} \quad x \geq 0 \end{cases} \right]$

(j) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{pro} \quad x < 0 . \\ \ln\left(1 + \sqrt[5]{x^7}\right) & \text{pro} \quad x \geq 0 ; \end{cases}$ $\left[f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{pro} \quad x < 0 \\ \frac{7\sqrt[5]{x^2}}{5\left(1+\sqrt[5]{x^7}\right)} & \text{pro} \quad x > 0 \end{cases} \right.$ $\left. f'_-(0) = 2 ,\ f'_+(0) = 0 \right]$

(k) $f(x)=\begin{cases} 1-x & \text{pro} \quad x<1, \\ (1-x)(2-x) & \text{pro} \quad 1\le x\le 2, \\ -(2-x) & \text{pro} \quad x>2\,; \end{cases}$ $\left[f'(x)=\begin{cases} -1 & \text{pro} \quad x<1, \\ 2x-3 & \text{pro} \quad 1\le x\le 2 \\ 1 & \text{pro} \quad x>2 \end{cases} \right]$

(l) $f(x)=(1-x^2)\operatorname{sgn} x\,;$ $\left[-2x\operatorname{sgn} x \quad \text{pro} \quad x\neq 0\,, \quad f'(0)=+\infty \right]$

(m) $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{|x|}(1-x^2) & \text{pro} \quad x\neq 0, \\ 1 & \text{pro} \quad x=0\,; \end{cases}$

$\left[-2x\operatorname{sgn} x \quad \text{pro} \quad x\neq 0\,, \quad f'_-(0)=+\infty\,,\ f'_+(0)=0 \right]$

Poznámka: Nechť $f(x)=\frac{x}{|x|}(1-x^2)$ pro $x\neq 0$, $\quad f(0)=a\in\mathbf{R}$. Ukažte, že

$$f'_+(0)=\begin{cases} +\infty & \text{pro} \quad a<1\,, \\ 0 & \text{pro} \quad a=1\,, \\ -\infty & \text{pro} \quad a>1\,; \end{cases} \qquad f'_-(0)=\begin{cases} -\infty & \text{pro} \quad a<-1\,, \\ 0 & \text{pro} \quad a=-1\,, \\ +\infty & \text{pro} \quad a>-1\,. \end{cases}$$

Srovnejte výsledek s příklady l) a m).

(n) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg} x & \text{pro} \quad |x|\le 1\,, \\ \frac{x}{2}+\frac{\pi-2}{4}\operatorname{sgn} x & \text{pro} \quad |x|>1\,; \end{cases}$ $\left[f'(x)=\begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{pro} \quad |x|\le 1\,, \\ \frac{1}{2} & \text{pro} \quad |x|>1\,. \end{cases} \right]$

(o) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} & \text{pro} \quad x\neq 1\,, \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro} \quad x=1\,; \end{cases}$ $\left[\frac{1}{1+x^2} \quad \text{pro} \quad x\neq 1\,, \quad f'_+(1)=-\infty\,,\ f'_-(1)=\frac{1}{2} \right]$

(p) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} & \text{pro} \quad x\neq 0\,, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{pro} \quad x=0\,; \end{cases}$ $\left[-\frac{1}{1+x^2} \quad \text{pro} \quad x\neq 0\,, \quad f'_+(0)=+\infty\,,\ f'_+(0)=-1 \right]$

15. Najděte diferenciál funkce f, je-li

(a) $f(x)=\frac{1}{x^n}\,,\ n\in\mathbf{N}\,;$ $\left[-\frac{n\,dx}{x^{n+1}}\,,\ x\neq 0 \right]$

(b) $f(x)=e^{-x^2}\,;$ $\left[-2xe^{-x^2}\,dx \right]$

(c) $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,;$ $\left[\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}\,dx\,,\ x>0 \right]$

(d) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,;$ $\left[\frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}\,,\ x\in(-1,1) \right]$

(e) $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}\,;$ $\left[\frac{-2\,dx}{1-x^2}\,,\ x\in(-1,1) \right]$

(f) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)\,,\ a>0\,;$ $\left[\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} \right]$

(g) $f(x)=\arcsin\frac{x}{a}\,,\ a\neq 0\,;$ $\left[\frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx\,,\ |x|<|a| \right]$

(h) $f(x)=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\,.$ $\left[\frac{dx}{\cos^3 x}\,, \quad x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}\,,\ k\in\mathbf{Z} \right]$

16. Pomocí diferenciálu vypočtěte přibližně

a) $\sqrt[3]{1,02}\,;$ b) $\operatorname{arctg} 1,05\,;$ c) $\sin 46^0\,;$ d) $f(1,016)$, je-li $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+x+1}}\,.$

Poznámka: K řešení úlohy využijeme definice diferenciálu, tj. vlastnosti, že „hlavní část“ přírůstku funkce je lineární. Platí totiž

$$f(x_0+h)-f(x_0)=df(x_0)+\omega(h)\,, \ \text{kde} \ \lim_{h\to 0}\frac{\omega(h)}{h}=0\,.$$

Tedy platí přibližná formule

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + df(x_0).$$

Využití této formule předpokládá, že umíme vypočítat $f(x_0)$ a $f'(x_0)$.

Řešení:

(a) Buď $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1$, $h = 0,02$. Potom

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,, \quad f(x_0) = 1\,, \quad f'(x_0) = \frac{1}{3}\,,$$

tedy

$$\sqrt[3]{1,02} \approx 1 + \frac{1}{3} \cdot 0,02 = 1,0067.$$

Přesnější hodnota je $1,00662$.

(b) Položme $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$, $h = 0,05$. Potom platí

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}\,, \quad f(x_0) = \frac{\pi}{4} = 0,78539\,, \quad f'(x_0) = \frac{1}{2}\,,$$

tedy

$$\operatorname{arctg} 1,05 \approx 0,78539 + \frac{1}{2} \cdot 0,05 = 0,81039.$$

Přesnější hodnota je $0,8097835$.

(c) Je

$$f(x) = \sin x\,, \quad x_0 = \frac{\pi}{4} = 0,78539\,, \quad h = \frac{\pi}{180} = 0,017453\,,$$

$$f'(x) = \cos x\,, \quad f(x_0) = f'(x_0) = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,7071,$$

tedy

$$\sin 46^0 = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180} \cdot \cos\frac{\pi}{4} = 0,7194,$$

zatímco přesnější hodnota je $0,7193398$.

(d) Zvolme $x_0 = 1$, $h = 0,016$. Protože

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\left(2x^2 + x + 1\right)^{-\frac{3}{2}}(4x+1)\,, \quad x \in \mathbf{R},$$

je

$$f'(1) = -\frac{5}{2}\,4^{-\frac{3}{2}} = -\frac{5}{16} \text{ a odtud } df(x_0)(h) = -\frac{5}{16} \cdot 0,016 = -0,005.$$

Tedy

$$f(1,016) = f(x_0 + h) \approx f(x_0) + df(x_0) = \frac{1}{2} - 0,005 = 0,495.$$

Přesnější hodnota je $0,4950427$.

Poznámky: i) Využití diferenciálu k přibližnému výpočtu funkčních hodnot má nevýhodu v tom, že neznáme chybu, které jsme se dopustili. Má však tu přednost, že nepotřebujeme prakticky žádný aparát (pouze pojem derivace a diferenciálu). Později se seznámíme s Taylorovým vzorcem, který nám umožní odhadnout chybu přibližného výpočtu. Ten však vyžaduje znalost základních vět diferenciálního počtu (je to důsledek zobecněné věty o střední hodnotě).

ii) Pomocí diferenciálu můžeme odvodit řadu přibližných formulí, jako např.

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x\,, = \qquad \sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{3}x\,, \quad \sin x \approx x\,, \quad \operatorname{tg} x \approx x\,, \quad \operatorname{arctg}\, x \approx x,$$

které všechny platí pro dostatečně malé hodnoty x.

17. Pomocí diferenciálu vypočtěte přibližně hodnotu

(a) $\sin 29^0$; [0,4849]

(b) $\operatorname{tg} 46^0$; [1,034906]

(c) $\log 1001$; [3,00043]

(d) $\arcsin 0,2$; [0,2]

(e) $\ln 25,02$; [3,2197, užijte hodnoty $\ln 25 \approx 3,2189$]

(f) $2^{1,002}$; [2,0028]

(g) $\sqrt{5}$; [2,25]

(h) $\sqrt{34}$; [5,833]

(i) $\sqrt{120}$; [10,9546]

(j) $\sqrt[3]{9}$; [2,083]

(k) $\sqrt[4]{80}$; [2,9907]

(l) $\sqrt[7]{100}$; [1,938]

(m) $\sqrt[10]{1000}$; [1,9954, ve cvičeních g) - m) využijte přibližné formule $\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}}\,, \quad a > 0\,, n \in \mathbf{N}$]

18. Najděte derivaci $\frac{dy}{dx}$ pro parametricky zadanou funkci, je-li

a) $x = \dfrac{3at}{1+t^3}\,,\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}\,,\ t \neq -1\,;$

b) $x = \dfrac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}\,,\ y = \dfrac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}\,,\ t \in \left(-\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \dfrac{\pi}{4} + k\pi\right)\,,\ k \in \mathbf{Z}\,;$

c) $x = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,,\ y = \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,.$

Řešení:

(a) Poněvadž platí

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t}\,, \quad \text{je pro} \quad x'_t \neq 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{6at(1+t^3)-9at^4}{(1+t^3)^2}}{\frac{3a(1+t^3)-9at^3}{(1+t^3)^2}} = \frac{2t+2t^4-3t^4}{1+t^3-3t^3} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}\,, \quad t \neq -1, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

(b) Je

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3\sin^2 t\, \cos t}{\sqrt{\cos 2t}} + \frac{\sin^3 t\, \sin 2t}{\sqrt{\cos^3 2t}} = \frac{3\sin^2 t\, \cos t\, \cos 2t + \sin^3 t\, \sin 2t}{\sqrt{\cos^3 2t}} =$$

$$= \frac{\cos t\, \sin^2 t \left\{3\left(1 - 2\sin^2 t\right) + 2\sin^2 t\right\}}{\sqrt{\cos^3 2t}} = \frac{\cos t\, \sin^2 t \left(3 - 4\sin^2 t\right)}{\sqrt{\cos^3 2t}}\,,$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{3\cos^2 t\,\sin t}{\sqrt{\cos 2t}} + \frac{\cos^3 t\,\sin 2t}{\sqrt{\cos^3 2t}} = \frac{\sin t\,\cos^2 t\left\{2\cos^2 t - 3\left(2\cos^2 t - 1\right)\right\}}{\sqrt{\cos^3 2t}}$$
$$= \frac{\sin t\,\cos^2 t\left(3 - 4\cos^2 t\right)}{\sqrt{\cos^3 2t}}$$

a tedy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\sin t - 4\sin^3 t}{3\cos t - 4\cos^3 t} = -\frac{\sin 3t}{\cos 3t} = -\mathrm{tg}3t\,, \quad t \neq -\frac{\pi}{6} + k\pi, k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi.$$

Podle cvičení 6c) je totiž

$$\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t\,, \quad \cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t.$$

(c) Poněvadž je

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{1+t^2}}} \cdot \frac{-t}{\sqrt{(1+t^2)^3}} = -\frac{dx}{dt}\,,$$

dostaneme, že $\frac{dy}{dx} = -1$. Tento výsledek však můžeme dostat rovnou, jestliže si uvědomíme, že

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \text{pro} \quad x \in \langle -1, 1\rangle.$$

Platí tedy $x + y = \frac{\pi}{2}$. Danými rovnicemi je tedy parametricky zadána úsečka $y = \frac{\pi}{2} - x\,,\ x \in \langle 0, 1)$.

19. Najděte derivaci $\frac{dy}{dx}$ pro parametricky zadanou funkci, je-li

(a) $x = a\cos^2 t\,,\ y = b\sin^2 t\,;$ $\left[-\frac{b}{a}\,,\ t \neq k\frac{\pi}{2}\,,\ k \in \mathbf{Z}\right]$

(b) $x = 2t - 1\,,\ y = t^3\,;$ $\left[\frac{3}{2}t^2\right]$

(c) $x = a\cos t\,,\ y = b\sin t\,;$ $\left[-\frac{b}{a}\mathrm{cotg}\,t\,,\ t \neq k\pi\,,\ k \in \mathbf{Z}\right]$

(d) $x = a\mathrm{ch}t\,,\ y = b\,\mathrm{sh}t\,;$ $\left[\frac{b}{a}\mathrm{cth}t\,,\ t \neq 0\right]$

(e) $x = e^{-t}\,,\ y = e^{2t}\,;$ $\left[-2e^{3t}\right]$

(f) $x = \frac{1}{1+t}\,,\ y = \left(\frac{t}{1+t}\right)^2\,;$ $\left[\frac{-2t}{1+t}\,,\ t \neq -1\right]$

(g) $x = \frac{2at}{t^2+1}\,,\ y = \frac{a(1-t^2)}{t^2+1}\,;$ $\left[\frac{2t}{t^2-1}\,,\ |t| \neq 1\right]$

(h) $x = a(\cos t + t\sin t)\,,\ y = a(\sin t - t\cos t)\,;$ $\left[\mathrm{tg}\,t\,,\ t \neq 0\,,\ t \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\,,\ k \in \mathbf{Z}\right]$

(i) $x = a(t - \sin t)\,,\ y = a(1 - \cos t)\,;$ $\left[\mathrm{cotg}\,\frac{t}{2}\,,\ t \neq 2k\pi\,,\ k \in \mathbf{Z}\right]$

(j) $x = a\cos^3 t\,,\ y = a\sin^3 t\,;$ $\left[-\frac{b}{a}\mathrm{tg}\,t\,,\ t \neq k\frac{\pi}{2}\,,\ k \in \mathbf{Z}\right]$

(k) $x = \sqrt{t}\,,\ y = \sqrt[3]{t}\,;$ $\left[\frac{2}{3\sqrt[6]{t}}\,,\ t > 0\right]$

(l) $x = \sqrt{t^2+1}\,,\ y = \frac{t-1}{\sqrt{t^2+1}}\,;$ $\left[\frac{t+1}{t(t^2+1)}\,,\ t \neq 0\right]$

(m) $x = \sqrt[3]{1-\sqrt{t}}\,,\ y = \sqrt{1-\sqrt[3]{t}}\,;$ $\left[\sqrt[6]{\frac{\left(1-\sqrt{t}\right)^4}{t\left(1-\sqrt[3]{t}\right)^3}}\,,\ t \in (0,1)\right]$

(n) $x = a\left(\ln\mathrm{tg}\,\frac{t}{2} + \cos t - \sin t\right)\,,\ y = a(\sin t + \cos t)\,.$
$\left[\mathrm{tg}\,t\,,\ t \in (2k\pi, (2k+1)\pi) - \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}\,,\ k \in \mathbf{Z}\right]$

20. Najděte rovnici tečny a normály dané křivky v bodě T, je-li

a) $y = \dfrac{8a^3}{4a^2+x^2}$, $a \neq 0$, $T[2a, ?]$; b) $x = \dfrac{3at}{1+t^2}$, $y = \dfrac{3at^2}{1+t^2}$ pro $t = 2$

Řešení:

(a) Nejdříve si doplníme $y-$ovou souřadnici dotykového bodu. Pro $x = 2a$ je $y = a$, tedy $T[2a, a]$. Dále

$$y' = \frac{-16a^3x}{(4a^2+x^2)^2} \quad \text{a} \quad k_t = y'(2a) = -\frac{1}{2}.$$

Tečna v bodě T má tedy rovnici

$$y - a = -\frac{1}{2}(x - 2a), \quad \text{neboli} \quad x + 2y - 4a = 0.$$

Normála dané křivky je přímka kolmá na tečnu, která prochází bodem T. Její rovnice je tedy

$$y - a = 2(x - 2a), \quad \text{neboli} \quad 2x - y - 3a = 0.$$

(b) Pro tečný bod platí $T\left[\frac{6a}{5}, \frac{12a}{5}\right]$ (dosadíme $t = 2$). Dále

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{6at(1+t^2)-6at^3}{(1+t^2)^2}}{\frac{3a(1+t^2)-6at^2}{(1+t^2)^2}} = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Pro $t = 2$ je $k_t = -\frac{4}{3}$ a tečna má tvar

$$y - \frac{12a}{5} = -\frac{4}{3}\left(x - \frac{6a}{5}\right), \quad \text{neboli} \quad 4x + 3y - 12a = 0.$$

Rovnice normály je

$$y - \frac{12a}{5} = \frac{3}{4}\left(x - \frac{6a}{5}\right), \quad \text{neboli} \quad 3x - 4y + 6a = 0.$$

21. Najděte rovnici tečny a normály dané křivky v bodě T, je-li

(a) $y = \sqrt{x}$, $T[4, 2]$; $[\,x - 4y + 4 = 0,\ 4x + y - 18 = 0\,]$

(b) $y = \sin x$, $T\left[\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right]$; $\left[\,6\sqrt{3}x - 12y + 6 - \pi\sqrt{3} = 0,\ 12x + 6\sqrt{3}y - 3\sqrt{3} - 2\pi = 0\,\right]$

(c) $y = e^x$, T je průsečík dané křivky s osou y; $[\,T[0, 1],\ x - y + 1 = 0,\ x + y - 1 = 0\,]$

(d) $y = \ln x$, T je průsečík dané křivky s osou x; $[\,T[1, 0],\ x - y - 1 = 0,\ x + y - 1 = 0\,]$

(e) $y = \sqrt{x^2 + 16}$, $T[3, ?]$; $[\,T[3, 5],\ 3x - 5y + 16 = 0,\ 5x + 3y - 30 = 0\,]$

(f) $y = \sqrt{25 - x^2}$, T je průsečík dané křivky s přímkou $z = -3$;

[Úloha nemá řešení. Přímka $y = -3$ neprotíná danou křivku]

(g) $y = (x + 1)\sqrt[3]{3 - x}$, $T[-1, ?]$; $\left[\,T[-1, 0],\ \sqrt[3]{4}\,x - y + \sqrt[3]{4} = 0,\ x + \sqrt[3]{4}\,y + 1 = 0\,\right]$

(h) $y = \frac{1}{4}x^4$, T je bod, v němž je tečna rovnoběžná s osou 2. kvadrantu;

$\left[\,k_t = -1,\ T\left[-1, \frac{1}{4}\right],\ 4x + 4y + 3 = 0,\ 4x - 4y + 5 = 0\,\right]$

(i) $y = \frac{1}{6}x^3$, T je bod, v němž je tečna rovnoběžná s přímkou $y = 2x - 1$;

$\left[\,k_t = 2,\ T_1\left[2, \frac{4}{3}\right],\ 6x - 3y - 8 = 0,\ 3x + 6y - 14 = 0,\right.$

$\left.T_2\left[-2, -\frac{4}{3}\right],\ 6x - 3y + 8 = 0,\ 3x + 6y + 14 = 0\,\right]$

(j) $x = 2t - t^2\,,\ y = 3t - t^3\,,\quad$ pro $\quad t = 0\,;$ $\qquad [\,T[0,0]\,,\ 3x - 2y = 0\,,\ 2x + 3y = 0\,]$

(k) $x = \frac{1+t}{t^3}\,,\ y = \frac{3+t}{2t^2}\,,\quad$ pro $\quad t = 1\,;$ $\qquad [\,T[2,2]\,,\ 7x - 10y + 6 = 0\,,\ 10x + 7y - 34 = 0\,]$

(l) $x = t\cos t\,,\ y = t\sin t\,,\quad$ pro $\quad t = 0\quad$ a $\quad t = \frac{\pi}{4}\,;$ $\qquad [\,T_1[0,0]\,,\ y = 0\,,\ x = 0\,;$
$T_2\left[\frac{\pi\sqrt{2}}{8}, \frac{\pi\sqrt{2}}{8}\right]\,,\ (4+\pi)x + (\pi-4)y - \frac{\pi^2\sqrt{2}}{4} = 0\,,\ (4-\pi)x + (4+\pi)y - \pi\sqrt{2} = 0\,\Big]$

(m) $x = \frac{2t+t^2}{1+t^3}\,,\ y = \frac{2t-t^2}{1+t^3}\,,\quad$ pro $\quad t = 0\quad$ a $\quad t = 1\,.$
$\Big[\,T_1[0,0]\,,\ y = x\,,\ y = -x\,;\quad T_2\left[\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]\,,\ 3x - y - 4 = 0\,,\ x + 3y - 3 = 0\,\Big]$

22. Ukažte, že souřadné osy vytínají na tečně ke křivce

$$x = a\cos^3 t\,,\ y = a\sin^3 t\,,\quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\,,\quad a > 0$$

úsečku konstantní délky. Najděte tuto délku.

Řešení: Nejdříve si napíšeme rovnici tečny ke křivce pro libovolnou hodnotu $\tau \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Poněvadž je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3a\sin^2 t\,\cos t}{-3a\cos^2 t\,\sin t} = -\mathrm{tg}\,t\,,$$

má hledaná tečna tvar

$$y - a\sin^3\tau = -\mathrm{tg}\,\tau(x - a\cos^3\tau)$$

a pro úseky, které vytíná na osách souřadných, platí

$$p = a\sin^3\tau\,\mathrm{cotg}\,\tau + a\cos^3\tau = a\cos\tau(\sin^2\tau + \cos^2\tau) = a\cos\tau\quad (\text{osa } x)\,,$$

$$q = a\sin^3\tau + a\,\mathrm{tg}\,\tau\cos^3\tau = a\sin\tau(\sin^2\tau + \cos^2\tau) = a\sin\tau\quad (\text{osa } y)\,.$$

Pro délku hledané úsečky nyní dostaneme

$$\sqrt{p^2 + q^2} = a\,\sqrt{\cos^2\tau + \sin^2\tau} = a\,.$$

Poznámka: Buď $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ parametricky zadaná funkce, nechť funkce φ a ψ mají spojité derivace v intervalu (a,b) a buď $t_0 \in (a,b)$ takové, že

$$\frac{dx}{dt}(t_0) = \varphi'(t_0) = 0\,,\quad \frac{dy}{dt}(t_0) = \psi'(t_0) \neq 0\,.$$

Potom lze v jistém okolí bodu t_0 z rovnic $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ vypočítat

$$x = \varphi\left(\psi^{-1}(y)\right) = f(y)\quad \text{a}\quad \frac{dx}{dy}(t_0) = 0\,.$$

Tedy existuje tečna ke křivce

$$x = \varphi(t)\,,\ y = \psi(t)\ \text{ v bodě }\ [\varphi(t_0), \psi(t_0)]\ \text{ a má rovnici }\ x - \varphi(t_0) = 0\,.$$

Obecně, jakmile je jedno z čísel $\varphi'(t_0)$, $\psi'(t_0)$ různé od nuly, je vektor $(\varphi'(t_0), \psi'(t_0))$ směrový vektor tečny ke křivce $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in (a,b)$ v bodě $[\varphi(t_0), \psi(t_0)]$.

23. Dokažte, že všechny normály ke křivce dané parametrickými rovnicemi

$$x = a(\cos t + t \sin t)\,,\ y = a(\sin t - t \cos t)\,, \quad t \in \mathbf{R}\,,$$

kde $a > 0$ je konstanta, mají stejnou vydálenost od počátku soustavy souřadnic.

Důkaz: Tečný vektor je

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = (at\cos t, at\sin t) \neq (0,0)$$

právě když $t \neq 0$.

Pro $t = 0$ dostaneme bod $[a, 0]$, v němž daná křivka nemá tečnu (a tedy ani normálu).

Pro $t \neq 0$ má obecná rovnice normály v bodě $[x(t), y(t)]$ tvar

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)(x - x(t), y - y(t)) = 0\,,$$

neboli

$$(at\cos t, at\sin t)\,(x - a(\cos t + t\sin t)\,,\ y - a(\sin t - t\cos t)) = 0\,.$$

Odtud plyne, že

$$x\cos t + y\sin t = a\cos t(\cos t + t\sin t) + a\sin t(\sin t - t\cos t) = a\,.$$

Vzdálenost d bodu $[x_0, y_0]$ od přímky $ax + by + c = 0$ je

$$d = \frac{|\,ax_0 + by_0 + c\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

a tedy vzdálenost bodu $[0, 0]$ od přímky $x\cos t + y\sin t = a$ je rovna

$$d = \frac{|\,-a\,|}{\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}} = a\,.$$

Poznámka: Daná křivka je tzv. *evolventa kružnice*, tj. dráha, kterou opisuje bod dotyku, jestliže se tečna valí po kružnici o poloměru a.

Buď $t > 0$. Dotýká-li se odvalená tečna kružnice v bodě $T[a\cos t, a\sin t]$ (viz přiložený obrázek), pak původní bod dotyku T_0 přejde do bodu

$$X = T + at(\sin t, -\cos t) = [a(\cos t + t\sin t)\,,\ a(\sin t - t\cos t)]\,.$$

Přímka XT, která je tečna ke kružnici v bodě T, je normála k evolventě v bodě X, neboť v bodě X má evolventa tečný vektor $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = t \cdot \overrightarrow{OT}$.

24. Vypočtěte druhou derivaci funkce f, je-li

(a) $f(x) = x^8 + 7x^6 - 5x + 4\,;$ $\qquad [\,f''(x) = 56x^6 + 210x^4\,]$

(b) $f(x)=\sin^2 x\,;$ $\qquad [\,f''(x)=2\cos 2x\,]$

(c) $f(x)=e^{-x^2}\,;$ $\qquad \left[\,f''(x)=2(2x^2-1)e^{-x^2}\right]$

(d) $f(x)=\ln(1-x)\,;$ $\qquad \left[\,f''(x)=-\frac{1}{(1-x)^2}\,,\quad x<1\right]$

(e) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)\,,\quad a>0\,;$ $\qquad \left[\,f''(x)=-\frac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}\right]$

(f) $f(x)=x\sqrt{1+x^2}\,;$ $\qquad \left[\,f''(x)=\frac{x(3+2x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\right]$

(g) $f(x)=\operatorname{arctg} x^2\,;$ $\qquad \left[\,f''(x)=\frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}\right]$

(h) $f(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,;$ $\qquad \left[\,f''(x)=\frac{3x}{(1-x^2)^2}+\frac{(1+2x^2)\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^5}}\,,\quad x\in(-1,1)\right]$

25. Vypočtěte $n-$tou derivaci $\frac{d^ny}{dx^n}$ funkce $y=f(x)$, je-li

a) $f(x)=x^{\sqrt{x}}\,,\ n=2\,;$ $\qquad$ b) $f(x)=\sqrt{x}\,,\ n=10\,;$ $\qquad$ c) $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}\,,\ n\in\mathbf{N}\,;$

d) $f(x)=\sin x, n\in\mathbf{N}\,;$ $\quad$ e) $f(x)=(x^2+2x+2)e^{-x}, n\in\mathbf{N}\,;$ $\quad$ f) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}, n\in\mathbf{N}\,;$

g) $x=a(t-\sin t)\,,\ y=a(1-\cos t)\,,\ n=2\,;$ $\qquad$ h) $x=e^t\cos t\,,\ y=e^t\sin t\,,\ n=3\,.$

Řešení:

(a) Poněvadž $f(x)=e^{\sqrt{x}\,\ln x}$, platí

$$f'(x)=x^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{1}{2}x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}\,(2+\ln x).$$

Jestliže si přepíšeme $f'(x)$ do tvaru

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{\sqrt{x}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\,(2+\ln x),$$

můžeme psát dále

$$f''(x)=\frac{1}{2}\left\{x^{\sqrt{x}}\,\frac{1}{2}\,x^{-1}\,(2+\ln x)^2-\frac{1}{2}\,x^{\sqrt{x}}\,x^{-\frac{3}{2}}\,(2+\ln x)+x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{x}\right\}=$$

$$=\frac{1}{4}x^{\sqrt{x}-\frac{3}{2}}\left\{\sqrt{x}(2+\ln x)^2-\ln x\right\}\,,\quad x>0.$$

(b) Je

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,,\quad f''(x)=-\frac{1}{2^2x\sqrt{x}}\,,\quad f'''(x)=\frac{3}{2^3x^2\sqrt{x}}\,,\quad f^{(4)}(x)=-\frac{3\cdot 5}{2^4x^3\sqrt{x}}$$

a odtud

$$f^{(10)}(x)=-\frac{17!!}{2^{10}x^9\sqrt{x}}\,,\quad x>0.$$

(c) Funkci f přepíšeme do tvaru $f(x) = \frac{2}{1-x} - 1$. Odtud plyne, že

$$f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2}\,, \quad f''(x) = \frac{2\cdot 2}{(1-x)^3}\,, \quad f'''(x) = \frac{2\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{(1-x)^4}\,, \quad f^{(4)}(x) = \frac{2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(1-x)^5}$$

a indukcí dostaneme, že

$$f^{(n)}(x) = \frac{2\cdot n!}{(1-x)^{n+1}}\,, \qquad x \neq 1.$$

(d)

$$f'(x) = \cos x\,, \quad f''(x) = -\sin x\,, \quad f'''(x) = -\cos x\,, \quad f^{(4)}(x) = \sin x.$$

Jestliže položíme $f^{(0)}(x) = f(x)$, je vidět, že

$$f^{(4k)}(x) = \sin x\,, \quad f^{(4k+1)}(x) = \cos x\,, \quad f^{(4k+2)}(x) = -\sin x\,, \quad f^{(4k+3)}(x) = -\cos x$$

pro $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. To je však dosti nepřehledný zápis a pokusíme se $f^{(n)}(x)$ vyjádřit jedním předpisem. Platí

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\,, \qquad f''(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)\,,$$

$$f'''(x) = \cos\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Indukcí odtud plyne, že

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{pro} \quad n \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

(e) K výpočtu použijeme Leibnizovy formule

$$(u\cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}\,, \ \text{kde}\ u = e^{-x}\,,\ v = x^2 + 2x + 2.$$

Je

$$v' = 2x{+}2\,,\ v'' = 2\,,\ v''' = \cdots = v^{(n)} = 0\,; \quad u' = -e^{-x}\,,\ u'' = e^{-x}\,, \ldots, u^{(n)} = (-1)^n e^{-x}.$$

Tedy

$$f^{(n)}(x) = \binom{n}{0}\left(e^{-x}\right)^{(n)}(x^2+2x+2) + \binom{n}{1}\left(e^{-x}\right)^{(n-1)}(x^2+2x+2)' +$$

$$+\binom{n}{2}\left(e^{-x}\right)^{(n-2)}(x^2{+}2x{+}2)'' = (-1)^n e^{-x}\left\{x^2 + 2x + 2 - n(2x+2) + 2\frac{n(n-1)}{2}\right\} =$$

$$= (-1)^n e^{-x}\left\{x^2 - 2x(n-1) + (n-1)(n-2)\right\}.$$

(f) Funkci f rozložíme nejdříve na parciální zlomky. Platí $f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$ a odtud

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-1)^2}\,, \qquad f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3} - \frac{2}{(x-1)^3}\,,$$

$$f'''(x) = -\frac{2\cdot 3}{(x-2)^4} + \frac{2\cdot 3}{(x-1)^4}.$$

Indukcí dostaneme, že

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n\, n!\left\{\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right\} = n!\left\{\frac{1}{(1-x)^{n+1}} - \frac{1}{(2-x)^{n+1}}\right\}$$

pro $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\,,\ x \neq 1\,,\ x \neq 2.$

(g) Platí

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \operatorname{cotg}\frac{t}{2}\,,\quad t \neq 2k\pi\,,\ k\in\mathbf{Z}\,,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}}{a(1-\cos t)} = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}} = -\frac{1}{a(1-\cos t)^2}\,,\ t\neq 2k\pi\,.$$

(h) Je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^t(\sin t+\cos t)}{e^t(\cos t-\sin t)} = \frac{\frac{1}{\sqrt2}\sin t+\frac{1}{\sqrt2}\cos t}{\frac{1}{\sqrt2}\cos t-\frac{1}{\sqrt2}\sin t} = \frac{\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)} = \operatorname{tg}\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\,,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos^2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}}{e^t(\cos t-\sin t)} = \frac{e^{-t}}{\sqrt2\cos^2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1}{\sqrt2}\cos t-\frac{1}{\sqrt2}\sin t\right)} = \frac{e^{-t}}{\cos^3\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}\,,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{\frac{dx}{dt}} =$$

$$= \frac{\frac{-e^{-t}}{\sqrt2\cos^3\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}+\frac{3e^{-t}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt2\cos^4\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}}{e^t(\cos t-\sin t)} = \frac{e^{-2t}\frac{3\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt2\cos^4\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt2\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= \frac{e^{-2t}(3\sin t+3\cos t-\cos t+\sin t)}{2\sqrt2\cos^5\left(t+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{e^{-2t}(2\sin t+\cos t)}{\sqrt2\cos^5\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}\quad \text{pro}\quad t\neq\frac{\pi}{4}+k\pi\,,\ k\in\mathbf{Z}.$$

26. Vypočtěte $n-$tou derivaci $\frac{d^ny}{dx^n}$ funkce $y=f(x)$, je-li

(a) $f(x)=x^x\,,\ n=2\,;$ $\left[x^x\left\{(\ln x+1)^2+\frac{1}{x}\right\}\,,\ x>0\right]$

(b) $f(x)=x(2x-1)^2(x+3)^3\,,\ n=6\,,\ n=7\,;$ $[4\cdot 6!\,,\ 0]$

(c) $f(x)=\frac{\ln x}{x}\,,\ n=5\,;$ $\left[\frac{1}{x^6}(274-120\ln x)\,,\ x>0\right]$

(d) $f(x)=e^x\cos x\,,\ n=3\,;$ $[-2e^x(\cos x+\sin x)]$

(e) $f(x)=x^2e^{2x}\,,\ n=20\,;$ $\left[2^{20}e^{2x}(x^2+20x+95)\right]$

(f) $f(x)=(x^2-1)e^x\,,\ n=24\,;$ $\left[e^x(x^2+48x+551)\right]$

(g) $f(x)=x^2\sin 2x\,,\ n=50\,;$ $\left[2^{50}\left(-x^2\sin 2x+50x\cos 2x+\frac{1225}{2}\sin 2x\right)\right]$

Poznámka: Ve cvičeních e)-g) užijte Leibnizovy formule.

(h) $f(x)=\sin x\sin 2x\sin 3x\,,\ n=10\,;$ $\left[-2^8\sin 2x-2^{18}\sin 4x+2^8\,3^{10}\sin 6x\,;\right.$ rozložte součin na součet nebo rozdíl]

(i) $f(x)=e^{-3x}\,,\ n\in\mathbf{N}\,;$ $\left[(-1)^n3^n\,e^{-3x}\right]$

(j) $f(x)=\ln(1+x)\,,\ n\in\mathbf{N}\,;$ $\left[(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}\,,\ x>-1\right]$

(k) $f(x)=\frac{2x}{x^2-1}\,,\ n\in\mathbf{N}\,;$ $\left[(-1)^nn!\left\{\frac{1}{(x+1)^{n+1}}+\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right\}\,;\right.$ rozložte f na parciální zlomky]

(l) $f(x)=\cos 2x\,,\ n\in\mathbf{N}\,;$ $\left[2^n\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)\right]$

(m) $f(x)=\sin^4x+\cos^4x\,,\ n\in\mathbf{N}\,;$ $\left[4^{n-1}\cos\left(4x+n\frac{\pi}{2}\right)\right]$

(n) $f(x) = x^2 e^{-2x}$, $n \in \mathbf{N}$; $\Big[(-1)^n\, 2^{n-2} \big\{4x^2 - 4nx + n(n-1)\big\}\, e^{-2x} \Big]$

(o) $f(x) = (1-x^2)\cos x$, $n \in \mathbf{N}$; $\Big[(n^2 - n + 1 - x^2)\cos\big(x + n\frac{\pi}{2}\big) - 2nx \sin\big(x + n\frac{\pi}{2}\big) \Big]$

(p) $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{x}}$, $n \in \mathbf{N}$; $\Big[(-1)^n\, \frac{(2n-3)!!}{2^n\, x^n\, \sqrt{x}}\, ,\ x > 0\, ,\ n \geq 2 \Big]$

Poznámka: Ve cvičeních n)-p) užijte Leibnizovy formule.

(q) $f(x) = x^3 \ln x$, $n \in \mathbf{N}$; $\Big[\frac{6(-1)^n (n-4)!}{x^{n-3}}\, ,\ x > 0\, ,\ n \geq 4 \Big]$

(r) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $n = 2$; $\Big[-\frac{1}{a\sin^3 t}\, ,\ t \neq k\pi\, ,\ k \in \mathbf{Z} \Big]$

(s) $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$, $n = 2$, $n = 3$; $\Big[\frac{3}{4(1-t)}\, ,\ \frac{3}{8(1-t)^3}\, ,\ t \neq 1 \Big]$

(t) $x = \ln t$, $y = t^3$, $n = 2$, $n = 3$; $\big[9t^3\, ,\ 27t^3\, ,\ t > 0 \big]$

(u) $x = \operatorname{arctg}\, t$, $y = \ln(1+t^2)$, $n = 2$, $n = 3$; $\big[2t^2 + 2\, ,\ 4t(1+t^2) \big]$

(v) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $n = 2$; $\Big[\frac{1}{3a\cos^4 t\, \sin t}\, ,\ t \neq k\frac{\pi}{2}\, ,\ k \in \mathbf{Z} \Big]$

(w) $x = a(\sin t - t\cos t)$, $y = a(\cos t + t\sin t)$, $n = 2$. $\Big[-\frac{1}{at\sin^3 t}\, ,\ t \neq k\pi\, ,\ k \in \mathbf{Z} \Big]$

27. Sečtěte výrazy

a) $P_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}\, , \quad n \in \mathbf{N}\, ,$

b) $Q_n(x) = 1^2 + 2^2 x + 3^2 x^2 + \cdots + n^2 x^{n-1}\, , \quad n \in \mathbf{N}\, .$

Řešení:

(a) Uvažme funkci

$$f_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$$

(součet $n+1$ členů geometrické posloupnosti). Poněvadž je $f_n'(x) = P_n(x)$, platí, že

$$P_n(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}\, ,\ x \neq 1\, .$$

(b) Je

$$Q_n(x) - P_n(x) = (2^2 - 2)x + (3^2 - 3)x^2 + \cdots + (n^2 - n)x^{n-1} =$$
$$= x\{2\cdot 1 + 3\cdot 2\, x + \cdots + n(n-1)x^{n-2}\} = xR_n(x)\, .$$

Poněvadž platí

$$R_n(x) = 2\cdot 1 + 3\cdot 2\, x + \cdots + n(n-1)x^{n-2} = f_n''(x) \quad \text{a}$$

$$f_n''(x) = P_n'(x) = \frac{-n(n+1)x^{n-1} + n(n+1)x^n}{(1-x)^2} + \frac{2 - 2(n+1)x^n + 2nx^{n+1}}{(1-x)^3}\, .$$

Pro $Q_n(x)$ tedy platí

$$Q_n(x) = xR_n(x) + P_n(x) =$$
$$= \frac{-n(n+1)x^n + n(n+1)x^{n+1} + 1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} +$$
$$+ \frac{2x - 2(n+1)x^{n+1} + 2nx^{n+2}}{(1-x)^3} =$$
$$= \frac{\big\{1 - (n+1)^2 x^n + n(n+2)x^{n+1}\big\}(1-x) + 2x - 2(n+1)x^{n+1} + 2nx^{n+2}}{(1-x)^3} =$$
$$= \frac{1 + x - (n+1)^2 x^n + (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} - n^2 x^{n+2}}{(1-x)^3}\, , \quad x \neq 1.$$

Poznámka: Hodnoty $P_n(1)$ a $Q_n(1)$ lze vypočítat jako $\lim\limits_{x\to 1} P_n(x)\,,\ \lim\limits_{x\to 1} Q_n(x)$.

28. Vypočtěte diferenciál funkce y $n-$tého řádu, je-li

    (a) $y = \cos 5x\,,\ n = 2\,;$ $\quad\left[-25\cos 5x\,dx^2\right]$
    (b) $y = \frac{\ln x}{x}\,,\ n = 2\,;$ $\quad\left[\frac{2\ln x - 3}{x^3}\,dx^2\right]$
    (c) $y = 4^{-x^2}\,,\ n = 2\,;$ $\quad\left[2\cdot 4^{-x^2}\ln 4(2x^2\ln 4 - 1)dx^2\right]$
    (d) $y = x^2 e^{-x}\,,\ n = 3\,;$ $\quad\left[-e^{-x}(x^2 - 6x + 6)dx^3\right]$
    (e) $y = x\,\cos 2x\,,\ n = 10\,;$ $\quad\left[-1024(x\,\cos 2x + 5\sin 2x)dx^{10}\right]$
    (f) $y = e^x\cos x\,,\ n = 4\,;$ $\quad\left[-4e^x\cos x\,dx^4\right]$
    (g) $y = 3\sin(2x+5)\,,\ n\in\mathbf{N}\,;$ $\quad\left[3\cdot 2^n\sin\left(2x + 5 + \frac{n\pi}{2}\right)dx^n\right]$
    (h) $y = e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)\,,\ \alpha\in\mathbf{R}\,,\ n\in\mathbf{N}\,;$ $\quad\left[e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha + n\alpha)dx^n\right]$
    (i) $y = x^n e^x\,,\ n\in\mathbf{N}\,;$ $\quad\left[e^x\left\{x^n + n^2x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2} + \cdots + n!\right\}dx^n\right]$
    (j) $y = \frac{1}{x(1-x)}\,,\ n\in\mathbf{N}\,.$ $\quad\left[(-1)^n n!\left\{\frac{1}{x^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right\}dx^n\,,\ x\neq 0\,,\ x\neq 1\right]$

29. Ukažte, že daná funkce y splňuje příslušnou rovnici, je-li

    (a) $y = \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 2)\,,\quad 1 + y'^2 = 2yy''\,;$
    (b) $y = \frac{1}{2}x^2e^x\,,\quad y'' - 2y' + y = e^x\,;$
    (c) $y = e^{2x}\sin 5x\,,\quad y'' - 4y' + 29y = 0\,;$
    (d) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}\,,\ C_1, C_2$ konstanty, $\quad y'' + 3y' + 2y = 0\,;$
    (e) $y = C_1\sin kx + C_2\cos kx\,,\ C_1, C_2, k\in\mathbf{R}\,,\quad y'' + k^2y = 0\,;$
    (f) $y = e^{-\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)\,,\ C_1, C_2, \alpha, \beta\in\mathbf{R}\,,\quad y'' + 2\alpha y' + (\alpha^2 + \beta^2)y = 0\,;$
    (g) $y = x^n(C_1\cos\ln x + C_2\sin\ln x)\,,\ C_1, C_2, n\in\mathbf{R}\,,\quad x^2y'' + (1 - 2n)xy' + (1 + n^2)y = 0\,;$
    (h) $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x\,,\ C_1, C_2, C_3, C_4\in\mathbf{R}\,,\quad y^{(4)} - y = 0\,.$

30. Ukažte, že platí

    a) $|\sin x - \sin y| \le |x - y|\,,\ x, y\in\mathbf{R}\,;$ $\qquad$ b) $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x)\,,\ x > 0\,;$

    c) $e^x > 1 + x\,,\ x\in\mathbf{R} - \{0\}.$

Řešení:

(a) Pro $x = y$ nerovnost zřejmě platí.
Buď $x < y$. Pak podle věty o střední hodnotě existuje bod $\xi\in(x, y)$ tak, že

$$\frac{\sin x - \sin y}{x - y} = \cos\xi$$

a odtud plyne

$$|\sin x - \sin y| = |\cos\xi|\,|x - y| \le |x - y|.$$

Analogicky provedeme důkaz pro případ $x > y$.

(b) Uvažme interval $\langle 0, x\rangle$. Podle Lagrangeovy věty existuje $\xi \in (0, x)$ tak, že

$$\frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+\xi}.$$

Poněvadž je $0 < \xi < x$, platí

$$1 > \frac{1}{1+\xi} > \frac{1}{1+x}. \quad \text{neboli} \quad \frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1.$$

(c) i. Nechť $x > 0$. Podle věty o střední hodnotě, aplikované na interval $\langle 0, x\rangle$

$$\frac{e^x - 1}{x} = e^\xi \quad \text{pro} \quad \xi \in (0, x).$$

Protože je $\xi > 0$, platí $e^\xi > 1$, neboli $\frac{e^x-1}{x} > 1$ a odtud plyne daná nerovnost.
ii. Buď $x < 0$ a zvolme interval $\langle x, 0\rangle$. Platí opět, že

$$\frac{e^x - 1}{x} = e^\xi , \quad \xi \in (x, 0).$$

Poněvadž $\xi < 0$, je $e^\xi < 1$, tedy $\frac{e^x-1}{x} < 1$. Vzhledem k tomu, že $x < 0$, plyne odtud, že

$$e^x > 1 + x.$$

31. Ukažte, že platí

$$\text{a)} \quad |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \le |x - y| \,,\ x, y \in \mathbf{R} \,; \qquad \text{b)} \quad e^x > ex \,,\ x > 1 \,;$$

$$\text{c)} \quad py^{p-1}(x - y) \le x^p - y^p \le px^{p-1}(x - y) \,, \quad p > 1 \,,\ 0 < y < x.$$

Návod: Užijte větu o střední hodnotě, v příkladu (b) na interval $\langle 1, x\rangle$.

Kapitola 6

Užití diferenciálního počtu.

1. Najděte úhel dvou křivek, je-li

$$\text{a)}\quad y = x^2\,,\ y = x^3\,; \qquad \text{b)}\quad y = \sin x\,,\ y = \cos x\,; \qquad \text{c)}\quad x^2 + y^2 = 5\,,\ y^2 = 4x;$$

$$\text{d)}\quad (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)\,,\ x^2 - y^2 = a^2\,,\ a > 0\,;$$

$$\text{e)}\quad x = \cos t + t\sin t\,,\ y = \sin t - t\cos t\,,\ t \in (0, +\infty)\,,\ \ x^2 + y^2 = 2\,;$$

$$\text{f)}\quad x^2 - y^2 = 5\,,\ \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1.$$

Poznámka: Buď P společný bod dvou křivek takový, že obě křivky mají v bodě P tečnu. Odchylka těchto tečen je úhel dvou daných křivek v bodě P. Jestliže dvě přímky mají směrnice k_1, k_2 a $k_1k_2 = -1$, je jejich úhel φ roven $\frac{\pi}{2}$, jinak platí

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right|\,, \quad \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Řešení:

(a) Jestliže hledáme společné body obou křivek, dostaneme rovnici $x^2 = x^3$, která má řešení $x_1 = 0$ se společným bodem $[0, 0]$ a $x_2 = 1$ s průsečíkem $[1, 1]$. Je-li

$$f(x) = x^2\,,\ g(x) = x^3\,, \quad \text{potom} \quad f'(0) = g'(0) = 0\,, \quad \text{tedy} \quad \varphi = 0.$$

Dále

$$f'(1) = 2\,,\ g'(1) = 3\,, \quad \text{neboli} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{3-2}{1+6} = \frac{1}{7} \quad \text{a odtud} \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{7} \approx 8^0 7'.$$

(b) Rovnice $\sin x = \cos x$ má řešení $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ pro $k \in \mathbf{Z}$. Je-li $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, potom

$$f'\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,, \qquad g'\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,,$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,, \qquad g'\left(\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,,$$

tedy

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} \quad \text{a odtud} \quad \varphi = \operatorname{arctg} 2\sqrt{2} \approx 70^0 31'.$$

(c) Obě křivky (kružnice a parabola) jsou souměrné podle osy x (načrtněte si obrázek). Stačí tedy hledat jejich průsečíky jenom v polorovině $y \geq 0$. Z první rovnice dostaneme $y = \sqrt{5-x^2}$, ze druhé $y = 2\sqrt{x}$. Jejich společné řešení dává rovnici

$$\sqrt{5-x^2} = 2\sqrt{x}\,, \quad \text{neboli} \quad x^2 + 4x - 5 = (x+5)(x-1) = 0.$$

Řešením je $x_1 = 1$ ($x_2 = -5$ nevyhovuje) s průsečíkem $P[1,2]$. Dále

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{5-x^2}}\,,\ x \in (-\sqrt{5}, \sqrt{5})\,, \quad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\,,\ x \in (0, +\infty)$$

a tedy $k_1 = f'(1) = -\frac{1}{2}$, $k_2 = g'(1) = 1$. Odtud

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{-\frac{1}{2} - 1}{1 - \frac{1}{2}}\right| = 3\,, \quad \text{neboli} \quad \varphi = \operatorname{arctg} 3 \approx 71^0 34'.$$

Poznámka: Víme-li, že diferencovatelná funkce $y = y(x)$ splňuje rovnici $x^2 + y^2 - 5 = 0$, obdržíme derivováním této rovnice

$$2x + 2y\,\frac{dy}{dx} = 0\,, \quad \text{tedy} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Postačující podmínky pro existenci diferencovatelné funkce $y = y(x)$, která splňuje rovnici $F(x,y) = 0$, poskytuje věta o implicitní funkci a seznámíte se s ní ve druhém semestru.

(d) Protože jsou obě křivky (lemniskáta a hyperbola) souměrné podle obou souřadnicových os, budeme hledat jejich průsečíky jen v prvním kvadrantu. Dosazením $x^2 - y^2 = a^2$ do první rovnice dostaneme $(x^2 + y^2)^2 = 2a^4$ a odtud $x^2 + y^2 = a^2\sqrt{2}$. Řešením soustavy

$$x^2 + y^2 = a^2\sqrt{2}\,,\ x^2 - y^2 = a^2 \quad \text{dostaneme} \quad x^2 = a^2\,\frac{\sqrt{2}+1}{2}\,,\ y^2 = a^2\,\frac{\sqrt{2}-1}{2}\,,$$

tedy v prvním kvadrantu mají dané křivky jediný průsečík $P\left[a\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\,,\ a\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right]$.

Z první rovnice lze vypočítat $y = f(x)$ (bikvadratická rovnice v proměnné y), z druhé $y = g(x)$, kde f a g jsou diferencovatelné funkce. Derivováním první rovnice dostáváme

$$2(x^2+y^2)\left(2x + 2y\,\frac{dy}{dx}\right) - 2a^2\left(2x - 2y\,\frac{dy}{dx}\right) = 0\,,$$

$$x(x^2+y^2) + y(x^2+y^2)\frac{dy}{dx} - a^2x + a^2y\frac{dy}{dx} = 0\,,$$

$$y(x^2+y^2+a^2)\frac{dy}{dx} = -x(x^2+y^2-a^2)\,, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}\cdot\frac{x^2+y^2-a^2}{x^2+y^2+a^2}.$$

Odtud

$$k_1 = f'\left(a\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\right) = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 1 - \sqrt{2}.$$

Vzniká otázka, zda není jednodušší vypočítat f přímo. Proveďte a porovnejte. Z druhé rovnice dostaneme

$$2x - 2y\,\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}.$$

$$k_2 = g'\left(a\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} = \sqrt{2} + 1.$$

Odtud $k_1k_2 = -1$, t.j. $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

(e) Dosazením parametrického vyjádření do rovnice kružnice dostaneme

$$(\cos t + t\sin t)^2 + (\sin t - t\cos t)^2 = 2\,,$$

neboli $1+t^2 = 2$ o odtud $t = 1$. Průsečík obou křivek je bod $P[\cos 1+\sin 1, \sin 1-\cos 1]$. Tečný vektor k první křivce je

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = (t\cos t, t\sin t). \quad \text{V bodě} \quad P \quad \text{konkrétně} \quad \overrightarrow{u_1} = (\cos 1, \sin 1).$$

Tečný vektor ke kružnici

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \text{v bodě} \quad P \quad \text{je} \quad \overrightarrow{u_2} = (\cos 1 - \sin 1, \cos 1 + \sin 1).$$

Podle vzorce pro úhel dvou vektorů je

$$\cos\varphi = \frac{|(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})|}{\|\overrightarrow{u_1}\| \cdot \|\overrightarrow{u_2}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{a tedy} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

(f) Příklad už umíme řešit (viz příklady c) a d)); ukážeme však ještě další postup. Obě křivky (hyperbola a elipsa) jsou souměrné podle obou souřadnicových os, stačí tedy určit průsečíky v 1. kvadrantu. Sečtením rovnic $x^2 - y^2 = 5$, $\frac{4}{9}x^2 + y^2 = 8$, dostaneme $\frac{13}{9}x^2 = 13$, $x^2 = 9$, $y^2 = 4$, tedy průsečík je bod $P[3, 2]$. Parametrizace hyperboly je

$$x = \sqrt{5}\,\mathrm{ch}t\,,\ y = \sqrt{5}\,\mathrm{sh}t\,, \quad t \in \langle 0, +\infty) \quad (\,[x, y] \quad \text{leží v 1. kvadrantu})\,,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{5}\,\mathrm{ch}t}{\sqrt{5}\,\mathrm{sh}t} = \frac{x}{y}\,, \quad k_1 = \frac{3}{2}.$$

Parametrizace elipsy je

$$x = 3\sqrt{2}\cos t\,,\ y = 2\sqrt{2}\sin t\,,\ t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\,, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2\sqrt{2}\cos t}{3\sqrt{2}\sin t} = -\frac{4x}{9y}\,,\ k_2 = -\frac{2}{3}.$$

Odtud $k_1 k_2 = -1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

2. Najděte průsečíky a úhel dvou křivek, je-li

(a) $y = \mathrm{arctg}\, x\,,\ y = 0\,;$ $\quad\left[\,[0, 0]\,,\ \varphi = \frac{\pi}{4}\,\right]$

(b) $y = \ln x\,,\ y = 0\,;$ $\quad\left[\,[1, 0]\,,\ \varphi = \frac{\pi}{4}\,\right]$

(c) $y = \arcsin x\,,\ y = 0\,;$ $\quad\left[\,[0, 0]\,,\ \varphi = \frac{\pi}{4}\,\right]$

(d) $y = \mathrm{tg}\, x\,,\ y = 0\,;$ $\quad\left[\,[k\pi, 0]\,,\ k \in \mathbf{Z}\,,\ \varphi = \frac{\pi}{4}\,\right]$

(e) $y = \sin x\,,\ y = 0\,;$ $\quad\left[\,[k\pi, 0]\,,\ k \in \mathbf{Z}\,,\ \varphi = \frac{\pi}{4}\,\right]$

(f) $y = x - x^3\,,\ y = 5x\,;$ $\quad\left[\,[0, 0]\,,\ \varphi = \mathrm{arctg}\ \frac{2}{3} \approx 33^0 41'\,\right]$

(g) $y = \frac{1}{x}\,,\ y = \sqrt{x}\,;$ $\quad\left[\,[1, 1]\,,\ \varphi = \mathrm{arctg}\ 3 \approx 71^0 34'\,\right]$

(h) $y = x^3\,,\ y = \frac{1}{x^2}\,;$ $\quad\left[\,[1, 1]\,,\ \varphi = \frac{\pi}{4}\,\right]$

(i) $y = e^{\frac{x}{2}}\,,\ x = 2\,;$ $\quad\left[\,[2, e]\,,\ \varphi = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\ \frac{e}{2} \approx 36^0 21'\,\right]$

(j) $y = \ln x\,,\ y = \frac{x^2}{2e}\,;$ $\quad\Big[\,\left[\sqrt{e}, \frac{1}{2}\right]\,,\ \varphi = 0\,;$
položte $\quad x = e^t \quad$ a užijte nerovnosti $\quad e^{2t-1} > 2t \quad$ pro $\quad t \neq 0\,\Big]$

(k) $y = \sqrt{2}\sin x\,,\ y = \sqrt{2}\cos x\,;$ $\quad\left[\,\left[\frac{\pi}{4} + k\pi, (-1)^k\right]\,,\ k \in \mathbf{Z}\,,\ \varphi = \frac{\pi}{2}\,\right]$

(l) $y = \sin x\,,\ y = \sin 2x\,;$ $\quad\Big[\,[2k\pi, 0]\,,\ k \in \mathbf{Z}\,,\ \varphi = \mathrm{arctg}\ \frac{1}{3} \approx 18^0 26'\,,$
$[(2k+1)\pi, 0]\,,\ \left[\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\,,\ k \in \mathbf{Z}\,,\ \varphi = \mathrm{arctg}\ 3 \approx 71^0 34'\,\Big]$

(m) $y = x^2 - 4x + 4$, $y = -x^2 + 6x - 4$; $\big[\,[1,1]\,,\ [4,4]\,,\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{6}{7} \approx 40^0 36'\,\big]$

(n) $y = 4x^2 + 2x - 8$, $y = x^3 - x + 10$; $\big[\,[3,34]\,,\ \varphi = 0\,,\ \ [-2,4]\,,\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{25}{153} \approx 9^0 17'\,\big]$

(o) $y = x^2$, $x = y^2$; $\big[\,[0,0]\,,\ \varphi = 0\,,\ \ [1,1]\,,\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{3}{4} \approx 36^0 52'\,\big]$

(p) $y = \frac{x+1}{x+2}$, $y = \frac{x^2+4x+8}{16}$; $\big[\,\big[0, \frac{1}{2}\big]\,,\ \varphi = 0\,,\ \ \big[-6, \frac{5}{4}\big]\,,\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{18}{31} \approx 30^0 8'\,\big]$

(q) $x^2 + y^2 - 4x = 1$, $x^2 + y^2 + 2y = 9$; $\big[\,[1,2]\,,\ [3,-2]\,,\ ,\ \varphi = \frac{\pi}{4}\,\big]$

(r) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$. $\big[\,\big[\pm\frac{12}{5}, \pm\frac{12}{5}\big]\,,\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{175}{288} \approx 31^0$;
v příkladech q) a r) použijte postup z příkladu 1c) nebo 1d) nebo 1e)]

3. Pomocí l'Hôspitalova pravidla vypočtěte

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\,\cos x - \sin x}{x^3}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0_+} \frac{\ln\sin mx}{\ln\sin x}$, $m > 0$;

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$; e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{\sin^6 2x}$; f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\operatorname{cotg} x - 1}{x^2}$;

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos\sin x - \cos x}{x^4}$; h) $\displaystyle\lim_{x\to 1_-} \ln x\, \ln(1-x)$;

i) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$; j) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{cotg}^2 x\right)$.

Poznámka: Platí následující tvrzení. Nechť existuje $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ a nechť je dále buď

1) $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$ (první l'Hôspitalovo pravidlo) anebo

2) $\lim |g(x)| = +\infty$ (druhé l'Hôspitalovo pravidlo).

Potom je $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Pod znakem lim lze psát $x \to c$, $x \to c_+$, $x \to c_-$, $c \in \mathbf{R}$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, pochopitelně všude totéž. Zápis

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = (\text{l'H1}) = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}\,, \quad \text{resp.} \quad \lim \frac{f(x)}{g(x)} = (\text{l'H2}) = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}\,,$$

znamená, že jsme ověřili předpoklad 1) (resp. 2)). Tento předpoklad ověříme tak, že vypočteme $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (viz př. 7). Pomocí l'Hôspitalova pravidla počítáme limity neurčitých výrazů typu „$\frac{0}{0}$" a „$\frac{\infty}{\infty}$". Neurčité výrazy typů „$0 \cdot \infty$" a „$\infty - \infty$" je třeba napřed upravit (viz příklady h), i), j)). Vypočítat limitu bez použití l'Hôspitalova pravidla je hodnotnější matematický výkon, ale bohužel to vždycky nejde.

Řešení:

(a) Poněvadž je $\lim\limits_{x\to 0}(x\cos x - \sin x) = \lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$, můžeme psát

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} = (\text{l'H1}) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\,\sin x - \cos x}{3x^2} = -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{3}.$$

(b) Platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = (\text{l'H1}) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x(1 - \cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = 2.$$

(c) Je $\lim\limits_{x\to 0_+} |\ln\sin x| = +\infty$, tedy podle druhého l'Hôspitalova pravidla platí

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{\ln\sin mx}{\ln\sin x} = (\text{l'H2}) = \lim_{x\to 0_+} \frac{\frac{m\,\cos mx}{\sin mx}}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{mx}{\sin mx}\cdot\frac{\cos mx}{\cos x} = 1.$$

(d) Platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3} = (\text{l'H1}) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} =$$

$$= \frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2}} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{1-x^2-1+4x^2}{x^2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2}\left(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4x^2}\right)} = 1.$$

(e) Je

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x} = (\text{l'H1}) = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2e^{x^3}-3x^2}{12\sin^5 2x\,\cos 2x} = \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(e^{x^3}-1\right)}{\sin^5 2x\,\cos 2x} =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1}{x^3}\cdot\frac{(2x)^5}{\sin^5 2x}\cdot\frac{1}{2^5\cos 2x} = \frac{1}{4\cdot 32} = \frac{1}{128}.$$

(f) Poněvadž platí

$$\lim_{x\to 0}(x\operatorname{cotg} x - 1) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot\cos x - 1\right) = 0\,,$$

můžeme použít prvého l'Hôspitalova pravidla a dostáváme

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{cotg} x - 1}{x^2} = (\text{l'H1}) = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{cotg} x - \frac{x}{\sin^2 x}}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\,\cos x - x}{x\sin^2 x} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin 2x - x}{x^3}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin 2x - x}{x^3} = (\text{l'H1}) = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x - 1}{3x^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x}{3x^2} = -\frac{1}{3}.$$

(g) Je

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4} = (\text{l'H1}) = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(\sin x)\,\cos x + \sin x}{4x^3} =$$

$$= (\text{l'H1}) = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos(\sin x)\,\cos^2 x + \sin(\sin x)\,\sin x + \cos x}{12x^2} =$$

$$= \frac{1}{12}\lim_{x\to 0}\frac{-\cos(\sin x) + \cos(\sin x)\,\sin^2 x + \sin(\sin x)\,\sin x + \cos x}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{12}\left\{\frac{\sin^2 x}{x^2}\cos(\sin x) + \frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin^2 x}{x^2} + \frac{\cos x - \cos(\sin x)}{x^2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{12}\left\{2 + \frac{\cos x - \cos(\sin x)}{x^2}\right\}.$$

Stačí tedy vypočítat

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos(\sin x)}{x^2} = (\text{l'H1}) = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x + \sin(\sin x)\cos x}{2x} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\cos x - \frac{\sin x}{x}\right\} = 0.$$

Daná limita je tedy rovna $\frac{1}{6}$. Předběžnou úpravou však můžeme výpočet zjednodušit. Platí

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x+\sin x}{2}}{x}\cdot\frac{\sin\frac{x-\sin x}{2}}{x^3}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x+\sin x}{2}}{\frac{x+\sin x}{2}}\cdot\frac{x+\sin x}{2x}\cdot\frac{\sin\frac{x-\sin x}{2}}{\frac{x-\sin x}{2}}\cdot\frac{x-\sin x}{2x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\frac{x-\sin x}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=(\text{l'H1})=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}=\frac{1}{6}.$$

Limitu $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ již elementárně nevypočteme.

(h) Danou limitu si nejdříve upravíme. Je totiž

$$\lim_{x\to 1_-}\ln x\,\ln(1-x)=\lim_{x\to 1_-}\frac{\ln(1-x)}{\ln^{-1}x}=(\text{l'H2})=\lim_{x\to 1_-}\frac{-\frac{1}{1-x}}{-\frac{1}{x\ln^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to 1_-}\frac{x\ln^2 x}{1-x}=\lim_{x\to 1_-}(-x\ln x)\frac{\ln x}{x-1}=0$$

vzhledem k tomu, že $\lim\limits_{x\to 1_-}\frac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{t\to 0_-}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$.

(i) Jestliže nejdříve sečteme zlomky v závorce, dostaneme

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=(\text{l'H1})=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x\ln x+x-1}=(\text{l'H1})=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1}{\ln x+2}=\frac{1}{2}.$$

(j) Je

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{cotg}^2 x\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x+x\cos x)(\sin x-x\cos x)}{x^2\sin^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin x+x\cos x}{x}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}\right\}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\frac{2}{3}$$

podle příkladu a).

Poznámka: Limity neurčitých výrazů typu „1^∞“, „∞^0“ a „0^0“, tj. $\lim[f(x)]^{g(x)}$, kde je buď $\lim f(x)=1$, $\lim|g(x)|=+\infty$, nebo $\lim f(x)=+\infty$, $\lim g(x)=0$, nebo $\lim f(x)=\lim g(x)=0$ (všechny limity ve stejném bodě), počítáme takto:

$$\lim[f(x)]^{g(x)}=\lim e^{g(x)\ln f(x)},$$

kde exponent je neurčitý výraz typu „$0\cdot\infty$“.

4. Pomocí l'Hôspitalova pravidla vypočtěte

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}$; $\quad[\,2\,]$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$; $\quad\left[\,\frac{1}{3}\,\right]$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$; $\quad[\,0\,]$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{\mathrm{tg}^2 x}$; $\left[-\frac{1}{2}\right]$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)}{\ln(1+x)}$; $\left[-\frac{2}{\pi}\right]$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}\, x-x}{\ln^3(1+x)}$; $\left[\frac{1}{3}\right]$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{sh}^2 x\, \ln(1+x)}{\mathrm{tg}\, x-x}$; $[3]$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$; $[2]$

(i) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \mathrm{tg}\, x}{\mathrm{cotg}\, 2x}$; $[-1]$

(j) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x-2x}{x^2 \arcsin x}$; $\left[-\frac{4}{3}\right]$

(k) $\lim\limits_{x\to 0_+} \frac{\ln(1-\cos x)}{\ln \mathrm{tg}\, x}$; $[2]$

(l) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x \arcsin x^2}{x\cos x-\sin x}$; $[-3]$

(m) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^5}$; $[+\infty]$

(n) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}$, $a>0$; $\left[\frac{1}{6}\ln a\right]$

(o) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\mathrm{cotg}\, x-\frac{1}{x}\right)$; $[0]$

(p) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$; $[0]$

(q) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$; $\left[\frac{1}{2}\right]$

(r) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x\, \mathrm{arctg}\, x}-\frac{1}{x^2}\right)$; $\left[\frac{1}{3}\right]$

(s) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$; $\left[-\frac{1}{3}\right]$

(t) $\lim\limits_{x\to 0_+} \sin x\, \ln \mathrm{cotg}\, x$; $[0]$

(u) $\lim\limits_{x\to \infty} (\pi-2\mathrm{arctg}\sqrt{x})\sqrt{x}$; $[2]$

(v) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\mathrm{th} x}-\frac{1}{\mathrm{tg}\, x}\right)$. $\left[\frac{2}{3}\right]$

5. Užitím l'Hôspitalova pravidla vypočtěte

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln^a x}{x^\varepsilon}$, $a\in \mathbf{R}$, $\varepsilon>0$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^a}{e^{\varepsilon x}}$, $a\in \mathbf{R}$, $\varepsilon>0$;

c) $\lim\limits_{x\to 0_+} x^\varepsilon \ln^n x$, $\varepsilon>0$, $n\in\mathbf{N}$; d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}_-} (\mathrm{tg}\, x)^{2x-\pi}$; e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$;

f) $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{\mathrm{tg}\, x}{\mathrm{tg}\, a}\right)^{\mathrm{cotg}(x-a)}$, $a\neq k\dfrac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$; g) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

h) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{\alpha}{1-x^\alpha}-\dfrac{\beta}{1-x^\beta}\right)$, $\alpha,\beta\in\mathbf{R}-\{0\}$; i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$.

Řešení:

(a) Je-li $a \le 0$, je zřejmé, že $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln^a x}{x^\varepsilon} = 0$. Nechť tedy $a > 1$. Potom použitím l'Hôspitalova pravidla dostaneme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^a x}{x^\varepsilon} = (\text{l'H2}) = \lim_{x\to\infty} \frac{a \ln^{a-1} x}{\varepsilon x^\varepsilon} = (\text{l'H2}) = \lim_{x\to\infty} \frac{a(a-1)\ln^{a-2} x}{\varepsilon^2 x^\varepsilon} = (\text{l'H2}) =$$

$$= \cdots = (\text{l'H2}) = \lim_{x\to\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)\ln^{a-k} x}{\varepsilon^k x^\varepsilon} = 0\,,$$

jakmile je $a - k \le 0$.

(b) Pro $a \le 0$ je opět zřejmě $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^{\varepsilon x}} = 0$. Pro $a > 0$ postupujeme analogicky jako v předchozím příkladu. Tedy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^{\varepsilon x}} = (\text{l'H2}) = \lim_{x\to\infty} \frac{a x^{a-1}}{\varepsilon e^{\varepsilon x}} = (\text{l'H2}) = \lim_{x\to\infty} \frac{a(a-1)x^{a-2}}{\varepsilon^2 e^{\varepsilon x}} =$$

$$= (\text{l'H2}) = \cdots = (\text{l'H2}) = \lim_{x\to\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)x^{a-k}}{\varepsilon^k e^{\varepsilon x}} = 0\,,$$

jakmile je $a - k \le 0$.

Poznámky:

i. Substitucí $t = \ln x$ dostaneme $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln^a x}{x^\varepsilon} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{t^a}{e^{\varepsilon t}}$.

ii. Limity z příkladů a) a b) stačí vypočítat pro $a = 1$. Je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} = (\text{l'H2}) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\varepsilon x^{\varepsilon-1}} = 0$$

a odtud pro $a > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^a x}{x^\varepsilon} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{\varepsilon}{a}}}\right)^a = 0\,,$$

neboť $\frac{\varepsilon}{a} > 0$.

iii. Limity z příkladů a) a b) nám poslouží k tomu, abychom srovnali rychlost růstu funkcí $y = \ln x$, $y = x^\varepsilon$, $y = e^{\varepsilon x}$ $(\varepsilon > 0)$ pro $x \to \infty$. Nejpomaleji roste $\ln x$, pomaleji, než jakákoliv mocnina x^ε. Naopak funkce $e^{\varepsilon x}$ roste řádově rychleji, než jakákoliv mocnina. Dále na příklad funkce $y = x^x$ roste řádově rychleji, než $e^{\varepsilon x}$. Platí totiž

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\varepsilon x}}{x^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\varepsilon x}}{e^{x\ln x}} = \lim_{x\to\infty} e^{x(\varepsilon - \ln x)} = 0.$$

Existují ovšem funkce, které rostou ještě rychleji, než x^x, na příklad $y = x^{x^x}$.

(c) Je

$$\lim_{x\to 0_+} x^\varepsilon \ln^n x = \lim_{x\to 0_+} \frac{\ln^n x}{x^{-\varepsilon}} = (\text{l'H2}) = \lim_{x\to 0_+} \frac{n \ln^{n-1} x}{-\varepsilon x^{-\varepsilon}} = (\text{l'H2}) =$$

$$= \lim_{x\to 0_+} \frac{n(n-1)\ln^{n-2} x}{\varepsilon^2 x^{-\varepsilon}} = (\text{l'H2}) = \cdots = (\text{l'H2}) = \lim_{x\to 0_+} \frac{n!}{(-1)^n\, \varepsilon^n\, x^{-\varepsilon}} = 0.$$

Poznámka: Limitu stačí vypočítat pro $n = 1$. Je

$$\lim_{x\to 0_+} x^\varepsilon \ln x = \lim_{x\to 0_+} \frac{\ln x}{x^{-\varepsilon}} = (\text{l'H2}) = \lim_{x\to 0_+} \frac{1}{-\varepsilon x^{-\varepsilon}} = 0$$

a tedy

$$\lim_{x\to 0_+} x^\varepsilon \ln x = \lim_{x\to 0_+} \left(x^{\frac{\varepsilon}{n}} \ln x\right)^n = 0^n = 0.$$

Substitucí $t = \frac{1}{x}$ dostaneme

$$\lim_{x\to 0_+} x^\varepsilon \ln^n x = (-1)^n \lim_{t\to +\infty} \frac{\ln^n t}{t^\varepsilon}\,,$$

což je limita z příkladu a).

(d) Platí

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}_-} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}_-} e^{(2x-\pi)\ln \operatorname{tg} x} = e^0 = 1\,,$$

poněvadž

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}_-} (2x-\pi)\ln \operatorname{tg} x = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}_-} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{(2x-\pi)^{-1}} = (\text{l'H2}) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}_-} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x \cos^2 x}}{-2(2x-\pi)^{-2}} =$$

$$= -\lim_{x\to \frac{\pi}{2}_-} \frac{(2x-\pi)^2}{\sin 2x} = (\text{l'H1}) = -\lim_{x\to \frac{\pi}{2}_-} \frac{2(2x-\pi)}{2\cos 2x} = 0.$$

(e) Je

$$\lim_{x\to\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1}}{x}} = e^0 = 1\,,$$

neboť

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1}}{x} = (\text{l'H2}) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1} \cos^2 \frac{\pi x}{2x+1}} \cdot \frac{\pi(2x+1)-2\pi x}{(2x+1)^2}}{1} = 2\pi \lim_{x\to\infty} \frac{(2x+1)^{-2}}{\sin \frac{2\pi x}{2x+1}} =$$

$$= (\text{l'H1}) = 2\pi \lim_{x\to\infty} \frac{-2(2x+1)^{-3}}{\cos \frac{2\pi x}{2x+1} \cdot \frac{2\pi(2x+1)-4\pi x}{(2x+1)^2}} = -4 \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(2x+1)\cos \frac{2\pi x}{2x+1}} = 0\,.$$

(f) Platí

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a}\right)^{\operatorname{cotg}(x-a)} = \lim_{x\to a} e^{\frac{\ln\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a}\right)}{\operatorname{tg}(x-a)}} = e^{\frac{2}{\sin 2a}}\,,\ \ a \neq \frac{k\pi}{2}\,,\ k\in \mathbf{Z}\,,$$

protože

$$\lim_{x\to a} \frac{\ln\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a}\right)}{\operatorname{tg}(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{\ln\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a}\right)}{\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a}-1} \cdot \frac{\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a}-1}{\operatorname{tg}(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a}-1}{\operatorname{tg}(x-a)} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} a\ \operatorname{tg}(x-a)} = (\text{l'H1}) = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg}(x-a)}} = \frac{2}{\sin 2a}.$$

Poznámka: Danou limitu jsme jsme takě mohli bez potíží vypočítat elementárně. Platí totiž

$$\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} a\ \operatorname{tg}(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} a\ \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{1+\operatorname{tg} x \operatorname{tg} a}} = \frac{1}{\operatorname{tg} a\ \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 a}} = \frac{2}{\sin 2a}.$$

(g) Je
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln\frac{\arcsin x}{x}} = e^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{e},$$
protože
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\arcsin x}{x}}{\frac{\arcsin x}{x}-1}\cdot\frac{\frac{\arcsin x}{x}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\arcsin x}{x}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x - x}{x^3} =$$
$$= (\text{l'H1}) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{3x^2} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\sqrt{1-x^2}(1+\sqrt{1-x^2})} = \frac{1}{6}.$$

(h) Platí
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\alpha}{1-x^\alpha}-\frac{\beta}{1-x^\beta}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{\alpha(1-x^\beta)-\beta(1-x^\alpha)}{(1-x^\alpha)(1-x^\beta)} = (\text{l'H1}) =$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{-\alpha\beta x^{\beta-1}+\alpha\beta x^{\alpha-1}}{-\alpha x^{\alpha-1}(1-x^\beta)-\beta x^{\beta-1}(1-x^\alpha)} = \alpha\beta\lim_{x\to 1}\frac{x^{\beta-1}-x^{\alpha-1}}{\alpha x^{\alpha-1}(1-x^\beta)+\beta x^{\beta-1}(1-x^\alpha)} =$$
$$= (\text{l'H1}) = \alpha\beta\lim_{x\to 1}\frac{(\beta-1)x^{\beta-2}-(\alpha-1)x^{\alpha-2}}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}(1-x^\beta)+\beta(\beta-1)x^{\beta-2}(1-x^\alpha)-2\alpha\beta x^{\alpha+\beta-2}} = \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

(i) Platí
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}-e}{x} = e\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x}}-1}{\frac{\ln(1+x)-x}{x}}\cdot\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} =$$
$$= e\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = (\text{l'H1}) = e\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} = -e\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x(1+x)} = -\frac{e}{2}.$$

6. Pomocí l'Hôspitalova pravidla vypočtěte

(a) $\lim\limits_{x\to 0_+} x^x$; $[1]$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$; $[1]$

(c) $\lim\limits_{x\to 0_+} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$; $[e^3]$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+e^{\alpha x})^{\frac{1}{x}}$, $\alpha>0$; $[e^\alpha]$

(e) $\lim\limits_{x\to 0_+}(\operatorname{cotg} x)^{\sin x}$; $[1]$

(f) $\lim\limits_{x\to 0_+} x^{\sin x}$; $[1]$

(g) $\lim\limits_{x\to 1_-}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$; $[1]$

(h) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$; $[e^{-1}]$

(i) $\lim\limits_{x\to 0_+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$; $[1]$

(j) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$; $[e^{-1}]$

(k) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$; $[e^{\frac{2}{\pi}}]$

(l) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; $[e^{\frac{1}{3}}]$

(m) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch} x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; $\left[\, e^{-1} \,\right]$

(n) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$; $\left[\, e^{-\frac{2}{\pi}} \,\right]$

(o) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{2}{\pi} \mathrm{arctg}\ x\right)^{x}$; $\left[\, e^{-\frac{2}{\pi}} \,\right]$

(p) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln \mathrm{ch} x}{\sqrt[m]{\mathrm{ch} x} - \sqrt[n]{\mathrm{ch} x}}$, $m, n \in \mathbf{N}$, $m \neq n$; $\left[\, \frac{mn}{n-m} \,\right]$

(q) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{50}}$. $[\, 0 \,]$

7. Rozhodněte o použitelnosti l'Hôspitalova pravidla k výpočtu limity

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} \,; \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to \infty} \frac{x + \cos x}{x - \cos x} \,.$$

Řešení:

(a) Je

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 0 \,, \ \ \text{poněvadž} \ \ \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \,.$$

Jestliže formálně použijeme l'Hôspitalova pravidla, dostaneme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$. Tato limita však neexistuje, poněvadž $2x \sin \frac{1}{x} \to 0$, $\cos x \to 0$ pro $x \to 0$, ale $\lim\limits_{x\to 0} \cos \frac{1}{x}$ neexistuje, jak jsme ukázali ve 4. kapitole. L'Hôpitalova pravidla tedy použít nemůžeme.

(b) Platí

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x + \cos x}{x - \cos x} = \lim_{x\to \infty} \frac{1 + \frac{\cos x}{x}}{1 - \frac{\cos x}{x}} = 1.$$

Při formálním použití l'Hôspitalova pravidla dostaneme $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$, která neexistuje (je totiž $1 + \sin x = 0$ pro $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{N}$) a l'Hôspitalova pravidla nelze použít.

8. Najděte Maclaurinův vzorec funkce $f(x)$, je-li

a) $f(x) = e^x$; b) $f(x) = \sin x$; c) $f(x) = \cos x$;

d) $f(x) = \ln(1 + x)$; e) $f(x) = (1 + x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

Řešení:

(a) Poněvadž je $y^{(n)} = e^x$ pro libovolné $n \in \mathbf{N}$, dostaneme, že

$$y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n)}(0) = 1.$$

Tedy

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x) \,,$$

kde

$$R_{n+1}(x) = o(x^n) \,, \ \ x \to 0 \,, \ \ \text{je Peanův tvar zbytku} \,,$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^{\vartheta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \ \ (0 < \vartheta < 1) \ \ \text{je Lagrangeův tvar zbytku a}$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^{\vartheta x}}{n!}(1-\vartheta)^n\, x^{n+1} \;\; (0<\vartheta<1) \text{ je Cauchyův tvar zbytku.}$$

Čísla ϑ v Lagrangeově a Cauchyově tvaru zbytku mohou být různá.

Poznámka: Nechť existuje $\Delta > 0$ tak, že $D(f) \cap D(g) \supset P_\Delta(x_0)$, $g(x) \neq 0$ pro $x \in P_\triangle(x_0)$. Zápis $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$ znamená, že $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Toto značení zavedl E. Landau.

(b) Podle příkladu 5.25d) je $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ pro $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ a tedy

$$f(0) = f''(0) = \cdots = f^{(2n)}(0) = 0\,, \quad f'(0) = 1\,, \; f'''(0) = -1\,, \; f^{V}(0) = 1.$$

Obecně $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$. Odtud plyne, že

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n+1}(x)\,,$$

kde

$$R_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+1)}(\vartheta x)}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} \quad (0<\vartheta<1).$$

Poněvadž platí

$$f^{(2n+1)}(\vartheta x) = \sin\left(\vartheta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \cos\vartheta x\, \sin(2n+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^n\cos\vartheta x\,,$$

dostáváme, že

$$R_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n\cos\vartheta x}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} \qquad (0<\vartheta<1)\,.$$

(c) Analogicky jako v předchozím příkladu platí $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ pro $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, tedy

$$f'(0) = f'''(0) = \cdots = f^{(2n+1)}(0) = 0\,,$$
$$f(0) = 1\,, \; f''(0) = -1\,, \; f^{IV}(0) = 1\,, \; \ldots\,, \; f^{(2n)}(0) = (-1)^n.$$

Odtud plyne,že

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+2}(x)\,,$$

kde

$$R_{2n+2}(x) = \frac{\cos\left(\vartheta x + (n+1)\pi\right)}{(2n+2)!}\, x^{2n+2} = \frac{(-1)^{n+1}\cos\vartheta x}{(2n+2)!}\, x^{2n+2} \quad (0<\vartheta<1)\,.$$

(d) Podle příkladu 5.26j) platí $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ pro $n \in \mathbf{N}$ a tedy

$$f(0) = 0\,, \; f'(0) = 1\,, \; f''(0) = -1\,, \; f'''(0) = 1\cdot 2\,, \; \ldots\,, \; f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,.$$

Odtud dostáváme, že

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x)\,,$$

kde

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{n!}(1-\vartheta)^n x^{n+1} = \frac{(-1)^n(1-\vartheta)^n}{(1+\vartheta x)^{n+1}}\, x^{n+1} \quad (0<\vartheta<1)$$

je Cauchyův tvar zbytku.

(e) Pro $x > -1$ platí

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}\,,\ f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\,,\ \dots\,,\ f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}\,.$$

Odtud plyne, že

$$f(0) = 1\,,\ f'(0) = \alpha\,,\ f''(0) = \alpha(\alpha-1)\,,\dots\,,\ f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1) \quad (n \in \mathbf{N})$$

a tedy

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}\,x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n + R_{n+1}(x)\,,$$

kde

$$R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+\vartheta x)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!}\,x^{n+1} \qquad (0 < \vartheta < 1).$$

Číslo $\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$ nazýváme binomickým koeficientem a značíme $\binom{\alpha}{n}$. Jestliže definujeme $\binom{\alpha}{0} = 1$, dostaneme

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + R_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k + R_{n+1}(x)\,,$$

kde

$$R_{n+1}(x) = \binom{\alpha}{n+1}(1+\vartheta x)^{\alpha-n-1}\,x^{n+1} \qquad (0 < \vartheta < 1).$$

Poznámka: Je-li $\alpha \in \mathbf{N}$, platí pro $n = 0, 1, \dots, \alpha$

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{\alpha!}{n!(\alpha-n)!}$$

a dostáváme známou definici kombinačního čísla. Pro $n > \alpha$ platí $\binom{\alpha}{n} = 0$. Tedy pro $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{N}$ je $R_{n+1}(x) = 0$. V tomto případě má tedy Maclaurinův vzorec tvar $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k$, což je speciální případ binomické věty.

9. Rozložte daný polynom $f(x)$ podle mocnim $x - \alpha$, je-li

(a) $f(x) = x^3$, $\alpha = 1$; $\quad\left[\,1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3\,\right]$

(b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$, $\alpha = 2$; $\quad\left[\,11 + 7(x-2) + 4(x-2)^2 + (x-2)^3\,\right]$

(c) $f(x) = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 17$, $\alpha = -2$; $\quad\left[\,1 + (x+2)^4\,\right]$

(d) $f(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$, $\alpha = -1$; $\quad\left[\,5 - 13(x+1) + 11(x+1)^2 - 2(x+1)^3\,\right]$

(e) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x - 3$, $\alpha = 1$. $\quad\left[\,2(x-1) + 2(x-1)^3 + (x-1)^4\,\right]$

10. Najděte Taylorův vzorec $n-$tého stupně funkce f v okolí bodu a, je-li

(a) $f(x) = \sqrt[m]{\alpha^m + x}$, $a = 0$, $n = 3$, $\alpha > 0$, $m \in \mathbf{N}$;

$$\left[\alpha + \tfrac{x}{m\alpha^{m-1}} - \tfrac{(m-1)x^2}{2m^2\alpha^{2m-1}} + \tfrac{(m-1)(2m-1)}{6m^3}(\alpha^m + \vartheta x)^{\frac{1-3m}{m}}\,x^3\,, \quad (0 < \vartheta < 1)\right]$$

(b) $f(x) = \arcsin x$, $a = 0$, $n = 3$; $\quad\left[x + \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{8(\vartheta x)^4 + 24(\vartheta x)^2 + 3}{40\{1-(\vartheta x)^2\}^{\frac{9}{2}}}\,, \quad (0 < \vartheta < 1)\right]$

(c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = -1$, $n = k$ $(k \in \mathbf{N})$;

$$\left[-\sum_{i=1}^{k}(x+1)^i + (-1)^{k+1}\tfrac{(x+1)^{k+1}}{\{-1+\vartheta(x+1)\}^{k+2}}\,, \quad (0 < \vartheta < 1)\right]$$

(d) $f(x)=\sqrt{x}\,,\ a=4\,,\ n=k\ \ (k\in\mathbf{N})\,;$

$$\left[2+\tfrac{x-4}{4}+\sum_{i=2}^{k}(-1)^{i-1}\tfrac{(2i-3)!!}{i!\,2^{3i-1}}\,(x-4)^i+(-1)^k\tfrac{(2k-1)!!(x-4)^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!\{4+\vartheta(x-4)\}^{\frac{2k+1}{2}}}\,,\quad(0<\vartheta<1)\right]$$

(e) $f(x)=\mathrm{ch}x\,,\ a=0\,,\ n=2k\ \ (k\in\mathbf{N})\,;$ $\left[\sum_{i=0}^{k}\tfrac{x^{2i}}{(2i)!}+\tfrac{\mathrm{ch}\vartheta x}{(2k+2)!}\,x^{2k+2}\,,\quad(0<\vartheta<1)\right]$

(f) $f(x)=e^{2x-x^2}\,,\ a=0\,,\ n=5$ (bez zbytku); $\left[1+2x+x^2-\tfrac{2}{3}x^3-\tfrac{5}{6}x^4-\tfrac{1}{15}x^5\right]$

(g) $f(x)=\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}\,,\ a=0\,,\ n=4$ (bez zbytku). $\left[1+2x+2x^2-2x^4\right]$

11. Odhadněte chybu přibližné formule

a) $\sin x\approx x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}\,,\ |x|\le 1\,;$ b) $\sqrt{1+x}\approx 1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}\,,\ 0\le x\le 1\,;$

c) $\ln(1+x)\approx x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}\,,\ |x|\le 0,1\,.$

Řešení:

(a) Poněvadž platí

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+R_7x\,,\ \text{ kde }\ R_7(x)=-\frac{\cos\vartheta x}{7!}\,x^7$$

(viz příklad 8b)), je hledaná chyba

$$|R_7(x)|\le\frac{1}{7!}\,|x|^7\le\frac{1}{7!}=\frac{1}{5040}\,,$$

tj. je menší než $2\cdot 10^{-4}$.

(b) Podle příkladu 8e) $\left(\alpha=\frac{1}{2}\right)$ dostaneme

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+R_3(x)\,,$$

kde

$$R_3(x)=\binom{\frac{1}{2}}{3}(1+\vartheta x)^{-\frac{5}{2}}\,x^3=\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{6(1+\vartheta x)^{\frac{5}{2}}}\,x^3=\frac{x^3}{16(1+\vartheta x)^{\frac{5}{2}}}\quad(0<\vartheta<1)$$

a odtud

$$|R_3(x)|\le\frac{1}{16(1+\vartheta x)^{\frac{5}{2}}}\le\frac{1}{16}=0,0625\,.$$

(c) Podle příkladu 8d) platí

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+R_5(x)\,,$$

kde

$$R_5(x)=\frac{(1-\vartheta)^4}{(1+\vartheta x)^5}\,x^5\qquad(0<\vartheta<1)$$

a odtud

$$|R_5(x)|\le\left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right)^4\frac{|x|^5}{1+\vartheta x}\le\left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right)^4\frac{1}{10^5(1+\vartheta x)}.$$

Snadno zjistíme, že $\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x} \leq 1$ pro uvažované hodnoty ϑ a x. Je totiž $1-\vartheta \leq 1+\vartheta x$, neboli $\vartheta(1+x) \geq 0$. Můžeme tedy pokračovat v odhadu a dostaneme

$$|R_5(x)| \leq \frac{1}{10^5(1+\vartheta x)} \leq \frac{1}{10^5 \cdot \frac{9}{10}} = \frac{1}{9 \cdot 10^4} = 1,\overline{1} \cdot 10^{-5}.$$

Použijeme-li k odhadu Lagrangeova tvaru zbytku, dostaneme, že

$$R_5(x) = \frac{f^{(5)}(\vartheta x)}{5!}\, x^5 = \frac{x^5}{5(1+\vartheta x)^5}\,,$$

tedy

$$|R_5(x)| \leq \frac{1}{5 \cdot 10^5(1+\vartheta x)^5} \leq \frac{1}{5 \cdot 10^5 \left(\frac{9}{10}\right)^5} = \frac{1}{5 \cdot 9^5} \doteq 3,387 \cdot 10^{-6}.$$

Lagrangeův tvar zbytku poskytuje tedy menší, tj. přesnější odhad chyby.

12. Odhadněte chybu přibližné formule

(a) $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$, $x \in \langle 0,1\rangle$; $\left[\frac{3}{(n+1)!}\right]$

(b) $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$, $|x| \leq \frac{1}{2}$; $\left[\frac{1}{3840} = 2,6041\overline{6} \cdot 10^{-4}\right]$

(c) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}$, $|x| \leq \frac{1}{2}$. $\left[\frac{1}{10\,321\,920} \doteq 9,68812 \cdot 10^{-8}\right]$

13. Vypočtěte hodnotu funkce f s danou přesností δ.

a) $\ln 1,2$, $\delta = 10^{-5}$; b) $\sin 49^0$, $\delta = 10^{-6}$; c) $\sqrt[12]{4000}$, $\delta = 10^{-7}$.

Řešení:

(a) Lagrangeův tvar zbytku je

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{(n+1)!}\, x^{n+1} = \frac{(-1)^n\, x^{n+1}}{(n+1)(1+\vartheta x)^{n+1}} \quad (0 < \vartheta < 1)$$

a tedy

$$|R_{n+1}(0,2)| = \frac{(0,2)^{n+1}}{(n+1)(1+0,2\cdot\vartheta)^{n+1}} \leq \frac{1}{5^{n+1}(n+1)} < \frac{1}{10^5}\,.$$

Odtud dostaneme, že musí platit $(n+1)\cdot 5^{n+1} > 10^5$, což je splněno pro $n = 6$ ($7 \cdot 5^7 = 546\,875$). Hledaná přibližná hodnota $\ln 1,2$ je tedy

$$\ln 1,2 \doteq 0,2 - \frac{(0,2)^2}{2} + \frac{(0,2)^3}{3} - \frac{(0,2)^4}{4} + \frac{(0,2)^5}{5} - \frac{(0,2)^6}{6} = 0,182\,321\,,$$

tj. $\ln 1,2 = 0,18232 \pm 10^{-5}$. Kalkulačka ukazuje hodnotu $0,182\,321\,55$. Výpočet je tedy daleko přesnější, než jsme požadovali.

(b) Jestliže použijeme Maclaurinův rozvoj, platí pro zbytek vyjádření

$$R_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n \cos\vartheta x}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} \qquad (0 < \vartheta < 1)\,.$$

Danou hodnotu úhlu 49^0 musíme vyjádřit pomocí obloukové míry, neboli $\frac{49\pi}{180}$. Nyní musí platit

$$\left|R_{2n+1}\left(\frac{49\pi}{180}\right)\right| \leq \frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{49\pi}{180}\right)^{2n+1} < 10^{-6}\,.$$

Tato nerovnost je splněna pro $n = 4$, neboť $\frac{1}{9!}\left(\frac{49\pi}{180}\right)^9 < 7\cdot 10^{-7}$. Tedy $\sin 49^0$ je přibližně

$$\frac{49\pi}{180} - \frac{1}{3!}\left(\frac{49\pi}{180}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{49\pi}{180}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{49\pi}{180}\right)^7 \doteq 0,754\,708\,899.$$

Vzhledem k odhadu chyby $\sin 49^0 = 0,754\,709 \pm 10^{-6}$ je dokonce

$$\sin 49^0 \in (0,754\,709; 0,754\,710)\,, \quad \text{poněvadž } R_9\left(\frac{49\pi}{180}\right) > 0\,.$$

Přesnější hodnota je $0,754\,709\,59$. Všechny výpočty jsme prováděli na kalkulačce s chybou manší než 10^{-12}. Při ručním výpočtu musíme dávat pozor, aby chyba při výpočtu např. $\frac{1}{7!}\left(\frac{49\pi}{180}\right)^7$ nebyla větší než 10^{-6}.
Tuto úlohu můžeme řešit také pomocí Taylorova rozvoje v okolí bodu $\frac{\pi}{4}$. Platí

$$f(x) = \sin x\,, \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,; \qquad f'(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\,, \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,;$$

$$f''(x) = \sin(x+\pi)\,, \quad f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,; \quad f'''(x) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)\,, \quad f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Obecně

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{a odtud} \quad f^{(n)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\,.$$

Tedy

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1 + \frac{1}{1!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \right.$$
$$\left. + \cdots + \frac{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{n!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^n\right\} + R_{n+1}(x)\,,$$

kde

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}\left\{\frac{\pi}{4} + \vartheta\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right\}}{(n+1)!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{n+1} =$$
$$= \frac{\sin\left\{\frac{\pi}{4} + \vartheta\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + (n+1)\frac{\pi}{2}\right\}}{(n+1)!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{n+1} \qquad (0 < \vartheta < 1)\,.$$

Nyní požadujeme, aby

$$\left|R_{n+1}\left(\frac{49\pi}{180}\right)\right| \le \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\pi}{45}\right)^{n+1} < 10^{-6}\,,$$

$\left(\text{je } \frac{49\pi}{180} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{45}\right)$. Tato nerovnost je splněna pro $n = 3$; je totiž $\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{45}\right)^4 < 0,99\cdot 10^{-6}$.
Poněvadž je

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{\pi}{45} - \frac{\pi^2}{2!\,45^2} - \frac{\pi^3}{3!\,45^3}\right) \doteq 0,754\,708\,879\,,$$

vypočetli jsme znovu $\sin 49^0 = 0,754\,709 \pm 10^{-6}$.

(c) Daný výraz si nejdříve upravíme na tvar

$$\sqrt[12]{4000} = \sqrt[12]{4096 - 96} = \sqrt[12]{2^{12} - 96}2 = \sqrt[12]{1 - \frac{96}{4096}} = 2\left(1 - \frac{3}{128}\right)^{\frac{1}{12}}\,.$$

Užitím příkladu 8e) pro $\alpha = \frac{1}{12}$ dostaneme, že

$$R_{n+1}(x) = \binom{\frac{1}{12}}{n+1}(1 + \vartheta x)^{\frac{1}{12} - n - 1}\,x^{n+1} \qquad (0 < \vartheta < 1)\,,$$

neboli

$$R_{n+1}(x) = \frac{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{12}-1\right)\dots\left(\frac{1}{12}-n\right)}{(n+1)!}(1+\vartheta x)^{\frac{1}{12}-n-1}\,x^{n+1} =$$

$$= \frac{(-1)^n\cdot 11\cdot 23\cdot 35\dots(12n-1)}{12^{n+1}(n+1)!}(1+\vartheta x)^{\frac{1}{12}-n-1}\,x^{n+1}\,.$$

Odtud

$$\left|R_{n+1}\left(-\frac{3}{128}\right)\right| = \frac{11\cdot 23\dots(12n-1)}{12^{n+1}\,(n+1)!}\left(1-\frac{3\vartheta}{128}\right)^{\frac{1}{12}-n-1}\left(\frac{3}{128}\right)^{n+1} \leq$$

$$\leq \frac{11\cdot 23\dots(12n-1)}{12^{n+1}\,(n+1)!}\left(1-\frac{3\vartheta}{128}\right)^{-n-1}\left(\frac{3}{128}\right)^{n+1} \leq$$

$$\leq \frac{11\cdot 23\dots(12n-1)}{12^{n+1}\,(n+1)!\,\left(1-\frac{3}{128}\right)^{n+1}}\left(\frac{3}{128}\right)^{n+1} =$$

$$= \frac{3^{n+1}\,11\cdot 23\dots(12n-1)}{12^{n+1}\,(n+1)!\,125^{n+1}} = \frac{11\cdot 23\cdot\dots(12n-1)}{(n+1)!\,500^{n+1}}\,.$$

Nerovnost $2\left|R_{n+1}\left(-\frac{3}{128}\right)\right| < 10^{-7}$ je splněna pro $n=3$

$$\left(\text{je }\ 2\left|R_4\left(-\frac{3}{128}\right)\right| \leq \frac{2\cdot 11\cdot 23\cdot 35\cdot 3^4}{4!\cdot 1500^4} \doteq 1{,}1806\cdot 10^{-8}\right)$$

a tedy

$$\sqrt[12]{4000} \doteq 2\left\{1+\binom{\frac{1}{12}}{1}\frac{3}{128}+\binom{\frac{1}{12}}{2}\frac{9}{128^2}+\binom{\frac{1}{12}}{3}\frac{27}{128^3}\right\} =$$

$$= 2\left\{1-\frac{3}{12\cdot 128}+\frac{11\cdot 9}{2\cdot 12^2\cdot 128^2}-\frac{11\cdot 23\cdot 27}{6\cdot 12^3\cdot 128^3}\right\} \doteq 1{,}996\,051\,17\,.$$

14. Vypočtěte hodnotu funkce f s danou přesností δ.

(a) $\sin 1^0$, $\delta = 10^{-8}$; $\quad$ [$0{,}017\,452\,41$; užijte rozvoje z příkladu 8b) a ukažte, že $\left|R_5\left(\frac{\pi}{180}\right)\right| < 10^{-8}$]

(b) $\cos 5^0$, $\delta = 10^{-6}$; $\quad$ [$0{,}996\,195$; užijte rozvoje z příkladu 8c) a ukažte, že $\left|R_6\left(\frac{\pi}{36}\right)\right| < 10^{-6}$]

(c) $\log 11$, $\delta = 10^{-5}$; $\quad$ [$1{,}041\,39$; ukažte, že

$$\log x = 1 + \frac{1}{\ln 10}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(x-10)^k}{k\cdot 10^k} + R_{n+1}(x)\,,$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n(x-10)^{n+1}}{(n+1)\{10+\vartheta(x-10)\}^{n+1}\cdot\ln 10}\quad 0<\vartheta<1 \quad\text{a}\quad |R_5(1)| < 10^{-5}.$$

Využijte hodnoty $\ln 10 = 2{,}302\,585$]

(d) $\sqrt[4]{83}$, $\delta = 10^{-6}$. $\quad$ [$3{,}018\,35$; užijte rozvoje z příkladu 8e) pro $\alpha = \frac{1}{4}$ a metody z příkladu 13c) $(83 = 3^4 + 2)$. Ukažte dále, že $3|R_4| < 10^{-6}$]

15. Pomocí Taylorova rozvoje vypočtěte následující limity

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$; $\qquad$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-x^2}-x\cotg x}{x\,\sin x}$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$.

Řešení:

(a) Využitím Maclaurinových rozvojů funkcí $\cos t$ a e^t (viz příklady 8a) a 8c)) dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + R_6(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + R_6^*(x)\right)}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left\{ \frac{1}{24} - \frac{1}{8} + \frac{R_6(x) - R_6^*(x)}{x^4} \right\} = \lim_{x\to 0} \left\{ \frac{1}{24} - \frac{1}{8} + x\,\frac{o(x^5)}{x^5} \right\} = \frac{1}{24} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{12}\,;$$

V Maclaurinově vzorci pro e^x musíme samozřejmě místo x psát $-\frac{x^2}{2}$.

(b) Danou limitu si nejdříve upravíme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1-x^2} - x \operatorname{cotg} x}{x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1-x^2}\,\sin x - x\,\cos x}{x\,\sin^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1-x^2}\,\sin x - x\,\cos x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1-x^2}\,\sin x - x\,\cos x}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) - x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{6} - x + \frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x^3} = 0\,,$$

jestliže využijeme Maclaurinova vzorce pro funkci $(1+x)^\alpha$, $\left(\alpha = \frac{1}{3}\right)$, $\sin x$, $\cos x$ (příklady 8e), b) a c)).

(c) Zavedeme-li novou proměnnou předpisem $x = \frac{1}{t}$, můžeme danou limitu přepsat do tvaru

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right) = \lim_{t\to 0_+} \frac{\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t} - 2}{t^2} =$$

$$= \lim_{t\to 0_+} \frac{1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2) + 1 - \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2) - 2}{t^2} = \lim_{t\to 0_+} \left\{ -\frac{1}{4} + o(1) \right\} = -\frac{1}{4}\,,$$

jestliže využijeme Maclaurinova vzorce pro $(1+x)^\alpha$ $\left(\alpha = \frac{1}{2}\right)$. Platí samozřejmě, že $\frac{o(t^2)}{t^2} = o(1)$ pro $t \to 0_+$.

16. Pomocí Taylorova vzorce vypočtěte

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(x+1)}{x^3}$; $\left[\frac{1}{3}\right]$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}\right)$; $\left[\frac{1}{3};\right.$ zaveďte novou proměnnou $\left.x = \frac{1}{t}\right]$

17. Najděte lokální extrémy funkce f, je-li

a) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$; b) $f(x) = \cos x + \dfrac{1}{2}\cos 2x$; c) $f(x) = e^x \sin x$.

Řešení:

(a) Funkce f je definována pro $x \in \mathbf{R}$. Dále platí

$$f'(x) = \frac{(6x+4)(x^2+x+1)-(2x+1)(3x^2+4x+4)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-x^2-2x}{(x^2+x+1)^2}\,.$$

Položíme-li $f'(x)=0$, dostaneme 2 stacionární body $x_1=-2$ a $x_2=0$. Poněvadž platí

$$f'(x) = \frac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}\,, \quad \text{je } f'(x)<0 \text{ pro } x<-2 \text{ a pro } x>0\,;$$

$$f'(x)>0 \text{ pro } x\in(-2,0).$$

Odtud plyne, že v bodě $x_1=-2$ má f ostré lokální minimum $f(x_1)=\frac{8}{3}$ a v bodě $x_2=0$ ostré lokální maximum $f(0)=4$.

(b) Definiční obor dané funkce je $\mathbf{R}$, f je dále periodická s periodou 2π a platí

$$f'(x) = -\sin x - \sin 2x = \sin x(1+2\cos x)\,.$$

Pro stacionární body platí buď

$\sin x = 0\,,$ tedy $x = k\pi\,(k\in\mathbf{Z})$ nebo $\cos x = -\dfrac{1}{2}\,,$ neboli $x = \pm\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi\,(k\in\mathbf{Z})$.

Ke stanovení extrému využijeme druhé derivace. Je $f''(x) = -\cos x - 2\cos 2x$ a tedy

$$f''(k\pi) = -\cos k\pi - 2 = (-1)^{k+1}-2<0$$

a v bodech $x_k = k\pi\,(k\in\mathbf{Z})$ má funkce f ostré lokální maximum $f(k\pi)=(-1)^k+\frac{1}{2}$. Protože

$$f''\left(\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right) = -\cos\frac{2\pi}{3} - 2\cos\frac{4\pi}{3} = \frac{1}{2}+1 = \frac{3}{2}>0\,,$$

má f v bodech $x'_k = \pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi\,(k\in\mathbf{Z})$ ostré lokální minimum $f\left(\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right) = \cos\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{2}\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{3}{4}$.

(c) Funkce je definována pro $x\in\mathbf{R}$. Dále platí

$$f'(x) = e^x(\sin x+\cos x) = \sqrt{2}\,e^x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = \sqrt{2}\,e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Položíme-li $f'(x)=0$, dostaneme, že $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$, tedy $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\,(k\in\mathbf{Z})$. Protože $f''(x)=2e^x\cos x$, máme

$$f''\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi\right) = 2e^{-\frac{\pi}{4}+k\pi}\cos\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi\right) = 2e^{-\frac{\pi}{4}+k\pi}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos k\pi = (1)^k\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}+k\pi}\,.$$

Pro k sudé,tedy $k=2n\,(n\in\mathbf{Z})$ platí $f''\left(-\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)>0$ a funkce f má v těchto bodech ostré lokální minimum

$$f\left(-\frac{\pi}{4}+2n\pi\right) = e^{-\frac{\pi}{4}+2n\pi}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}+2n\pi}\,.$$

Pro k liché, tedy $k=2n+1\,(n\in\mathbf{N})$ platí $f''\left(-\frac{\pi}{4}+2n\pi+\pi\right) = f''\left(\frac{3\pi}{4}+2n\pi\right)<0$ a v těchto bodech má f ostré lokální maximum

$$f\left(\frac{3\pi}{4}+2n\pi\right) = e^{\frac{3\pi}{4}+2n\pi}\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}+2n\pi}\,.$$

18. Najděte lokální extrémy funkce f , je-li

(a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$; [maximum $f(0) = 0$, minimum $f(1) = -1$]

(b) $f(x) = x + \frac{1}{x}$; [maximum $f(-1) = -2$, minimum $f(1) = 2$; uvědomte si, že f není definována v bodě $x = 0$]

(c) $f(x) = \frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$; $\left[\text{maximum } f\left(\frac{12}{5}\right) = \frac{\sqrt{205}}{10} \doteq 1,43\right]$

(d) $f(x) = xe^{-x}$; $\left[\text{maximum } f(1) = e^{-1} \doteq 0,368\right]$

(e) $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$; $\left[\text{maximum } f\left(e^2\right) = \frac{4}{e^2} \doteq 0,541 , \text{ minimum } f(1) = 0\right]$

(f) $f(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1 + x^2\right)$. $\left[\text{maximum } f(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 \doteq 0,439\right]$

19. Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce f na daném intervalu, je-li

a) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$, $x \in \langle 0, 1\rangle$; b) $f(x) = \dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$, $x \in \langle 0, 1\rangle$;

c) $f(x) = 2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x$, $x \in \left\langle 0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Řešení:

(a) Je

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \cdot \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = -\frac{1}{1+x^2} < 0 \quad \text{pro } x \in \langle 0, 1\rangle .$$

Funkce f je tedy klesající na daném intervalu a své největší hodnoty nabývá v levém krajním bodu, tj. $f(0) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$. Nejmenší hodnoty nabývá f v pravém krajním bodu, neboli $f(1) = \operatorname{arctg} 0 = 0$.

(b) Daná funkce není definována v bodech, pro něž $1 + x - x^2 = 0$, tj. $x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right)$. Ty však leží vně intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Dále platí

$$f'(x) = \frac{2(2x-1)}{(1+x-x^2)^2} , \quad x \in D(f) .$$

Poněvadž je $f'(x) < 0$ pro $x \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\right)$ a $f'(x) > 0$ pro $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right\rangle$, je funkce f klesající v intarvalu $\left\langle 0, \frac{1}{2}\right\rangle$ a rostoucí v $\left\langle \frac{1}{2}, 1\right\rangle$. Odtud $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{5}$ je nejmenší hodnota f na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ (funkce f má v bodě $x = \frac{1}{2}$ ostré lokální minimum) a své největší hodnoty nabývá f v některém z krajních bodů intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Je však $f(0) = f(1) = 1$, tedy největší hodnota f je 1 .

(c) Pro $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right)$ je $f'(x) = \frac{2(1-\operatorname{tg} x)}{\cos^2 x}$, tedy $f'(x) > 0$ pro $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4}\right)$, $f'(x) < 0$ pro $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Odtud plyne, že f je rostoucí na $\left\langle 0, \frac{\pi}{4}\right\rangle$ a klesající na $\left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Tedy $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ je největší hodnota f na $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right)$ (ostré lokální maximum). Nejmenší hodnoty na $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right)$ může funkce f nabývat v bodě $x = 0$. Nabývá ji právě tehdy, když

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}_-} f(x) \geq f(0) = 0 . \quad \text{Ale} \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}_-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}_-} \operatorname{tg} x(2 - \operatorname{tg} x) = -\infty ,$$

tedy funkce f není v $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right)$ zdola omezená a nejmenší hodnota neexistuje.

Poznámka: Podle Weierstrassovy věty nabývá každá spojitá funkce f na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ své největší i nejmenší hodnoty. Jestliže existuje $f'(x)$ pro $x \in (a,b)$, pak oba extrémy mohou nastat jen v bodech množiny $K = \langle a,b\rangle - \{x \in (a,b)\,;\, f'(x) \neq 0\}$. Je-li K konečná množina, pak

$$\max_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) = \max_{x\in K} f(x)\,, \qquad \min_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) = \min_{x\in K} f(x)\,.$$

20. Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce f na daném intervalu, je-li

(a) $f(x) = \sqrt{5-4x}\,,\ x \in \langle -1, 1\rangle\,;$ $[\,3\,,\,1\,]$

(b) $f(x) = x^2 - 4x + 6\,,\ x \in \langle -3, 10\rangle\,;$ $[\,66\,,\,2\,]$

(c) $f(x) = \sqrt{2x - x^2}\,,\ x \in \langle 0, 2\rangle\,;$ $[\,1\,,\,0\,]$

(d) $f(x) = \sin 2x - x\,,\ x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle\,;$ $\left[\,\frac{\pi}{2}\,,\,-\frac{\pi}{2}\,\right]$

21. Dokažte následující nerovnosti

a) $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x\,,\ x > 0\,;$ b) $\dfrac{2}{\pi}\,x < \sin x < x\,,\ x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)\,;$

c) $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x+1}\,,\ x > 0\,;$

d) $(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > \left(x^\beta + y^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}\,,\ x > 0\,,\ y > 0\,,\quad 0 < \alpha < \beta\,.$

Důkaz:

(a) Označme $f(x) = x - \ln(1+x)$. Potom je $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0$ a funkce f je rostoucí pro $x > 0$. Vzhledem k tomu, že $f(0) = 0$, dostáváme platnost nerovnosti $\ln(1+x) < x$ pro $x > 0$.

Označíme=li $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$, je

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} > 0$$

a funkce g je též rostoucí pro $x > 0$. Stejně jako v předchozím případu platí $g(0) = 0$ a tedy nerovnost $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x)$ platí pro $x > 0$.

Poznámka: Funkce $f(x) = \ln(1+x)$ má Maclaurinovy polynomy $T_1(x) = x$, $T_2(x) = x - \frac{x^2}{2}$. Tedy máme ukázat, že pro $x > 0$ je

$$R_2(x) = f(x) - T_1(x) < 0 \quad \text{a} \quad R_3(x) = f(x) - T_2(x) > 0\,.$$

Ale

$$R_2(x) = -\frac{x^2}{2(1+\vartheta_2)^2}\,, \quad R_3(x) = \frac{x^3}{3(1+\vartheta_3)^3}\,, \quad \text{kde} \quad \vartheta_2, \vartheta_3 \in (0, x)$$

(Lagrangeův tvar zbytku).

(b) Buď $f(x) = x - \sin x$. Potom $f'(x) = 1 - \cos x > 0$ pro $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ a f je rostoucí v $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$. Vzhledem k rovnosti $f(0) = 0$ dostaneme platnost nerovnosti $\sin x < x$ pro $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Funkce $g(x) = \sin x$ je ryze konkávní v $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$, neboť $g''(x) = -\sin x < 0$ pro $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Tedy pro tato x je

$$\sin x > \frac{\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0}{\frac{\pi}{2} - 0} \cdot x = \frac{2}{\pi}\, x\,.$$

(c) Zavedením nově proměnné $x = \frac{1}{t}$ můžeme danou nerovnost přepsat do tvaru

$$(1+t)^{\frac{1}{t}} < e < (1+t)^{\frac{1}{t}+1} \quad \text{pro} \quad t > 0\,,$$

neboli

$$e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} < e^1 < e^{\left(\frac{1}{t}+1\right)\ln(1+t)}\,, \quad t > 0\,.$$

Poněvadž je funkce $f(t) = e^t$ rostoucí pro $t \in \mathbf{R}$, je předchozí nerovnost ekvivalentní s nerovností

$$\frac{\ln(1+t)}{t} < 1 < \left(\frac{1}{t} + 1\right)\ln(1+t)\,, \quad t > 0\,.$$

Nerovnost $\frac{\ln(1+t)}{t} < 1$ je přímým důsledkem nerovnosti a).
Pro zbývající část důkazu označme $g(t) = \frac{\ln(1+t)}{t} + \ln(1+t) - 1$. Potom platí

$$g'(t) = \frac{1}{t(1+t)} - \frac{\ln(1+t)}{t^2} + \frac{1}{1+t} = \frac{1}{t} - \frac{\ln(1+t)}{t^2} = \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} > 0 \quad \text{pro} \quad t > 0$$

opět podle nerovnosti a). Funkce g je tedy rostoucí, neboli

$$g(t) > \lim_{t\to 0_+} g(t) = \lim_{t\to 0_+}\left\{\frac{\ln(1+t)}{t} + \ln(1+t) - 1\right\} = 0$$

pro všechna $t > 0$. Tím je dokázána nerovnost $1 < \left(\frac{1}{t}+1\right)\ln(1+t)$.

(d) Funkce $g(t) = \ln t$ je rostoucí a ryze konkávní v $(0, +\infty)$, neboť $g'(t) = \frac{1}{t}$, $g''(t) = -\frac{1}{t^2}$ pro $t > 0$.

Buďte $a, b > 0$. Pak $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1$ a použitím nerovnosti $a^2 + b^2 < (a+b)^2$, $a, b > 0$ dostaneme

$$(*) \qquad \frac{a}{a+b}\ln a + \frac{b}{a+b}\ln b \le \ln\left\{\frac{a}{a+b}\cdot a + \frac{b}{a+b}\cdot b\right\} = \ln\frac{a^2+b^2}{a+b} < \ln(a+b)\,.$$

V předchozí nerovnosti platí pro $a \ne b$ dokonce ostrá nerovnost.

Buďte x, y pevná kladná čísla. Ukážeme, že funkce $f(t) = (x^t + y^t)^{\frac{1}{t}}$ je klesající na $(0, +\infty)$. Skutečně

$$f'(t) = \left(x^t + y^t\right)^{\frac{1}{t}}\left\{-\frac{1}{t^2}\ln\left(x^t + y^t\right) + \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{x^t+y^t}\left(x^t\ln x + y^t \ln y\right)\right\} =$$

$$= \frac{(x^t+y^t)^{\frac{1}{t}}}{t^2}\left\{\frac{x^t}{x^t+y^t}\ln x^t + \frac{y^t}{x^t+y^t}\ln y^t - \ln\left(x^t+y^t\right)\right\} < 0\,,$$

neboť výraz ve složené závorce je podle nerovnosti $(*)$ pro $a = x^t$, $b = y^t$ záporný.

22. Dokažte následující nerovnosti

(a) $2x \operatorname{arctg} x \geq \ln(1 + x^2)\,, \quad x \in \mathbf{R}\,;$

(b) $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x\,, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\,;$

(c) $x^\alpha - 1 > \alpha(x-1)\,, \quad x > 1\,, \alpha > 1\,.$

23. Řešte následující úlohy na extrém.

(a) Najděte rozměry kužele, vepsaného do koule daného poloměru R tak, aby jeho oblem byl maximální.

(b) Z obdélníkové čtvrtky o rozměrech $a, b\,(0 < a \leq b)$ jsou u vrcholů vyříznuty stejné čtverce. Ze zbývající části je vytvořena shora otevřená krabička. Najděte stranu vyříznutého čtverce tak, aby objem krabičky byl maximální.

(c) Dva zdroje světla jsou od sebe vzdáleny $30m$. Na jejich spojnici najděte bod, který je nejméně osvětlen, jestliže jsou intenzity zdrojů v poměru $27 : 8$.

(d) Do řeky o šířce a metrů ústí v pravém úhlu kanál o šířce b metrů $(0 < b < a)$. Najděte maximálbí délku plavidla, které může z řeky vplout do kanálu.

(e) Závod A je vzdálen od železnice a km. Železnice prochází od jihu k severu a leží na ní město B. Pod jakým úhlem φ k železniční dráze je třeba vybudovat příjezdovou silnici, aby doprava zboží z A do B byla nejlevnější, jestliže přeprava jedné tuny stojí po silnici p Kč a po železnici q Kč na 1 km $(p > q)$ a město B leží b km severně od závodu A.

Řešení:

(a) Označme x vzdálenost středu dané koule od roviny podstavy vepsaného kužele; pak $x \in (-R, R)$ a pro poloměr podstavy r, výšku v a objem V tohoto kužele platí

viz obrázek.

$$v = R + x\,, \quad r = \sqrt{R^2 - x^2}\,, \quad V = \frac{1}{3}\pi(R^2 - x^2)(R + x)\,.$$

Hledáme maximum funkce V na $(-R, R)$. Protože je funkce V spojitá v $\langle -R, R\rangle$, toto maximum existuje Jelikož

$$V' = \frac{\pi}{3}\left\{-2x(R + x) + R^2 - x^2\right\} = \frac{\pi}{3}\left\{R^2 - 2Rx - 3x^2\right\}$$

a kořeny kvadratické rovnice $x^2 + 2Rx - R^2 = 0$ jsou $x_1 = \frac{R}{3}$, $x_2 = -R$, může funkce V nabývat na $\langle -R, R\rangle$ extrému pouze v bodech x_1, x_2 a $x_3 = R$ (viz poznámka za příkladem 19). Protože

$$V\left(\frac{R}{3}\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{8}{9}R^2 \cdot \frac{4}{3}R = \frac{32}{81}\pi R^3\,, \qquad V(-R) = V(R) = 0\,,$$

je

$$\max_{x \in \langle -R, R\rangle} V(x) = \max_{x \in (-R, R)} V(x) = V\left(\frac{R}{3}\right)\,.$$

Ze všech kuželů, vepsaných do koule o poloměru R, má největší objem kužel, jehož výška je $v = x_1 + R = \frac{4}{3}R$ a poloměr podstavy $r = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$. Objem tohoto kužele je roven $\frac{8}{27}$ objemu opsané koule, tj. $29{,}63\%$.

Poznámka: Platí

$$0 = V(-R) = V(R) = \min_{x \in \langle -R, R \rangle} V(x) = \inf_{x \in (-R,R)} V(x)\,,$$

tedy $\min\limits_{x \in (-R,R)} V(x)$ neexistuje. Do koule o poloměru R lze vepsat kužel libovolně malého objemu.

(b) Označme stranu vyříznutého čtverce x. Potom je $x \in \left(0, \frac{a}{2}\right)$ a pro hledaný objem V platí $V = x(a-2x)(b-2x)$. Tedy

viz obrázek.

$$V'(x) = (a-2x)(b-2x) - 2x(b-2x) - 2x(a-2x) = 12x^2 - 4(a+b)x + ab\,.$$

Položíme-li $V'(x) = 0$, dostaneme kvadratickou rovnici $12x^2 - 4(a+b)x + ab = 0$ s řešením $x_{1,2} = \frac{1}{6}\left(a + b \pm \sqrt{a^2+b^2-ab}\right)$. Protože je funkce V spojitá na $\left\langle 0 \frac{a}{2} \right\rangle$ a $x_1 = \frac{1}{6}\left(a+b+\sqrt{a^2+b^2-ab}\right) \notin \left\langle 0, \frac{a}{2} \right\rangle$. je

$$\max_{x \in \left\langle 0, \frac{a}{2} \right\rangle} V(x) = \max \left\{ V(0)\,, V(x_2)\,, V\left(\frac{a}{2}\right) \right\} = V(x_2) = \max_{x \in \left(0, \frac{a}{2}\right)} V(x)\,,$$

neboť $V(x_2) > 0 = V(0) = V\left(\frac{a}{2}\right)$. Tedy hledaná krabička má maximální objem pro $x = \frac{1}{6}\left(a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}\right)$.

(c) Označíme-li A silnější zdroj a B slabší zdroj, pak situace vypadá následovně

viz obrázek. Intenzita osvětlení je nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti od zdroje, tedy intenzitu osvětlení bodu P můžeme popsat funkcí

$$J(x) = k\left\{ \frac{27}{x^2} + \frac{8}{(30-x)^2} \right\}, \quad x \in (0,30)\,,\ k > 0\,.$$

Protože $\lim\limits_{x \to 0_+} J(x) = \lim\limits_{x \to 30_-} J(x) = +\infty$ a funkce J je spojitá na $(0,30)$, nabývá funkce J svého minima na intervalu $(0,30)$. Protože $J'(x) = 2k\left\{ -\frac{27}{x^3} + \frac{8}{(30-x)^3} \right\}$, lze rovnici $J'(x) = 0$ upravit do tvaru

$$\left(\frac{30-x}{x}\right)^3 = \frac{8}{27}\,.\ \text{Odtud}\ \frac{30-x}{x} = \frac{2}{3}\,,\ 90 - 3x = 2x\,,\ x = 18\,.$$

V tomto bodě má funkce $J(x)$ své minimum a tedy hledaný bod P je vzdálen 18 m od silnějšího zdroje.

(d) Popíšeme si situaci obrázkem

viz obrázek. Buď $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Pro délku $f(\alpha)$ úsečky $\overline{AB}$ platí $f(\alpha) = \frac{b}{\sin\alpha} + \frac{a}{\cos\alpha}$, Přičemž nejkratší taková úsečka (v závislosti na α) udává maximální délku plavidla.

Existenci čísla $\min\limits_{\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})} f(\alpha)$ lze zdůvodnit jako v předchozím příkladu. Dále platí

$$f'(\alpha) = -\frac{b\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{a\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{a\sin^3\alpha - b\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}\,.$$

Položíme-li $f'(\alpha) = 0$, neboli $a\sin^3\alpha - b\cos^3\alpha = 0$, dostaneme $\operatorname{tg}^3\alpha = \frac{b}{a}$, tedy $\alpha_0 = \operatorname{arctg}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$. V tomto bodě nabývá funkce f minima na $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, jehož hodnota je hledaná maximální délka plavidla:

$$f(\alpha_0) = \frac{b}{\sin\alpha_0} + \frac{a}{\cos\alpha_0} = \sqrt{1+\operatorname{tg}\alpha_0}\left(\frac{b}{\operatorname{tg}\alpha_0} + a\right) = \left\{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} + a\right) =$$

$$= \left\{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}\,.$$

(e) Načrtneme si nejdříve obrázek

viz obrázek. Jestliže se silnice připojuje k železnici $b - x$ km jižně od B, pak náklady $f(x)$ na přepravu jedné tuny zboží z A do B jsou rovny

$$f(x) = q(b-x) + p\sqrt{a^2+x^2}\,.$$

Protože je funkce $f(x)$ spojitá na $\langle 0, b\rangle$, nabývá na $\langle 0, b\rangle$ svého minima. Dále je

$$f'(x) = -q + \frac{px}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{px - q\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

a $f'(x) = 0$ nastane pro $px = q\sqrt{a^2+x^2}$, neboli $p^2x^2 = q^2(a^2+x^2)$. Tato rovnice má řešení $x = \pm\frac{qa}{\sqrt{p^2-q^2}}$, řešením rovnice $f'(x) = 0$ je však pouze hodnota $x = \frac{qa}{\sqrt{p^2-q^2}}$. Je-li $\frac{qa}{\sqrt{p^2-q^2}} \le b$, pak f nabývá minima v bodě $x = \frac{qa}{\sqrt{p^2-q^2}}$, jinak v bodě $x = b$. Rozmyslete si proč. V prvním případě tedy platí

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{q}{p}\,, \quad \text{neboli} \quad \varphi = \arccos\frac{q}{p}\,.$$

V druhém případě je $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{a}{b}$. Hledaný úhel je tedy výsledně

$$\varphi = \max\left\{\arccos\frac{q}{p}\,, \operatorname{arctg}\frac{a}{b}\right\}\,.$$

24. Řešte následující úlohy na extrém funkce.

(a) Do elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ vepište obdélník tak, aby jeho obsah byl maximální.

[Strany obdélníka jsou $a\sqrt{2}\,, b\sqrt{2}\,.$]

(b) Do polokoule o poloměru R vepište kvádr se čtvercovou podstavou tak, aby jeho objem byl maximální.

[Rozměry kvádru jsou $\frac{2R}{\sqrt{3}}\,, \frac{2R}{\sqrt{3}}\,, \frac{R}{\sqrt{3}}\,.$]

(c) Kolem daného válce s poloměrem podstavy R a výškou v opište kužel o nejmenším objemu.

[Poloměr podstavy kužele je $r = \frac{3R}{2}$, výška kužele $h = 3v$; užijte podobnosti trojúhelníků.]

(d) Najděte rozměry válce největšího objemu, který je vepsán do koule o poloměru R.

$\left[\text{Poloměr } r = R\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \text{výška } v = \frac{2R}{\sqrt{3}}\,.\right]$

(e) Z kruhu je vyříznuta výseč se středovým úhlem α. Z výseče je svinut kužel. Najděte úhel α tak, aby objem kužele byl maximální.

[Středový úhel výseče α je $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 293^0 56'$; počítejte s úhlem α v obloukové míře.]

(f) Obraz o výšce $1,4$ m je zavěšen na stěně tak, že jeho spodní okraj je ve výšce $1,8$ m nad okem pozorovatele. Určete, v jaké vzdálenosti od stěny má pozorovatel stát, aby obraz viděl pod největším zorným úhlem.

[Vzdálenost od stěny je 2,4 m; užijte kosinovou větu.]

(g) Válečná loď je zakotvena 9 km od pobřeží. Z lodi je třeba vyslat posla do tábora, který leží na pobřeží, 15 km vzdálený od bodu pobřeží, který je nejblíže lodi. Jak blízko tábora má posel přistát, aby se do tábora dostal v nejkratším možném čase, je-li jeho rychlost na moři 4km/hod a po pobřeží 5km/hod.

[3 km od tábora.]

25. Vyšetřete průběh funkce f a načrtněte její graf, je-li

a) $f(x) = x^2 e^{-x}$; b) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 4x^2$; c) $f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{2}{3}}$;

d) $f(x) = \sin x + \dfrac{1}{3}\sin 3x$; e) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}\, e^{-x}$; d) $f(x) = \arccos \dfrac{1-x}{1-2x}$.

Řešení:

(a) Funkce f je definována pro $x \in \mathbf{R}$ a je nezáporná. Řešením rovnice $f(x) = 0$ dostaneme jediný nulový bod $x = 0$.

Limity v krajních bodech definičního oboru jsou

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 e^{-x} = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x} = 0\,,$$

jestliže použijeme l'Hôspitalova pravidla. Funkce f má tedy pro $x \to +\infty$ asymptotu $y = 0$. Asymptota pro $x \to -\infty$ neexistuje, poněvadž $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x e^{-x} = -\infty$.

Dále platí

$$f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}\,, \qquad f'(x) = 0 \text{ pro } x = 0 \text{ a } x = 2\,.$$

Spojitá funkce f' nemůže měnit znaménko v žádném intervalu množiny

$$\{x \in D(f')\,;\, f'(x) \neq 0\} = \mathbf{R} - \{0,2\} = (-\infty,0) \cup (0,2) \cup (2,+\infty)\,,$$

tedy funkce f je rostoucí v intervalu $\langle 0,2\rangle$ a klesající v každém z intervalů $(-\infty,0\rangle$, $\langle 2,+\infty)$. (viz následující schéma).

Odtud plyne, že f má v bodě $x = 0$ ostré lokální minimum $f(0) = 0$ a v bodě $x = 2$ ostré lokální maximum $f(2) = 4e^{-2} \doteq 0,541$.

Druhá derivace funkce f je

$$f''(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}\,,\ x \in \mathbf{R}\,.\ \text{Odtud}\quad f''(x) = 0\ \text{pro}\ x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}\,,$$

$f''(x) > 0$ pro $x \in (-\infty, 2-\sqrt{2}) \cup (2+\sqrt{2}, +\infty)$, $f''(x) < 0$ pro $x \in (2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$.
Funkce f je tedy ryze konvexní v intervalech $(-\infty, 2-\sqrt{2}\rangle$ a $\langle 2+\sqrt{2}, +\infty)$ a ryze konkávní v intervalu $\langle 2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\rangle$; oba body $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$ jsou tedy inflexní (viz schéma).

Dále

$f(2-\sqrt{2}) = f(0,586) \doteq 0,191\,,\ f'(2-\sqrt{2}) \doteq 1,488$ (směrnice tečny v inflexním bodě).

$f(2+\sqrt{2}) = f(3,414) \doteq 0,384\,,\quad f'(2+\sqrt{2}) \doteq -0,159\,.$

Na závěr nakreslíme graf dané funkce.
viz graf

(b) Funkce f je definována pro $x \in \mathbf{R} - \{0\}$. Pro nulové body platí

$$\frac{1}{x} + 4x^2 = 0 \implies x^3 = -\frac{1}{4} \implies x = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}} \doteq -0,63\,.$$

Limity v krajních bodech definičního oboru jsou

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x} + 4x^2\right) = +\infty\,,\quad \lim_{x\to 0_-}\left(\frac{1}{x} + 4x^2\right) = -\infty\,,\quad \lim_{x\to 0_+}\left(\frac{1}{x} + 4x^2\right) = +\infty\,.$$

Funkce f má tedy asymptotu $x = 0$. V bodech $\pm\infty$ platí

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x} + 4x^2\right) = \pm\infty$$

a asymptoty pro $x \to \pm\infty$ neexistují. Dále

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 4x\,,\qquad f'(0)\ \text{neexistuje}\,,\quad f'(x) = 0\ \text{pro}\ x = \frac{1}{2}\,.$$

Vyšetříme-li znaménka první derivace, dostaneme, že

viz schéma.
funkce f je rostoucí v intervalu $\left\langle \frac{1}{2}, +\infty\right)$ a klesající v intervalech $(-\infty, 0)$ a $\left(0, \frac{1}{2}\right\rangle$ (není klesající na množině $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right\rangle$!). V bodě $x = \frac{1}{2}$ má funkce f ostré lokální minimum $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$. Stejně vyšetříme druhou derivaci.

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} + 8\,,\quad x \neq 0\,;\qquad f''(x) = 0\ \text{pro}\ x = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\,.$$

viz schéma. Funkce f je tedy ryze konvexní v obou intervalech $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right\rangle$ a $(0, +\infty)$,

ryze konkávní v $\left\langle -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, 0\right)$; bod $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ je inflexním bodem funkce f, $f'\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) \doteq -7,56$. Nyní můžeme načrtnout graf dané funkce. viz graf.

Poznámka: Při načrtnutí grafu funkce $f(x) = \frac{1}{x} + 4x^2$ jsme použili různých měřítek na ose x a ose y. Tím se ovšem naše představa o grafu deformuje. Na příklad tečna v inflexním bodě $\left[-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, 0\right]$ je ve skutečnosti mnohem strmější, funkce f roste rychleji pro $x \to \pm\infty$ apod.

(c) Funkce f je definována pro $x \in \mathbf{R}$ a je kladná. Dále je sudá, tedy její graf je symetrický podle osy y. Limity v krajních bodech definičního oboru jsou $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Je sice $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, ale asymptoty pro $x \to \pm\infty$ neexistují, protože $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Pro prvou derivaci platí

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}}$$

a f' neexistuje pro $x = -1$ a $x = 1$; dále $f'(x) = 0$ pro $x = 0$. Jestliže si nakreslíme schéma znamének první derivace a intervalů monotonie, dostaneme. viz schéma.

Protože je funkce f spojitá v celém $\mathbf{R}$. jsou všechny maximální intervaly monotonie uzavřené; f je klesající v intervalu $(-\infty, -1\rangle$ a $\langle 0, 1\rangle$ a rostoucí v intervalech $\langle -1, 0\rangle$ a $\langle 1, +\infty)$. Odtud plyne, že f má v bodech $x = \pm 1$ ostrá lokální minima $f(\pm 1) = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4} \doteq 1,587$ a v bodě $x = 0$ ostré lokální maximum $f(0) = 2$.
Dále platí

$$f''(x) = -\frac{2}{9}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}\right) < 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{R} - \{-1; 1\}$$

a funkce f je ryze konkávní v každé z intervalů $(-\infty, -1\rangle$, $\langle -1, 1\rangle$ a $\langle 1, +\infty)$. Poněvadž navíc

$$f'_{\pm}(x_i) = \lim_{x\to x_{i_\pm}} f'(x) = \pm\infty\,, \quad x_i = (-1)^i\,,\ i = 1, 2\,,$$

můžeme načrtnout graf funkce f. Funkce f není v $D(f) = \mathbf{R}$ konvexní ani konkávní. viz obrázek.

(d) Funkce f je definována pro $x \in \mathbf{R}$, je lichá a periodická s periodou 2π. Budeme ji tedy dále vyšetřovat pouze na intervalu délky 2π, např. $\langle 0, 2\pi\rangle$. Využitím Moivreovy věty $(\cos x + i \sin x)^3 = \cos 3x + i \sin 3x$ můžeme vyjádřit

$$\sin 3x = 3\cos^2 x\,\sin x - \sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x\,,$$

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\,\sin^2 x = 4\cos^3 x - 3\cos x\,.$$

Pro nulové body f platí

$$\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x = 2\sin x - \frac{4}{3}\sin^3 x = 0\,, \quad \sin x\left(1 - \frac{2}{3}\sin^2 x\right) = 0\,.$$

Rovnice $\sin x = 0$ má v daném intervalu řešení $0, \pi, 2\pi$, rovnice $1 - \frac{2}{3}\sin^2 x = 0$, neboli $\sin^2 x = \frac{3}{2}$ řešení v reálném oboru nemá.
Poněvadž je f riodická a nekonstantní, neexistují limity $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ a tedy neexistují ani asymptoty pro $x \to \pm\infty$. Dále je $f'(x) = \cos x + \cos 3x$ a položíme-li $f'(x) = 0$, dostaneme rovnici

$$4\cos^3 x - 2\cos x = 2\cos x(2\cos^2 x - 1) = 0\,.$$

Odtud dostaneme buď $\cos x = 0$ se stacionárními body $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ nebo $\cos^2 x = \frac{1}{2}$, tedy $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ se stacionárními body $\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ nebo $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ se stacionárními body $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$. Přepíšeme-li $f'(x)$ do tvaru

$$f'(x) = 4\cos x\left(\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

můžeme načrtnout rozložení znamének f' a monotonie f.
<u>viz scéma.</u>

Odtud plyne, že f má v bodě

$$x = \frac{\pi}{4} \quad \text{ostré lokální maximum} \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \doteq 0{,}943\,;$$

$$x = \frac{\pi}{2} \quad \text{ostré lokální minimum} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3} \doteq 0{,}667\,;$$

$$x = \frac{3\pi}{4} \quad \text{ostré lokální maximum} \quad f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \doteq 0{,}943\,;$$

$$x = \frac{5\pi}{4} \quad \text{ostré lokální minimum} \quad f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \doteq -0{,}943\,;$$

$$x = \frac{3\pi}{2} \quad \text{ostré lokální maximum} \quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{2}{3} \doteq -0{,}667\,;$$

$$x = \frac{7\pi}{4} \quad \text{ostré lokální minimum} \quad f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \doteq -0{,}943\,.$$

Pro druhou derivaci platí

$$f''(x) = -\sin x - 3\sin 3x = 2\sin x(6\sin^2 x - 5) = 12\sin x\left(\sin x - \sqrt{\frac{5}{6}}\right)\left(\sin x + \sqrt{\frac{5}{6}}\right).$$

Položíme-li $f''(x) = 0$, dostáváme jednak $\sin x = 0$ se stacionárními body $0, \pi, 2\pi$, jednak $\sin x = \pm\sqrt{\frac{5}{6}} \doteq \pm 0,913$. Načrtneme-li si graf funkce $y = \sin x$, získáme zbývající stacionární body graf funkce $y = \sin x$.

$$\alpha_1 = \arcsin\sqrt{\frac{5}{6}} \doteq 1,150\,, \qquad \alpha_2 = \pi - \alpha_1 \doteq 1,991\,,$$
$$\alpha_3 = \pi + \alpha_1 \doteq 4,292\,, \qquad \alpha_4 = 2\pi - \alpha_1 \doteq 5,133\,.$$

Načrtneme rozložení znamének f'' a intervaly konvexity a konkávity.
viz schéma.

Všechny nulové body druhé derivace jsou inflexní body funkce f a platí

$$f'(0) = 2\,, \quad f'(\alpha_1) = -\frac{2\sqrt{6}}{9} \doteq -0,544\,, \quad f(\alpha_1) = \frac{8}{9}\sqrt{\frac{5}{6}} \doteq 0,811\,.$$

Závěrem načrtneme graf funkce f. viz graf funkce.

Poznámka: Protože je funkce f lichá, stačilo ji vyšetřovat pouze na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Pro všechna $x \in \mathbf{R}$ dále platí

$$f(\pi - x) = \sin(\pi - x) + \frac{1}{3}\sin(3\pi - 3x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x = f(x)\,.$$

Odtud plyne, že graf funkce f je osově souměrný podle přímky $x = \frac{\pi}{2}$ (rozmyslete si !). Stačilo tedy vyšetřit průběh funkce f jen na intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ a pak ji příslušně rozšířit.

(e) Funkce f je definována pro $x \in \mathbf{R}$ a má jediný nulový bod $x = 0$. Pro $x \neq 0$ je f kladná. Užitím l'Hôspitalova pravidla dostaneme, že $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{2}{3}} e^{-x} = 0$ a tedy přímka $y = 0$ je asymptotou f pro $x \to +\infty$. Dále platí

$$\lim_{x \to -\infty} x^{\frac{2}{3}} e^{-x} = +\infty\,, \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{x^{\frac{1}{3}}} = -3 \lim_{x \to -\infty} x^{\frac{2}{3}} e^{-x} = -\infty$$

užitím l'Hôspitalova pravidla a asymptota pro $x \to -\infty$ neexistuje. Je

$$f'(x) = \left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right) e^{-x} = \frac{2 - 3x}{3\sqrt[3]{x}} e^{-x}\,, \quad x \neq 0\,,$$

a dostáváme dva stacionární body: $x_1 = \frac{2}{3}\,(f'(x) = 0)$ a $x_2 = 0\,(f'$ neexistuje). Načrtneme rozložení znamének f' a intervaly monotónie funkce f.
viz schéma.

Protože je funkce f spojitá v bodě $x = 0$, patří bod 0 do obou sousedních intervalů monotonie. Odtud plyne, že v bodě $x_2 = 0$ má f ostré lokální minimum

$$f(0) = 0\,, \quad f'_+(0) = \lim_{x\to 0_+} f'(x) = +\infty\,, \quad f'_-(0) = \lim_{x\to 0_-} f'(x) = -\infty$$

a v bodě $x_1 = \frac{2}{3}$ ostré lokální maximum $f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} e^{-\frac{2}{3}} \doteq 0,392$. Pro druhou derivaci dostaneme

$$f''(x) = \left(-\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right) e^{-x} = \frac{-2 - 12x + 9x^2}{9\sqrt[3]{x^4}} e^{-x}\,, \quad x \neq 0$$

a položíme-li $f''(x) = 0$, neboli $9x^2 - 12x - 2 = 0$, získáme dva stacionární body

$$x_3 = \frac{1}{3}(2 - \sqrt{6}) \doteq -0,150 \quad \text{a} \quad x_4 = \frac{1}{3}(2 + \sqrt{6}) \doteq 1,483\,.$$

Načrtneme rozložení znamének f'' a intervaly konvexity a konkávity.
viz schéma.

Oba body $x_{3,4} = \frac{1}{3}(2 \mp \sqrt{6})$ jsou inflexní body funkce f,

$$f(x_3) \doteq 0,328\,, \quad f'(x_3) \doteq -1,786\,, \qquad f(x_4) \doteq 0,295\,, \quad f'(x_4) \doteq -0,162\,.$$

Nyní můžeme načrtnout graf funkce f.
viz graf

(f) Funkce f je definována pro všechna x, pro něž

$$\left|\frac{1-x}{1-2x}\right| \le 1\,, \quad \text{neboli} \quad |1-x| \le |1-2x|\,, \; x \neq \frac{1}{2}\,.$$

Nulové body v absolutních hodnotách jsou $\frac{1}{2}$ a 1, tedy

i. pro $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ platí $1 - x \le 1 - 2x$, $x \le 0$ a odtud $x \in (-\infty, 0\rangle$;
ii. pro $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right\rangle$ platí $1 - x \le 2x - 1$, $x \ge \frac{2}{3}$ a odtud $x \in \left\langle\frac{2}{3}, 1\right\rangle$;
iii. pro $x \in \langle 1, +\infty)$ platí $x - 1 \le 2x - 1$, $x \ge 0$ a odtud $x \in \langle 1, +\infty)$.

Shrnutím dostaneme, že definiční obor funkce f je množina $M = (-\infty, 0\rangle \cup \left\langle\frac{2}{3}, +\infty\right)$. Dále platí

$$f(0) = \arccos 1 = 0\,, \quad f\left(\frac{2}{3}\right) = \arccos(-1) = \pi\,, \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}\,.$$

Funkce f má tedy asymptotu $y = \frac{\pi}{3}$ pro $x \to \pm\infty$. Pro první derivaci platí

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^2}} \cdot \frac{-1 + 2x + 2(1-x)}{(1-2x)^2} = \frac{-1}{\sqrt{(1-2x)^2 - (1-x)^2}} \cdot \frac{1}{|1-2x|} =$$

$$= -\frac{1}{|1-2x|\sqrt{3x^2-2x}} < 0$$

a funkce f je klesající jak pro $x \in (-\infty, 0\rangle$, tak pro $x \in \left\langle \frac{2}{3}, +\infty \right)$. Navíc má f v bodě 0 nejmenší hodnotu a v bodě $\frac{2}{3}$ největší hodnotu. Dále je

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0_-} f'(x) = f'_+\left(\frac{2}{3}\right) = \lim_{x\to \frac{2}{3}_+} f'(x) = -\infty\,.$$

Buď $x < 0$. Potom

$$f'(x) = \frac{1}{(2x-1)\sqrt{3x^2-2x}} \quad \text{a tedy} \quad f''(x) = -\frac{12x^2-9x+1}{(2x-1)^2\sqrt{(3x^2-2x)^3}} \quad \text{(po úpravě).}$$

Poněvadž je $12x^2 - 9x + 1 > 0$ pro $x < 0$, je $f''(x) < 0$ a f je ryze konkávní pro $x \in (-\infty, 0\rangle$.
Je-li $x > \frac{2}{3}$, pak

$$f'(x) = \frac{1}{(1-2x)\sqrt{3x^2-2x}} \quad \text{a tedy} \quad f''(x) = \frac{12x^2-9x+1}{(2x-1)^2\sqrt{(3x^2-2x)^3}}\,.$$

Rovnice $12x^2-9x+1=0$ má kořeny $x_{1,2} = \frac{9\pm\sqrt{33}}{24}$ a poněvadž $\frac{9+\sqrt{33}}{24} < \frac{2}{3}$, je $f''(x) > 0$ a f je ryze konxvexní pro $\left\langle \frac{2}{3}, +\infty \right)$. Graf f vypadá přibližně následovně.
viz graf.

26. Vyšetřete průběh funkce f a načrtněte její graf, je-li

(a) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$;

[definována pro $x \in \mathbf{R}$, lichá, nulový bod $x = 0$; asymptota $y = 0$; maximum $\frac{1}{2}$ pro $x = 1$, minimum $-\frac{1}{2}$ pro $x = -1$; inflexní body $\left[-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$, $[0,0]$, $\left[\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right]$.]

(b) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$;

[definována pro $x \in \mathbf{R} - \{0\}$, sudá, kladná; asymptota $x = 0$; minimum 2 pro $x = \pm 1$.]

(c) $f(x) = x - \ln(x+1)$;

[definována pro $x > -1$, nulový bod $x = 0$; asymptota $x = -1$; minimum 0 pro $x = 0$.]

(d) $f(x) = x + \sin x$;

[definována pro $x \in \mathbf{R}$, lichá, nulový bod $x = 0$; inflexní body $[k\pi, k\pi]$, $k \in \mathbf{Z}$.]

(e) $f(x) = e^{2x-x^2}$;

[definována pro $x \in \mathbf{R}$, kladná, asymptota $y = 0$; maximum e pro $x = 1$; inflexní body $x = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.]

(f) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$;

[definována pro $x \in \mathbf{R}$, lichá, nulový bod $x = 0$; asymptota $y = 0$; maximum $e^{-\frac{1}{2}} \doteq 0,607$ pro $x = 1$, minimum $-e^{-\frac{1}{2}} \doteq -0,607$ pro $x = -1$; inflexní body $x = 0$ a $x = \pm\sqrt{3}$.]

(g) $f(x) = (1+x^2)e^{-x^2}$;

$\big[$definována pro $x \in \mathbf{R}$, sudá, kladná; asymptota $y = 0$;
maximum 1 pro $x = 0$; inflexní body $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \doteq \pm 1{,}225\,.\big]$

(h) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

$\big[$definována pro $x > 0$, nulový bod $x = 1$; asymptoty $x = 0$, $y = 0$;
maximum $\frac{2}{e} \doteq 0{,}736$ pro $x = e^2 \doteq 7{,}389$; inflexní bod $\left[e^{\frac{8}{3}}, \frac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}}\right]\,.\big]$

(i) $f(x) = \ln\cos x$;

$\big[$definována pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ $(k \in \mathbf{Z})$; sudá, periodická s periodou 2π;
nekladná, nulové body $x = 2k\pi\,(k \in \mathbf{Z})$; asymptoty $x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,(k \in \mathbf{Z})$;
maximum 0 pro $x = 2k\pi\,(k \in \mathbf{Z})\,.\big]$

(j) $f(x) = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$;

$\big[$definována pro $x \in \mathbf{R}$, lichá, nulový bod $x = 0$; asymptota $y = 0$;
maximum $\frac{\pi}{2}$ pro $x = 1$, minimum $-\frac{\pi}{2}$ pro $x = -1$; inflexní bod $[0,0]\,.\big]$

(k) $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;

$\big[$definována pro $x \in (-1,1)$, lichá, nulový bod $x = 0$;
asymptoty $x = \pm 1$; inflexní bod $[0,0]\,.\big]$

(l) $f(x) = x - 2\mathrm{arctg}\, x$;

$\big[$definována pro $x \in \mathbf{R}$, lichá, nulové body $x = 0$, $x = \pm 2{,}331$ (přibližně);
asymptoty pro $x \to \pm\infty$ jsou $y = x \mp \pi$; maximum $\frac{\pi}{2} - 1$ pro $x = -1$,
minimum $1 - \frac{\pi}{2}$ pro $x = 1$; inflexní bod $[0,0]\,.\big]$

(m) $f(x) = a\arcsin\frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}$, $a > 0$;

$\big[$definována pro $x \in \langle -a, a\rangle$; nulový bod $x = 0{,}67a$ (přibližně);
minimum $-\frac{\pi}{2}a$ pro $x = -a$, maximum $\frac{\pi}{2}$ pro $x = a$; konvexní$\,.\big]$

(n) $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-4x+3}}$;

$\big[$definována pro $x \in \mathbf{R} - \{1,3\}$, kladná; asymptoty $x = 1$, $x = 3$, $y = 1$;
maximum $\frac{1}{e} \doteq 0{,}368$ pro $x = 2$; nehledejte inflexní body$\,.\big]$

(o) $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$;

$\big[$definována pro $x \in \mathbf{R} - \{1\}$, nezáporná; asymptoty $x = 1$, $y = 1$;
minimum 0 pro $x = -1$; inflexní bod $\left[-4, \frac{81}{625}\right]\,.\big]$

(p) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$;

$\big[$definována pro $x \in \mathbf{R}$, sudá, periodická s periodou $\frac{\pi}{2}$, kladná;
pro $x \in \left\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\rangle$ maximum 1 pro $x = 0$, minimum $\frac{1}{2}$ pro $x = \pm\frac{\pi}{4}$;
inflexní body $\left[\pm\frac{\pi}{8}, \frac{3}{4}\right]\,.\big]$

(q) $f(x) = \frac{\cos x}{\cos 2x}$;

$\Big[$definována pro $x \neq \frac{(2k+1)\pi}{4}$ $(k \in \mathbf{Z})$, sudá, periodická s periodou 2π,
nulové body $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$; pro $x \in \langle -\pi, \pi\rangle$ maximum -1 pro $x = \pm\pi$,
minimum 1 pro $x = 0$; asymptoty $x = \pm\frac{\pi}{4}$, $x = \pm\frac{3\pi}{4}$; inflexní body $\left[\pm\frac{\pi}{2}, 0\right]\,.\Big]$

(r) $f(x) = 2^{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}$;

$\big[$definována pro $|x| \geq 1$, sudá, kladná; asymptota $y = 1$;
maximum $2^{\sqrt{2}} \doteq 2{,}665$ pro $x = \pm 1\,.\big]$

(s) $f(x)=\sqrt{1-e^{-x^2}}$;

[definována pro $x\in\mathbf{R}$, sudá, nezáporná; nulový bod $x=0$; asymptota $y=1$; minimum 0 pro $x=0$; nehledejte inflexní body.]

(t) $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$;

[definována pro $x\in\mathbf{R}-\{-1,1\}$, lichá, nulový bod $x=0$; asymptoty $x=\pm1$; minimum $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\doteq 1,375$ pro $x=\sqrt{3}$, maximum $-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\doteq -1,375$ pro $x=-\sqrt{3}$; inflexní body $[0,0]$, $\left[3,\frac{3}{2}\right]$, $\left[-3,-\frac{3}{2}\right]$.]

(u) $f(x)=e^{-2x}\sin^2 x$;

[definována pro $x\in\mathbf{R}$, nulové body $x=k\pi\,(k\in\mathbf{Z})$, nezáporná; asymptota $y=0$; minima pro $x=k\pi$, maxima pro $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$; inflexe pro $x=\frac{\pi}{12}+k\pi$, $x=\frac{5\pi}{12}+k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$.]

(v) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2+1}$;

[definována pro $x\in\mathbf{R}$, sudá, nezáporná; asymptota $y=0$; minimum -1 pro $x=0$.]

(w) $f(x)=\sin^3 x+\cos^3 x$;

[definována pro $x\in\mathbf{R}$, periodická s periodou 2π; pro $x\in\langle 0,2\pi\rangle$ nulové body $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$; maximum 1 pro $x=0,\frac{\pi}{2}$ a $-\frac{\sqrt{2}}{2}\doteq -0,707$ pro $x=\frac{5\pi}{4}$, minimum $\frac{\sqrt{2}}{2}\doteq 0.707$ pro $x=\frac{\pi}{4}$ a -1 pro $x=\pi,\frac{3\pi}{2}$; inflexe pro $x=\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$ a $x_1=\alpha=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}\doteq 0,365$, $x_2=\frac{\pi}{2}-\alpha\doteq 1,206$, $x_3=\pi+\alpha\doteq 3,506$, $x_4=\frac{3\pi}{2}-\alpha\doteq 4,348$.]

(x) $f(x)=\cos x+\frac{1}{2}\sin 2x$;

[definována pro $x\in\mathbf{R}$, periodická s periodou 2π; pro $x\in\langle 0,2\pi\rangle$ nulové body $\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$; maximum $\frac{3\sqrt{3}}{4}\doteq 1,299$ pro $x=\frac{\pi}{6}$, minimum $-\frac{\sqrt{3}}{4}\doteq -0,433$ pro $x=\frac{5\pi}{6}$; inflexe pro $x_1=\frac{\pi}{2}$, $x_2=\pi+\alpha$, $x_3=\frac{3\pi}{2}$, $x_4=2\pi-\alpha$, kde $\alpha=\arcsin\frac{1}{4}\doteq 0,253$.]

(y) $f(x)=\sin x-\sin^2 x$;

[definována pro $x\in\mathbf{R}$; periodická s periodou 2π; pro $x\in\langle 0,2\pi\rangle$ nulové body $0,\frac{\pi}{2},\pi,2\pi$; maximum $\frac{1}{4}$ pro $x=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$, minimum 0 pro $x=\frac{\pi}{2}$ a -2 pro $x=\frac{3\pi}{2}$; inflexe pro $x_1=\alpha_1=\arcsin\frac{1}{8}(1+\sqrt{33})\doteq\arcsin 0,843\doteq 1,003$, $x_2=\pi-\alpha_1\doteq 2,139$, $x_3=\pi-\alpha_2=\pi-\arcsin\frac{1}{8}(1-\sqrt{33})\doteq\pi-\arcsin(-0,593)\doteq 3,776$, $x_4=2\pi+\alpha_2\doteq 5,648$.]

(z) $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x}e^{\frac{1}{x}}$;

[definována pro $x\in\mathbf{R}-\{0\}$, nulové body $x=1,-3$; asymptoty $x=0$, $y=x+3$; maximum $4e^{-1}\doteq 1,472$ pro $x=-1$; inflexe pro $x_1=-5-\sqrt{22}\doteq -9,69$ a $x_2=-5+\sqrt{22}\doteq -0,31$.]