Kapitola 9.
Taylorův polynom

Definice 9.1. (vyšší derivace)

Nechť funkce f je diferencovatelná na $U(x_0)$. Jestliže existuje

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = f''(x_0),$$

pak číslo $f''(x_0)$ se nazývá <u>druhá derivace</u> funkce f v bodě x_0.
Tedy $f''(x_0) = (f')'(x_0)$ a analogicky pro <u>n-tou derivaci</u> funkce f v bodě x_0 platí

$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0).$$

Říkáme, že funkce f je n-krát diferencovatelná v bodě x_0.
Funkce $f^{(n)} : x \to f^{(n)}(x)$, $x \in I$ se nazývá <u>n-tá derivace funkce</u> f na intervalu I.

Věta 9.2. (TAYLOROVA VĚTA)

Nechť má funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, x\rangle$ spojité derivace až od $(n+1)$-ního řádu.
Potom:

$$f(x) = \underbrace{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{T_n(x)} + R_{n+1},$$

kde $T_n(x)$ se nazývá **Taylorův polynom** n-tého stupně a zbytek R_{n+1} lze zapsat například takto:

Lagrangeův tvar: $R_{n+1} = \dfrac{f^{(n+1)}(a+\xi h)}{(n+1)!} h^{n+1}, \qquad h = x-a, \quad 0<\xi<1,$

Cauchyův tvar: $R_{n+1} = \dfrac{f^{(n+1)}(a+\xi h)}{n!} (1-\xi)^n h^{n+1}, \qquad h = x-a, \quad 0<\xi<1,$

integrální tvar: $R_{n+1} = \displaystyle\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \,\mathrm{d}\xi.$

Věta 9.3. (konvergence taylorovy řady)

Nechť má funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, x\rangle$ derivace všech řádů a nechť existuje číslo $M>0$ takové, že

$$|f^{(n)}(x)| \le M, \qquad \text{pro všechna } n \ge 0.$$

Potom $\lim\limits_{n\to+\infty} R_{n+1} = 0$ a píšeme:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots \qquad = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

9.4. / TABULKA základních rozvojů:

$$
\begin{array}{llcll}
1. & \mathrm{e}^{x} & = & 1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dots & -\infty<x<+\infty \\[2ex]
2. & \mathrm{e}^{-x} & = & 1-\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dots & -\infty<x<+\infty \\[2ex]
3. & \sin x & = & x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\dfrac{x^9}{9!}+\dots & -\infty<x<+\infty \\[2ex]
4. & \cos x & = & 1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\dfrac{x^8}{8!}+\dots & -\infty<x<+\infty \\[2ex]
\vdots & \vdots & \vdots & & \\
\hline
100. & \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t & = & x-\dfrac{x^3}{3\cdot 1!}+\dfrac{x^5}{5\cdot 2!}-\dfrac{x^7}{7\cdot 3!}+\dfrac{x^9}{9\cdot 4!}+\dots & -\infty<x<\infty \\[2ex]
101. & \displaystyle\int_0^x \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t & = & x-\dfrac{x^3}{3\cdot 3!}+\dfrac{x^5}{5\cdot 5!}-\dfrac{x^7}{7\cdot 7!}+\dfrac{x^9}{9\cdot 9!}+\dots & -\infty<x<\infty \\[2ex]
\vdots & \vdots & \vdots & &
\end{array}
$$