Kapitola 8.

Integrály

8.1. Neurčité integrály

Definice 8.1. (PRIMITIVNÍ FUNKCE)

Nechť jsou funkce $f(x)$ a $F(x)$ definované na intervalu (a,b).
Řekneme, že $F(x)$ je **primitivní funkcí** k funkci $f(x)$ na intervalu (a,b), jestliže

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in (a,b).$$

Věta 8.2. (existence primitivní funkce)

Ke každé funkci $f(x)$, spojité na intervalu (a,b), existuje na tomto intervalu primitivní funkce $F(x)$.

Věta 8.3. (vlastnosti primitivní funkce)

Nechť $F(x)$ je primitivní funkcí k funkci $f(x)$ na intervalu (a,b).
Potom:

1. $F(x)$ je na intervalu (a,b) spojitá. *(dokonce diferencovalená ;)*
2. Každá funkce $G(x) = F(x) + C$, kde C je reálná konstanta, je také primitivní funkcí k $f(x)$ na (a,b).
3. Každou primitivní funkci k $f(x)$ na (a,b) lze zapsat ve tvaru $F(x) + C$, kde C je reálná konstanta.

Definice 8.4. (neurčitý integrál)

Neurčitým integrálem funkce $f(x)$ na intervalu (a,b)
nazveme <u>množinu</u> všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ na (a,b), kterou značíme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \Big\{F(x) + C;\ C \in \mathbb{R},\ F(x) \text{ je primitivní funkce k } f(x)\Big\}.$$

$$\Bigg(\textit{proces hledání } F(x) \textit{ nazýváme integrování a připouštíme zápis: } \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R} \Bigg)$$

8.5. / TABULKA základních integrálů:

1. $\displaystyle\int x^a \, \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{\alpha+1} + C, \qquad \begin{cases} x \in \mathbb{R}, & a \in \mathbb{N}, \\ x \neq 0, & a \in \mathbb{Z},\ a \neq -1, \\ x > 0, & a \in \mathbb{R},\ a \neq -1, \end{cases}$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + C, \qquad x \neq 0,$

3. $\displaystyle\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + C, \qquad x \in \mathbb{R},$

4. $\displaystyle\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C, \qquad x \in \mathbb{R},\ a \neq 1,\ a > 0,$

5. $\displaystyle\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C, \qquad x \in \mathbb{R},$

6. $\displaystyle\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C, \qquad x \in \mathbb{R},$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + C, \qquad x \neq (2k+1)\tfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z},$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x} \, \mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + C, \qquad x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \arcsin x + C, \qquad x \in (-1, 1),$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + C, \qquad x \in \mathbb{R},$

11. $\displaystyle\int \sinh x \, \mathrm{d}x = \cosh x + C, \qquad x \in \mathbb{R},$

12. $\displaystyle\int \cosh x \, \mathrm{d}x = \sinh x + C, \qquad x \in \mathbb{R},$

13. $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2 x} \, \mathrm{d}x = \operatorname{tgh} x + C, \qquad x \in \mathbb{R},$

14. $\displaystyle\int \frac{1}{\sinh^2 x} \, \mathrm{d}x = -\operatorname{cotgh} x + C, \qquad x \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$

15. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, \mathrm{d}x = \operatorname{argcosh}|x| + C, \qquad x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty),$

16. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, \mathrm{d}x = \operatorname{argsinh} x + C, \qquad x \in \mathbb{R},$

---

100. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, \mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{x : f(x) = 0\},$

101. $\displaystyle\int f'(x) \, \mathrm{d}x = f(x) + C, \qquad \left(\int f(x) \, \mathrm{d}x\right)' = f(x).$

Věta 8.6. (integrace součtu, rozdílu a násobku)

Nechť jsou funkce $f(x)$ a $g(x)$ spojité na intervalu (a,b).
Potom na tomto intervalu platí:

a) $$\int \big(f(x) \pm g(x) \big)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x,$$

b) $$\int \alpha \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{kde } \alpha \neq 0 \text{ je reálná konstanta.}$$

Věta 8.7. (metoda *per partes* **)**

Pro funkce $u(x)$ a $v(x)$, které mají na intervalu (a,b) spojité první derivace $u'(x)$ a $v'(x)$, platí:

$$\int u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x.$$

Důsledek 8.8. (metoda *trial partes a la trial* **)**

Pro funkce $u(x)$ a $v(x)$, které mají na intervalu (a,b) spojité derivace až do řádu 3 (obecně n) platí

$$\int u(x)v'''(x)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ccc} D & & I \\ \hline \boldsymbol{u(x)} & & v'''(x) \\ & \overset{+}{\searrow} & \\ \boldsymbol{u'(x)} & & \boldsymbol{v''(x)} \\ & \overset{-}{\searrow} & \\ \boldsymbol{u''(x)} & & \boldsymbol{v'(x)} \\ & \overset{+}{\searrow} & \\ \boldsymbol{u'''(x)} & & \boldsymbol{v(x)} \\ & \underset{-\int}{\longrightarrow} & \end{array}\right| = +\boldsymbol{u(x)v''(x)} - \boldsymbol{u'(x)v'(x)} + \boldsymbol{u''(x)v(x)} - \int \boldsymbol{u'''(x)v(x)\,\mathrm{d}x}$$

(*metoda není nijak objevná nicméně je názorná, výpočet jednoduše zkontrolovatelný a umožňuje vícenásobné použití per-partes v podstatě na jednom řádku.*)

Věta 8.9. (integrace substitucí)

Nechť
a) funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu (a,b)
b) funkce $\varphi(t)$ má spojitou první derivaci $\varphi'(t)$ na intervalu (α,β)
c) $H(\varphi) \subset (a,b)$.

Potom pro $x \in (a,b)$ a $t \in (\alpha,\beta)$ platí:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} x & = & \varphi(t) \\ \mathrm{d}x & = & \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\ \mathrm{d}t$$

8.10. / ... integrály typu $R(\cdot)$:

Formálně uvažujme racionální lomené funkce (podíl polynomů)

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad \text{resp. } R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

∗ **Integrály typu** $\int R(\, x\,)\,\mathrm{d}x$

Funkci $R(x)$ rozložíme na součet parciálnách zlomků:

$$\frac{A}{x - x_0}, \qquad \frac{A}{(x-x_0)^k}, \qquad \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \qquad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k},$$

kde A, B, x_0, p, q jsou reálná čísla ($p^2 - 4q < 0$) a $k = 2, 3, 4, \ldots$.

∗ **Integrály typu** $\int R(\, \mathrm{e}^x\,)\,\mathrm{d}x$

volíme substituci: $t = \mathrm{e}^x$, $\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

∗ **Integrály typu** $\int R(\ln x)\frac{\mathrm{d}x}{x}$

volíme substituci: $t = \ln x$, $\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

∗ **Integrály typu** $\int R\,(\sin x,\, \cos x\,)\,\mathrm{d}x$

volíme buď pracnou za to však univerzální substituci: $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, kde nahrazujeme:

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,$$

nebo méně pracné, ale také méně univerzální substituce:

a) $t = \operatorname{tg} x \iff R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$
b) $t = \cos x \iff R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$
c) $t = \sin x \iff R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$

∗ **Integrály typu** $\int R\left(x,\, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$

volíme substituci: $t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$, čili $x = \frac{dt^n - b}{a - ct^2}$.

8.11. / … racionální lomená funkce:

Integrujeme $\displaystyle\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\,\mathrm{d}x = \dots$ kde $\begin{cases} P_m(x) \text{ je polynom stupně } m, \\ Q_n(x) \text{ je polynom stupně } n. \end{cases}$

1. Pokud je $m \geq n$, dělíme polynom $P_m(x)$ polynomem $Q_n(x)$
$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = M(x) + \frac{R_k(x)}{Q_n(x)}$$
2. $M(x)$ je polynom, který snadno integrujeme.
3. Protože $k < n$, rozložíme $\frac{R_k(x)}{Q_m(x)}$ na parciální zlomky.
Existují právě 4 typy parciálních zlomků (tj. žádné jiné)
$$\frac{A}{x-x_0}, \qquad \frac{A}{(x-x_0)^k}, \qquad \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \qquad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k},$$
kde A, B, x_0, p, q jsou reálná čísla ($p^2-4q<0$) a $k = 2,3,4,\dots$.

(a) reálný kořen x_0 násobnosti jedna:
$$\int \frac{A}{x-x_0}\,\mathrm{d}x = A\ln|x-x_0| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(b) reálný kořen x_0 násobnosti k:
$$\int \frac{A}{(x-x_0)^k}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-x_0)^{k-1}} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(c) komplexně sdružené kořeny násobnosti jedna:
$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

(d) komplexně sdružené kořeny násobnosti k: *(s využitím rekurentních vzorců)*
$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} = \frac{A}{2}\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\frac{1}{(x^2+px+q)^k}$$

a tedy:
$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-k}\frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$
$$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(k-1)(4q-p^2)}\left(\frac{2x+p}{x^2+px+q} + (4k-6)\int \frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}}\,\mathrm{d}x\right)$$

symbolicky lze strukturu výpočtu naznačit takto …
$$\begin{aligned}
\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\,\mathrm{d}x &= \int M(x) + \frac{R_k(x)}{Q_n(x)}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int M(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{A}{x-x_0} + \frac{A}{(x-x_0)^k} + \frac{Ax+B}{x^2+px+q} + \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int M(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{A}{x-x_0}\,\mathrm{d}x + \int \frac{A}{(x-x_0)^k}\,\mathrm{d}x + \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x + \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$
… přičemž cílem bylo problém osvětlit a zároveň nikoho nevyděsit ;)

8.12. / … různé:

$*$ **zajímavá užití per partes**

1. K hledání primitivních funkcí k funkcím typu:

$$x^n e^{kx}, \quad x^n \ln x, \quad x^n \cos \omega x, \quad x^n \sin \omega x, \quad x^n \arcsin x, \quad x^n \arccos x, \quad \dots$$

   Lze odvodit i takové krásné *(inženýrské)* vzorce jako:

$$\begin{aligned}\int e^{\alpha x} \cos \omega x \; dx &= \frac{e^{\alpha x}(\omega \sin \omega x + \alpha \cos \omega x)}{\alpha^2 + \omega^2} + C,\\ \int e^{\alpha x} \sin \omega x \; dx &= \frac{e^{\alpha x}(\alpha \sin \omega x - \omega \cos \omega x)}{\alpha^2 + \omega^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

2. Odvození rekurentních formulí integrováním per partes pro $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} J_{n+2} &= \tfrac{1}{n+2} \cos^{n+1} x \sin x + \tfrac{n+1}{n+2} J_n, && \text{kde} \quad J_n = \int \cos^n x \, \mathrm{d}x,\\ J_{n+2} &= -\tfrac{1}{n+2} \sin^{n+1} x \cos x + \tfrac{n+1}{n+2} J_n, && \text{kde} \quad J_n = \int \sin^n x \, \mathrm{d}x,\\ J_{n+1} &= \tfrac{1}{2n} \left(\tfrac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1) J_n \right), && \text{kde} \quad J_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}.\end{aligned}$$

$*$ **Integrály typu** $\int \cos mx \cos nx \, \mathrm{d}x, \ \int \sin mx \cos nx \, \mathrm{d}x, \ \int \sin mx \sin nx \, \mathrm{d}x.$

S využitím známých součtových vzorců:

$$\begin{aligned}\int \cos mx \cos nx \; dx &= \frac{1}{2} \int \Big(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x \Big) \, \mathrm{d}x,\\ \int \sin mx \cos nx \; dx &= \frac{1}{2} \int \Big(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x \Big) \, \mathrm{d}x,\\ \int \sin mx \sin nx \; dx &= \frac{1}{2} \int \Big(-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x \Big) \, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

$*$ **Integrály typu** $\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x, \ \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$

Jinak nezajímavé, ale právě zde mimořádně užitečné součtové vzorce:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}.$$

8.2. Určité integrály

Definice 8.13. (dělení intervalu)

Dělením intervalu $\langle a, b\rangle$ nazveme konečnou posloupnost bodů z tohoto intervalu, které splňují podmínku:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Tuto posloupnost značíme symbolem $D_n = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Definice 8.14. (dolní a horní integrální součet)

Nechť D_n je dělení intervalu $I = \langle a, b\rangle$ a nechť $f(x)$ je funkce omezená na tomto intervalu.
Označme $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ a $I_k = \langle x_{k-1}, x_k\rangle$.

Dolním integrálním součtem nazveme číslo: $$s(f, D_n) = \sum_{k=1}^{n} \inf_{x\in I_k} \{f(x)\} \cdot \Delta x_k$$

Horním integrálním součtem nazveme číslo: $$S(f, D_n) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{x\in I_k} \{f(x)\} \cdot \Delta x_k$$

Definice 8.15. (Riemannův integrál)

Nechť $f(x)$ je funkce definovaná a omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$.
Uvažujme všechna dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ a s jejich pomocí sestrojme

- množinu hodnot všech dolních integrálních součtů.
- množinu hodnot všech horních integrálních součtů.

Jestliže se supremum množiny dolních integrálních součtů rovná infimu množiny horních integrálních součtů, říkáme jejich společné hodnotě **Riemannův integrál** funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ a píšeme

$$\sup_{D_n} s(f, D_n) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \inf_{D_n} S(f, D_n).$$

Funkci $f(x)$ nazveme **Riemannovsky integrovatelnou** (integrovatelnou) na $\langle a, b\rangle$ a píšeme $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$.
Číslo a nazveme **dolní mez** integrálu.
Číslo b nazveme **horní mez** integrálu.

Chceme-li zdůraznit, že uvažujeme integrál ve smylu Riemannovy definice, píšeme: $(\mathcal{R}) \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

Definice 8.15". (rozšíření definice Riemannova integrálu)

Pro integrovatelnou funkci $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$, kde $a < b$, definujeme:

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{a} \qquad \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 8.16. (Riemannův integrál a obsah plochy)

Nechť $f(x) \geq 0$ je spojitá funkce na $\langle a, b\rangle$. Potom je integrál

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

číselně roven obsahu plochy obrazce, jehož obvod tvoří: osa x,
graf funkce $y = f(x)$,
rovnoběžky s osou y o rovnicích $x = a$ a $x = b$.

Věta 8.17. (postačující podmínky integrovatelnosti)

Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou funkce definované na intervalu $\langle a, b\rangle$.

1. Jestliže $f(x)$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$, potom je zde integrovatelná.
2. Jestliže $f(x)$ je omezená na $\langle a, b\rangle$ a obsahuje nejvýše konečný počet bodů nespojitosti, potom je na $\langle a, b\rangle$ integrovatelná.

$$\Big(\textit{v obou případech pak píšeme } f \in \mathcal{R}\,(\,\langle a, b\rangle\,)\Big)$$

3. Jestliže $f(x)$ a $g(x)$ jsou integrovatelné, potom jsou integrovatelné také funkce

$$\alpha f(x), \quad |f(x)|, \quad f(x) + g(x), \quad f(x)g(x), \qquad \textit{kde } \alpha \textit{ je reálná konstanta},$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}, \qquad \begin{array}{rl} \textit{pokud} & 0 < m \leq g(x), \textit{kde } m \textit{ je kladná konstanta}, \\ \textit{nebo} & 0 > m \geq g(x), \textit{kde } m \textit{ je záporná konstanta}. \end{array}$$

Věta 8.18. (Newtonova - Leibnizova věta)

Nechť $F(x)$ je primitivní funkcí k funkci $f(x)$ a nechť jsou obě funkce spojité na $\langle a, b\rangle$.
Potom

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

$$\Big(\textit{výpočet nezávisí na výběru primitivní funkce}\Big)$$

Věta 8.19. (linearita a aditivita)

Pro integrovatelné funkce $f(x)$ a $g(x)$ na $\langle a,b\rangle$ platí:

a) $\displaystyle\int_a^b \alpha\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\cdot\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$ kde α je reálná konstanta,

b) $\displaystyle\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$

c) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$ kde $a<c<b$.

Věta 8.20. (per partes v určitém integrálu)

Pro funkce $u(x)$ a $v(x)$, které mají na $\langle a,b\rangle$ spojité první derivace $u'(x)$ a $v'(x)$, platí:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Věta 8.21. (substituce v určitém integrálu)

Nechť a) funkce $\varphi(t)$ má spojitou první derivaci $\varphi'(t)$ na intervalu (α,β)
b) funkce $f(x)$ je spojitá na $H(\varphi)$
c) $a=\varphi(\alpha)$ a $b=\varphi(\beta)$.

Potom pro $x\in(a,b)$ a $t\in(\alpha,\beta)$ platí:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ \mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \\ a=\varphi(\alpha) \\ b=\varphi(\beta) \end{array}\right| = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\;\mathrm{d}t$$

8.22. věta o střední hodnotě a její důsledky

Věta 8.22. (věta o střední hodnotě)

Nechť $f(x)$ je spojitá funkce na $\langle a, b\rangle$.
Potom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{resp.} \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

Důsledek 8.22.A. (pozitivnost integrálu)

Nechť $f(x) \geq 0$ je spojitá funkce na $\langle a, b\rangle$.
Potom

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

Jestliže navíc existuje $x \in \langle a, b\rangle$ takové, že $f(x) > 0$, platí pro výše uvedený integrál ostrá nerovnost.

Důsledek 8.22.B. (porovnání integrálů)

Nechť $f(x) \geq g(x)$ jsou spojité funkce na $\langle a, b\rangle$.
Potom

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jestliže navíc existuje $x \in \langle a, b\rangle$ takové, že $f(x) > g(x)$, platí pro výše uvedené integrály ostrá nerovnost.

Důsledek 8.22.C. (integrál z absolutní hodnoty)

Nechť $f(x)$ je spojitá funkce na $\langle a, b\rangle$.
Potom

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Jestliže navíc funkce $f(x)$ mění na $\langle a, b\rangle$ znaménko, platí pro výše uvedený integrál ostrá nerovnost.

Důsledek 8.22.D. (sevření integrálu)

Nechť $m \leq f(x) \leq M$, kde $f(x)$ je spojitá funkce na $\langle a, b\rangle$.
Potom

$$m\,(b-a) \;\leq\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;\leq\; M\,(b-a).$$

Věta 8.23. (Integrál s proměnnou horní mezí)

Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na $\langle a, b\rangle$.
Potom je funkce definovaná předpisem:

$$G(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t,$$

spojitou funkcí na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Navíc v každém bodě x, ve kterém je funkce $f(x)$ spojitá, je $G(x)$ diferencovatelná a platí:

$$G'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x).$$

$$\left(\textit{Analogicky pro } H(x) = \int_x^b f(t)\ \mathrm{d}t, \textit{ platí:} \quad H'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = -f(x). \right)$$

8.3. Nevlastní integrály

Definice 8.24. (nevlastní integrál vlivem funkce I.)

Nechť $f(x)$ je integrovatelná v každém intervalu $\langle a, c\rangle$, kde $a < c < b$ a nechť $f(x)$ není omezená na $\langle a, b\rangle$.
Nevlastní interál vlivem funkce je integrál

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

o kterém řekneme, že:

1. **konverguje** (je konvergentní), jestliže existuje limita

$$\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{a píšeme: } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. **diverguje** (je divergentní), jestliže neexistuje limita

$$\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pokud je příslušná limita $+\infty$ (resp. $-\infty$) a píšeme: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Definice 8.25. (nevlastní integrál vlivem funkce II.)

Nechť $f(x)$ není omezená v okolí bodu c, kde $a < c < b$.
Nevlastní interál vlivem funkce je integrál

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

o kterém řekneme, že:

1. **konverguje** (je konvergentní), jestliže konvergují oba integrály

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. **diverguje** (je divergentní), jestliže diverguje alespoň jeden z výše uvedených integrálů.

Definice 8.26. (nevlastní integrál vlivem meze I.)

Nechť $f(x)$ je integrovatelná v každém intervalu $\langle a, b\rangle$.

Nevlastní interál vlivem meze je integrál

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

o kterém řekneme, že:

1. **konverguje** (je konvergentní), jestliže existuje limita

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{a píšeme: } \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. **diverguje** (je divergentní), jestliže neexistuje limita

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pokud je příslušná limita $+\infty$ (resp. $-\infty$) a píšeme: $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Definice 8.27. (nevlastní integrál vlivem meze II.)

Nechť $f(x)$ je integrovatelná v každém intervalu $\langle a, b\rangle$.

Nevlastní interál vlivem meze je integrál

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

o kterém řekneme, že:

1. **konverguje** (je konvergentní), jestliže pro nějaké $x_0 \in \mathbb{R}$ konvergují oba integrály

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-\infty}^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. **diverguje** (je divergentní), jestliže diverguje alespoň jeden z výše uvedených integrálů.

Definice 8.28. (valeur principale)

Nechť $f(x)$ je integrovatelná v každém intervalu $\langle -a, a\rangle$.

Hlavní hodnotou (**valeur principale**) nevlastního integrálu je integrál:
(pokud limita existuje)

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

8.100. NÁHLEDY ...

Věta 8.101. (srovnávací kritérium)

1. Nechť b je singulární bod integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
   (tj. f je buď neomezená v okolí b nebo $b = +\infty$).
2. Nechť $f, g \in \mathcal{N}(\langle a, x\rangle)$ pro libovolné x takové, že $\langle a, x\rangle \subset \langle a, b)$.
3. $\forall t \in \langle a, x\rangle :\ 0 \leq f(t) \leq g(t)$.

Potom platí:

1. Konverguje-li $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$, konverguje také $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Diverguje-li $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, diverguje také $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Věta 8.102. (integrální kritérium pro řady)

Nechť $f(x) \geq 0$ je klesající funkce definovaná na intervalu $\langle 1, +\infty)$.
A nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost reálných čísel taková, že $a_n = f(n)$.

Potom řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a integrál $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ buď současně konvergují nebo současně divergují.

Věta 8.103. (kritérium divergence)

Nechť $f(x)$ je integrovatelná v každém intervalu $\langle 0, b\rangle$.
Jestliže

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \quad \text{a nebo} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ existuje, ale je různá od nuly}$$

potom nevlastní integrál $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverguje.