Kapitola 7.

Derivace

Definice 7.1. (derivace a diferenciál)

1. Řekneme, že funkce f definovaná na okolí $U(x_0)$ má v bodě x_0 derivaci (je derivovatelná), existuje-li konečná limita

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) = f'(x)|_{x=x_0}.$$

Této limitě říkáme derivace funkce f v bodě x_0.

Není-li tato limita konečná nebo neexistuje-li, říkáme, že funkce f nemá v bodě x_0 derivaci. V případě jednostranné limity hovoříme o jednostranné derivaci.

2. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 diferenciál (je diferencovatelná), existuje-li číslo A a funkce $\omega(h) \equiv \omega(x-x_0)$ taková, že platí

$$f(x_0+h)-f(x_0) = A\cdot h + \omega(h), \quad \lim_{h\to 0} \frac{\omega(h)}{h} = 0.$$

Číslo A je derivace funkce f v bodě x_0 a lineární funkci Ah proměnné h říkáme diferenciál funkce f v bodě x_0 a píšeme

$$df(x_0,h) = Ah = f'(x_0)h\ .$$

Věta 7.2. (derivovatelnost a diferencovatelnost)

Funkce f je v bodě x_0 derivovatelná právě tehdy, když je v tomto bodě diferencovatelná.

Věta 7.3. (diferencovatelnost a spojitost)

Je-li funkce f diferencovatelná v bodě x_0, je v tomto bodě spojitá.

Věta 7.4. (pravidla derivování a diferencování)

Nechť funkce f a g jsou diferencovatelné v bodě x_0. Potom jsou v tomto bodě diferencovatelné i funkce

$$cf, \quad f \pm g, \quad f \cdot g,$$

a pokud $g(x_0) \neq 0$, pak i funkce $\dfrac{f}{g}$.

Platí:

1. $(cf)' = cf'$, c je konst., $\quad d(cf) = c\ df$,
2. $(f \pm g)' = f' + g'$, $\quad d(f \pm g) = df \pm dg$,
3. $(fg)' = f'g + fg'$, $\quad d(fg) = f\ dg + g\ df$,
4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, $\quad d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\ df - f\ dg}{g^2}$.

Věta 7.5. (derivace složené funkce)

Mějme složenou funkci $F(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ a nechť existují derivace $f'(x_0)$ a $g'(y_0)$, kde $y_0 = f(x_0)$. Potom existuje derivace $F'(x_0) = [g(f(x))]'_{x=x_0}$ a platí

$$F'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0).$$

Věta 7.6. (derivace inverzní funkce)

Nechť diferencovatelná funkce $f : I \to H$ je prostá v I a nechť $\forall x \in I$ je $f'(x) \neq 0$. Potom inverzní funkce f^{-1} je také diferencovatelná a platí

$$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{[f(x)]'},$$

kde

$$y = f(x),\ x \in I,\ \ x = f^{-1}(y),\ y \in H\ .$$

Tedy pro všechna $x \in D(f^{-1})$ platí

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Definice 7.7. (hladká funkce)

Říkáme, že funkce f je spojitě diferencovatelná v otevřeném intervalu I (tzv. hladká funkce), je-li funkce f' spojitá v I, tj. platí:

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = f'(x_0),\ \text{pro každé}\ x_0 \in I.$$

Věta 7.9. (Fermatova nutná podmínka existence extrému)

Jestliže funkce f nabývá v bodě x_0 svého lokálního extrému a existuje $f'(x_0)$, potom $f'(x_0) = 0$.

Věta 7.10. (Rolleova věta o střední hodnotě)

Předpokládáme, že funkce f

1. je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. je diferencovatelná na otevřeném intervalu (a, b),
3. platí $f(a) = f(b)$.

Potom existuje aspoň jeden bod $\xi \in (a, b)$ takový, že $f'(\xi) = 0$.

Věta 7.11. (Lagrangeova věta o střední hodnotě)

Předpokládáme, že funkce f

1. je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. je diferencovatelná na otevřeném intervalu (a, b).

Potom existuje aspoň jeden bod $\xi \in (a, b)$ takový, že platí

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Věta 7.12. (Cauchyova zobecněná věta o střední hodnotě)

Předpokládejme, že funkce f a g jsou

1. spojité na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. diferencovatelné na otevřeném intervalu (a, b),
3. $g'(x) \neq 0$ pro všechna $x \in (a, b)$.

Potom existuje alespoň jeden bod $\xi \in (a, b)$ takový, že platí

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad g(a) \neq g(b).$$

7.100. NÁHLEDY ...

Definice 7.101. (stacionární bod)

Stacionárním bodem funkce $f(x)$ nazveme každý bod x_0 definičního oboru, ve kterém platí: $f'(x_0) = 0$.